గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులు – అర్థ శాస్త్రం

బి. ఎ. ద్వితీయ సంవత్సరం

సెమిష్టర్ –4

రచయితలు

డా॥ జి.బి. ఫ్రాంక్లిన్,
ఎం.ఎ., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
వైస్ ప్రిన్సిపాల్ & రీడరు
విటిజెయం అండ్ ఐవిటిఆర్ డిగ్రీ కళాశాల,
మంగళగిరి.

శ్రీ చల్లా సత్యనారాయణ మూర్తి,
ఎం.ఎ., ఎం.ఫిల్.
అర్థశాస్త్ర విభాగాధిపతి
టి.జె.పి.యస్. కళాశాల, గుంటూరు.

శ్రీ వేల్పుల శ్యామ్ ప్రసాద్,
ఎం.ఎ., ఎం.ఫిల్.
ప్రిన్సిపాల్ (FAC)
ప్రభుత్వ డిగ్రీ కళాశాల, చేబ్రోలు.

శ్రీ సి.వి.యల్. సుబ్రమణ్యం,
ఎం.ఎ., ఎం.ఫిల్.
ప్రిన్సిపాల్
సి.యస్.ఆర్. శర్మ కళాశాల, ఒంగోలు.

డా॥ యన్.జె. భూషణం,
ఎమ్మెస్సీ, ఎం.ఎ., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
రీడర్
విఆర్ యస్ అండ్ వైఆర్ యన్ కళాశాల, చీరాల.

సంపాదకులు

డా॥ జి.బి. ఫ్రాంక్లిన్, ఎం.ఏ., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
వైస్ ప్రిన్సిపాల్ & రీడర్
అర్థశాస్త్ర విభాగం, విటిజెయం అండ్ ఐవిటిఆర్ డిగ్రీ కళాశాల, మంగళగిరి.

సమన్వయకర్త

ఆచార్య ఎమ్. వి. ఎన్. శర్మ,
ఎల్ఎల్.బి., ఎం.పి.ఎస్., ఎం.ఎ., ఎం.ఎ. పిహెచ్.డి.
డిపార్ట్ మెంట్ ఆఫ్ ఎకనామిక్స్ & అప్లైడ్ ఎకనామిక్స్,
ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం.

సంచాలకులు

డా. నాగరాజు బట్టు
ఎం.బీ.ఏ., ఎం.హెచ్.ఆర్.ఎం., ఎం.ఎస్.సి.(సైకాలజీ), ఎల్.ఎల్.ఎం., ఎం.ఏ.(సోషియాలజీ), ఎం.ఇ.డి., ఎం.ఫిల్., పిహెచ్.డి.
దూర విద్యాకేంద్రం, ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం,
నాగార్జున నగర్ – 522 510, గుంటూరు.

Ph : 0863 - 2346208, 2346222, 2346259 (Study Material)
Website : www.anucde.info
e-mail : anucdedirector@gmail.com

బి. ఎ. ద్వితీయ సంవత్సరం సెమిష్టర్ – 4

గణాంక శాస్త్ర పద్ధతులు – అర్థ శాస్త్రం

తొలి ప్రచురణ : 2023

కాపీల సంఖ్య :

ప్రచురణ కర్త :
డా. నాగరాజు బట్టు,
సంచాలకులు,
దూర విద్యాకేంద్రం,
ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం.

ప్రచురించినది :

ముందుమాట

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం 1976లో స్థాపించినది మొదలు నేటి వరకు ప్రగతి పథంలో పయనిస్తూ వివిధ కోర్సులు,పరిశోధనలు అందిస్తూ 2016 నాటికి NAAC చే 'A' గ్రేడ్ ను సంపాదించుకొని దేశంలోనే ఒక ప్రముఖ విశ్వవిద్యాలయంగా గుర్తింపు సాధించుకొన్నదని తెలియజేయడానికిసంతోషిస్తున్నాను.ప్రస్తుతం గుంటూరు , ప్రకాశం జిల్లాలోని 447 అనుబంధ కళాశాలలకు డిప్లమో, డిగ్రీ , పీజీ స్థాయి విద్యా బోధనను ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం అందిస్తోంది.

ఆచార్య నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయం ఉన్నత విద్యను అందరికీ అందించాలన్న లక్ష్యంతో 2003 –2004 లో దూర విద్యా కేంద్రాన్ని స్థాపించింది. పూర్తి స్థాయిలో కళాశాలకు వెళ్లి విద్యనభ్యసించలేని వారికి, వ్యయభరితమైన ఫీజులు చెల్లించలేని వారికి, ఉన్నత విద్య చదవాలన్న కోరిక గల గృహిణులకు ఈ దూర విద్యా కేంద్రం ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది. ఇప్పటికే డిగ్రీ స్థాయిలో బి.ఏ., బీ.కాం., బి. ఎస్ సి. , పీజీ స్థాయిలో ఎం.కామ్., ఎం.ఎస్ సి., ఎం.సి.ఏ., ఎల్.ఎల్.ఎం., ఎం.బీ.ఏ., కోర్సులను ప్రారంభించిన విశ్వవిద్యాలయం గత సంవత్సరం కొత్తగా జీవన నైపుణ్యాలు అని సర్టిఫికెట్ కోర్సును కూడా ప్రారంభించింది.

ఈ దూర విద్యా విధానం ద్వారా విద్యను అభ్యసించే విద్యార్థుల కొరకు రూపొందించే పాఠ్యాంశాలు సులభంగాను, సరళంగాను, విద్యార్థి తనంతట తానుగా అర్థం చేసుకునేలా ఉండాలనే ఉద్దేశ్యంతో విశేష బోధనానుభవం కలిగి రచనా వ్యాసంగంలో అనుభవం గల అధ్యాపకులతో పాఠ్యాంశాలను వ్రాయించడం జరిగింది. వీరు ఎంతో నేర్పుతో, నైపుణ్యంతో నిర్ణీత సమయంలో పాఠ్యాంశాలను తయారుచేశారు. ఈ పాఠ్యాంశాలపై విద్యార్థినీవిద్యార్థులు, ఉపాధ్యాయులు, నిష్ణాతులైన వారు ఇచ్చే సలహాలు, సూచనలు సహృదయంతో స్వీకరించబడతాయి. నిర్మాణాత్మకమైన సూచనలు గ్రహించి ముందు మరింత నిర్దిష్టంగా అర్థమయ్యే రీతిలో ప్రచురణ చేయగలం. ఈ పాఠ్యాంశాల అవగాహన కోసం, అభివృద్ధి కోసం, సంశయాల నివృత్తి కోసం వారాంతపు తరగతులు, కాంటాక్టు క్లాసులు ఏర్పాటు చేయడం జరిగింది.

దూర విద్యా కేంద్రం ద్వారా విజ్ఞాన సముపార్జన చేస్తున్న విద్యార్థులు, ఉన్నత విద్యార్హతలు సంపాదించి జీవన యాత్ర సుగమం చేసుకోవడమే కాక చక్కటి ఉద్యోగ అవకాశాలు పొంది, ఉద్యోగాలలో ఉన్నత స్థాయికి చేరాలని, తద్వారా దేశ పురోగతికి దోహదపడాలని కోరుకుంటున్నాను. రాబోయే సంవత్సరాలలో దూర విద్యా కేంద్రం మరిన్ని కొత్త కోర్సులతో దినదినాభివృద్ధి చెంది ప్రజలందరికీ అందుబాటులో ఉండాలని ఆకాంక్షిస్తున్నాను. ఈ ఆశయ సాధనకు సహకరిస్తున్న, సహకరించిన దూర విద్యా కేంద్రం డైరెక్టర్లకు, సంపాదకులకు, రచయితలకు, అకడమిక్ కో–ఆర్డినేటర్లకు, అకాడమిక్ కౌన్సిలర్లకు మరియు అధ్యాపకేతర సిబ్బందికి నా అభినందనలు.

ప్రొఫెసర్ పి. రాజశేఖర్

ఉపకులపతి

ఆచార్యనాగార్జునవిశ్వవిద్యాలయం.

COURSE– 5 (Semester - IV)

402ECO21- **STATISTICAL METHODSFOR ECONOMICS**

NO. OF CREDITS: 4

LEARNING OUTCOMES FOR THE COURSE

At the end of the course, the student is expected to demonstrate the following cognitive abilities and psychomotor skills.

1. Remembers and states in a systematic way (Knowledge)
   a. the definitions, terms and their meaning relating to statistical methods
   b. various formulae used to measure central tendency, correlation regression and Indices

2. Explains (understanding)
   a. Importance of statistics and its applications
   b. The method of classification of primary data
   c. Uses of Correlation and Regression analysis, time series and index numbers in economic analysis

3. Analyses and solves usinggiven data and information (analysis and evaluation)
   a. different kinds of statistical problems using various principles and formulae relating to central tendency, correlation, regression, time series and indices
   b. to interpret data and suggest solutions to economic problems

4. Draws critical diagrams and graphs.
   a. Histogram, Frequency Polygon and Frequency Curve

b. More than cumulative and less than cumulative frequency curves (Ogive)
   c. Different types of Bar diagrams
   d. Pie Diagram and its uses in economic analysis

Module – 1: Nature and Definition of Statistics

Introduction to Statistics – Definition, scope, importance and limitations of Statistics – Primary and Secondary data- Census and Sampling techniques and their merits and demerits

Module – 2:Diagrammatic Analysis

Collection of data - Schedule and questionnaire – Frequency distribution – Tabulation – diagram and graphic presentation of data – Histogram, Frequency Polygon, Cumulative Frequency Curves - Bar Diagrams and Pie Diagram

Module – 3:Measures of Central Tendency and Dispersion

Measures of Central Tendency and Dispersion - Types of averages- Arithmetic Mean, Geometric Mean, Harmonic Mean – Median – Mode – Dispersion - Range, Quartile Deviation, Mean Deviation, Standard Deviation- Coefficient of Variation.

Module – 4:Correlation and Regression

Correlation and Regression - Meaning, Definition and uses of Correlation- Types of Correlation- Karl Pearson's Correlation coefficient - Spearman's Rank Correlation- Regression Equations - utility of regression analysis

Module – 5: Time Series and Index Numbers

Time Series and Index Numbers: Definition and components of Time Series – Measurement of Time Series – Moving Average and the Least Squares Method – Index Numbers - Concepts of Price and Quantity Relatives – Laspeyer's, Paasche's and Fisher's Ideal Index Numbers – Uses and Limitations of Index Numbers.

Reference Books:

1. B. R. Bhat, T. Srivenkataramana and K.S. MadhavaRao (1996): ***Statistics: A Beginner's Text***, Vol. I, New Age International (P) Ltd.
2. Goon A.M, Gupta M.K., Das Gupta B. (1991), ***Fundamentals of Statistics,*** Vol. I, World Press, Calcutta.
3. M. R. Spiegel (1989): ***Schaum's Outline of Theory and Problems in Statistics,***Schaum's Outline Series.
4. F. E. Croxton, D. J. Cowden and S. Kelin S (1973), ***Applied General Statistics,*** Prentice Hall of India. 2.
5. S.P. Gupta, ***Statistical Methods*** , S. Chand & Co, 1985
6. S. C. Guptha, ***Fundamentals of Statistics***, Himalaya Publishing House, Hyderabad.
7. Digambar Patri and D. N. Patri, ***Statistical Methods for Economics,*** Kalyani Publishers, Ludhiana, 2017.
8. Telugu Akademy Book, ParimanathmakaPaddathulu (For B.A.).

Recommended Co-curricular Activities:

1. Assignments of the application of various statistical methods
2. Student Seminar on themes requiring usage of tables, diagrams, statistical analysis and interpretation
3. Group project work for collection of data on locally relevant economic problems
4. Market survey on demand, supply, sales, prices of different kinds of projects like food items, FMCG, other consumable durables etc., etc., and Statistical Analysis- Mini Project and also income elasticity of demand for such products

MODEL QUESTION PAPER (402ECO21)

B. A. Degree Examination

Second Year – Fourth Semester

Part – II : Economics

Paper – V : STATISTICAL METHODS FOR ECONOMICS

Time : Three hours **Maximum Marks : 70**

Section – A

Answer any FIVE of the following questions. (5 x 4 = 20 Marks)

1) Secondary data.
ద్వితీయ దత్తాంశం.

2) Census method.
జనాభా పద్ధతి.

3) Histogram.
సోపానపటము.

4) A.M. = 25, Median = 24, Find mode value.
అంకమధ్యమము = 25, మధ్యగతము = 24 ; బహుళకము విలువ కనుగొనుము.

5) Regression.
ప్రతిగమనము.

6) Rank correlation.
కోటి సహసంబంధము.

7) Range merits and demerits.
వ్యాప్తి లాభ నష్టములు.

8) Uses of Index numbers.
సూచీ సంఖ్యల వలన కలిగే ప్రయోజనాలు.

Section – B

Answer the following questions. (5 x 10 = 50 Marks)

9) (a) Define statistics and Explain scope and importance of statistics.
గణాంక శాస్త్రమును నిర్వచించి, దాని పరిధి, ప్రాముఖ్యతను వివరించుము.

Or

(b) Briefly explain various methods of collecting primary data.

ప్రాథమిక దత్తాంశంను సేకరించు వివిధ పద్ధతులను గూర్చి వివరింపుము. .

10) (a) What are the qualities of a good questionnaire?

మంచి ప్రశ్నావళికి ఉండవలసిన లక్షణములు ఏమిటి?

Or

(b) Find A. M. and median.

ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు అంకమధ్యమమును , మధ్యగతమును కనుగొనుము.

C.I. :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
F :	3	6	9	10	6	2

11) (a) Write about Quartile deviation and mean deviation.

చతుర్థాంశ విచలనము మరియు మాధ్యమిక విచలనము గూర్చి వివరింపుము.

Or

(b) Find standard deviation from the following data.

ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు విచలనము కనుగొనుము.

C.I. :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
F :	6	5	10	12	8	4

12) (a) Explain the various types of correlations with suitable examples.

సరైన ఉదాహరణలతో సహసంబంధము యొక్క రకములను వివరింపుము.

Or

(b) Distinguish between correlation and Regression.

సహసంబంధమునకు ప్రతిగమనమునకు తేడాలను వ్రాయుము.

13) (a) Explain the uses of Time series.

కాలశ్రేణుల వలన కలిగే ప్రయోజనములు వివరింపుము.

Or

(b) What is an index number? Define different types of index numbers.

సూచీ సంఖ్యలు అంటే ఏమిటి? వాటి నందలి వివిధ రకములను పేర్కొనుము.

★★★★★

విషయసూచిక

పాఠం - 1

గణాంక శాస్త్ర నిర్వచనాలు, పరిధి

పాఠ్యాంశ క్రమం

1.0 లక్ష్యాలు

ఈ విభాగంలో ఆర్థిక గణాంక శాస్త్ర నిర్వచనాలు, పరిధి, ప్రాధాన్యతలు వివరించడం జరిగింది. ఈ భాగాన్ని పూర్తిగా చదివేసరికి ఈ క్రింది పాఠ్యాంశాలను అవగాహన చేసుకొనవచ్చు.

* ఆర్థిక గణాంక శాస్త్ర పరిచయం
* గణాంకశాస్త్ర నిర్వచనాలు, పరిధి
* ఆర్థిక గణాంక శాస్త్రానికి ఇతర శాస్త్రాలతో గల సంబంధం
* గణాంకశాస్త్ర పరిమితులు

1.1 విషయ పరిచయం

చాలా కాలము వరకు గణాంక శాస్త్ర ఉపయోగం, ఆ శాస్త్ర అవసరం కేవలం రాజులకు, ప్రభుత్వాలకు, ప్రజా సమస్యలకు సంబంధించిన పరిశీలనకు మాత్రమే పరిమితము అయి వుండేది. కాలక్రమేణా దీని ప్రాధాన్యత పెరుగుతూ వచ్చింది. గణాంక శాస్త్ర ప్రాధాన్యతను క్రీస్తు జననాన్ని పరిశీలిస్తే మనకు తెలుస్తుంది. మేరి మాతా, జోసఫ్‌లు తమను జనాభా సంఖ్యలో నమోదు చేసుకోవడం

కోసం జెరూసలెంకు వచ్చుట ద్వారా క్రీస్తు జన్మించినట్లు మనకు తెలుస్తున్నది. యుద్ధాల లేదా శాంతి సమయములలో తమ తమ రాజ్యాలలో ఆహార ధాన్యాలు, సైన్య సమీకరణ ఏ విధంగా వుండాలో తెలుసుకొనేందుకు రాజులు గణాంకాలపై ఆధారపడేవారు. అయితే కాలక్రమేణా మానవుని దైనందిన వ్యవహారాలలో కూడా ఈ గణాంక శాస్త్రం చోటు చేసుకుంటున్నది.

1.2 గణాంకశాస్త్రార్థం

గణాంక శాస్త్రాన్ని ఆంగ్లంలో Statistics అని పిలుస్తారు. ఈ పదం స్టాటిస్ (Statis) లేదా స్టాటస్ (Status) అనే లాటిన్ పదము నుంచి, స్టాటో (Stato) లేదా స్టాటిస్టా (Statisto) అనే ఇటాలియన్ పదం నుంచి, స్టాటిస్టిక్ (Stastic) అనే జర్మన్ పదం నుంచి ఉద్భవించిందని భావించటం జరుగుతుంది. ఈ పదాలన్నిటి అర్థం 'రాజ్యం' లేదా 'రాష్ట్రం'. రాజులు తమ రాజ్య పరిపాలన కోసం ఈ శాస్త్రాన్ని ఉపయోగించేవారు. ఈ శాస్త్రాన్ని మొట్టమొదట రాజులే అధికంగా ఉపయోగించేవారు కాబట్టి దీనిని రాజుల శాస్త్రముగా కూడా పరిగణించేవారు. కాలక్రమేణా గణాంక శాస్త్రాన్ని లేదా గణాంక పద్ధతులను అన్ని రంగాలలోను శాఖలలోను ఉపయోగిస్తున్నారు.

గణాంక శాస్త్రానికి మూడు మూలాలు వున్నట్లుగా చెప్పవచ్చు. అవి : 1. ప్రభుత్వ రికార్డులు 2. గణిత శాస్త్రం 3. రాజకీయ శాస్త్రం. ఆధునిక కాలములో గణాంక శాస్త్ర అభివృద్ధికి ప్రధానంగా రెండు కారకాలు చెప్పవచ్చు. ఎ. గణాంకాలకు డిమాండు, బి. గణాంకాల సేకరణకు అయ్యే వ్యయం తగ్గడం. ఈ రెంటిని గూర్చి క్లుప్తంగా తెలుసుకుందాం.

ఎ. **గణాంక శాస్త్రానికి డిమాండు పెరగడం :** ఆధునిక కాలములో వర్తక, వాణిజ్య, పారిశ్రామిక, సాంకేతిక, రాజకీయ రంగాలలో జరిగే అనేక రకాల మార్పులు వస్తున్నాయి. వీటిని కొలిచేటందుకు సాధనంగా గణాంక శాస్త్రాన్ని ఉపయోగించటం జరుగుతుంది. అందుచేత గణాంక శాస్త్ర పరిశోధకుల, విశ్లేషకులకు ఆవశ్యకత పెరిగింది. ఫలితంగా గణాంక శాస్త్రం యొక్క డిమాండు కూడా విస్తరించటం జరిగింది.

బి. **గణాంకాల సేకరణకు అయ్యే వ్యయం తగ్గడం :** ఆధునిక కాలములో గణాంకాల సేకరణ వ్యయం తగ్గుతోంది. ప్రతిచయన పద్ధతులను అవలంబించటం, గణన యంత్రాలు, కంప్యూటర్ల వాడుక పెరగడం, గణాంకాల సేకరణ విశ్లేషణ, వివరణలు త్వరితంగా చేసే పద్ధతులు అనే కారణాల వల్ల అతి తక్కువ వ్యయంతో, తక్కువ కాల వ్యవధిలో గణాంక సేకరణ చేసే వీలు అయ్యింది. అందుచేత వివిధ రంగాల్లోని సమస్యల పరిష్కారానికి గణాంక శాస్త్రాన్ని అధికంగా ఉపయోగించటం జరుగుతోంది.

గణాంక శాస్త్రార్థము గమనిస్తే క్రమక్రమంగా మరింత విస్తృతిని పొందింది. రాజ్యాంగ నిర్వహణ కోసమే కాక, ఏ విషయ సంబంధంగా దత్తాంశ సేకరణను నిర్వహించినా, గణాంకశాస్త్ర పరిధిలోకే అది చేరుతుంది.

ఈనాడు గణాంక శాస్త్రము అనే పదము రెండు అర్థాలతో ఉపయోగంలో వుంది. ఏకవచన ప్రయోగంలో దీని అర్థం గణాంక పద్ధతి లేదా పద్ధతుల సముదాయం. బహువచనంగా దీని అర్థము గణాంకాలతో కూడిన సంఖ్యా దత్తాంశము(Numerical data). ఏకవచనంగా ప్రయోగించినప్పుడు స్టాటిస్టిక్స్ అంటే పరిమాణాత్మక దత్తాంశ సేకరణ, వర్గీకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ, వివరణ విపులీకరణ అని అర్థము. గణాంక పద్ధతుల పరిధి చాలా విశాలమైనది. ఇది గణాంకాలను సేకరించి అందరికి సులభంగా బోధపడేటట్టు గణాంకాలను సూక్ష్మీకరిస్తుంది.

బహువచన ప్రయోగంలో స్టాటిస్టిక్స్ అంటే సంఖ్యా దత్తాంశమని అర్థము. సాధారణంగా ఎవరు ఏ విషయాన్ని వర్ణించడానికైనా గణాంకాలను ఉపయోగిస్తారు. ఉదాహరణకు ఆంధ్రప్రదేశ్‌లో 1995వ సంవత్సరంలో 50,000 మోటారు ప్రమాదాలు సంభవించాయనుకొందాము. ఈ సంఖ్యలే గణాంకాలు. ఈ విధంగా గణాంకాలంటే ఒక విషయం మీద సేకరించిన అంకెల వర్ణన.

పైన చెప్పిన ఉదాహరణలో స్టాటిస్టిక్స్ అన్న పదాన్ని బహువచన ప్రయోగంలో ఉపయోగించినాము. కేవలం అంకెలు గణాంకాలు కావు. గణాంకాలు ఏదో ఒక విషయాన్ని వివరించవలె. గణాంకశాస్త్రాన్ని అధ్యయనం చేసేటప్పుడు స్టాటిస్టిక్స్ అనే పదాన్ని రెండు అర్థాలలోను ఉపయోగిస్తాము.

1.3 గణాంకశాస్త్ర నిర్వచనాలు

ప్రతి శాస్త్రానికి ఒక నిర్వచనం అవసరం. అట్లా నిర్వచనం ఇవ్వడం వల్ల ఆ శాస్త్ర సరిహద్దులు స్వభావం, పరిధిని అర్థం చేసుకోవచ్చు. అన్ని శాస్త్రాలకు వలే గణాంక శాస్త్రానికి కూడా గ్రంథకర్తలు వివిధ సమయాలలో అనేక నిర్వచనాలివ్వడం జరిగింది. కొంత మంది ఏకవచన ప్రయోగంలో గణాంక శాస్త్రమంటే "గణాంక పద్ధతుల శాస్త్రంగా'' నిర్వచించగా మరికొంత మంది బహువచన ప్రయోగంలో గణాంక దత్తాంశంగా నిర్వచించారు. దాదాపు వందకు పైగా నిర్వచనాలున్నప్పటికిని వాటిలో కొన్ని ముఖ్య నిర్వచనాలను పరిశీలిద్దాం.

1.3.1 సంఖ్యా దత్తాంశం అర్థంలో నిర్వచనాలు :

ఎ) **ఎ.ఎల్. బౌలీ (Bowley) :** బౌలీ అనే శాస్త్రవేత్త "ఏ విచారణలోనైనా ఒకదానికొకటి పరస్పరం సంబంధం కలిగి వుండునట్లు సంఖ్యాత్మకంగా చెప్పబడిన యదార్థాలే గణాంకాలని'' నిర్వచించడం జరిగింది.

వీరి అభిప్రాయంలో విచారణలో గల అన్ని అంశాలు సంఖ్యాత్మకంగా ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగి ఉండాలి. అన్ని గణాంకాలు సంఖ్యాత్మక విషయాలే. కాని సంఖ్యాత్మక విషయాలన్ని గణాంకాలు కావు. ఈ నిర్వచనం ప్రకారం దత్తాంశాన్ని సేకరించడం, వాస్తవ విషయాలను అంకెలలో చెప్పడం, సంఖ్యాత్మకమైన వాస్తవాలను పరస్పర సంబంధం ఉండేటట్లు చెప్పడం అనే మూడు లక్షణాలను మాత్రమే వెలియజేస్తున్నది. గణాంకశాస్త్రం యొక్క ఇతర లక్షణాలను ఈ నిర్వచనం విస్మరించడం చేత సంపూర్ణమైన నిర్వచనం కాదని భావించడం జరిగింది.

బి) **యూల్ మరియు కెండాల్ (Yule & Kendall) :** వీరి అభిప్రాయంలో "బహు కారణాల వల్ల ప్రభావితం కాబడే పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని గణాంకాలు'' అని అంటారు. ఈ నిర్వచనం ప్రకారం గణాంకాలు పరిమాణాత్మక దత్తాంశాలు. ఇవి బహు కారణాల వల్ల ప్రభావితం అవుతూ ఉంటాయి. ఈ కారణాలు ఒకదానితోనొకటి సంబంధం కల్గి ఉండటంతోపాటు ఒకదానిపై ఒకటి ఆధారపడి ఉంటాయి. అయితే ఈ నిర్వచనం కూడా గణాంక శాస్త్రానికున్న ఇతర లక్షణాలను వెల్లడిచేయనందున సమగ్రమైన నిర్వచనంగా భావించబడలేదు.

సి) **వెబ్‌స్టర్ (Webster) :** వెబ్‌స్టర్ నిర్వచనం ప్రకారం "దేశ ప్రజల స్థితిగతులకు సంబంధించిన వర్గీకృత వాస్తవాలు, ముఖ్యంగా అంకెలలోను, పట్టీలలోను లేదా ఏ ఇతర వర్గీకృత రూపంలోనైనా తెలియజేయడానికి వీలైన వాస్తవాలే గణాంకాలు''.

ఈ నిర్వచనం ప్రకారం దేశ ప్రజల స్థితిగతులను మాత్రమే అధ్యయనం చేయడానికి గణాంకశాస్త్రం పరిమితమవుతుందని, పట్టీలలోను, అంకెలలోను లేదా వర్గీకృతమైన మరో రూపంలో తెలియజేస్తేనే గణాంకాలనబడతాయి. అయితే ఈ నిర్వచనం కూడా పరిపూర్ణమైనదిగా భావించబడుట లేదు.

డి) **హోరేస్ సెక్రిస్ట్ (Horace Secrist) :** గణాంక శాస్త్రానికి హోరేస్ సెక్రిస్ట్ అనే గణాంకశాస్త్రవేత్త ఒక సమగ్ర, సంతృప్తి కరమైన, ఆమోదకరమైన నిర్వచనాన్నిచ్చారు. ఈయన అభిప్రాయంలో "పూర్వ నిర్ధారిత ఉద్దేశం కోసం ఒక క్రమపద్ధతిలో సేకరించినవి, బహుకారణాల వల్ల ప్రభావితం అయ్యేవి. సాధ్యమైనంత యదార్థతను అనుసరించి అంచనా వేయబడి,

సంఖ్యాపూర్వకంగా ప్రస్ఫుటం అవుతాయో అవి ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగి వుండి, పోల్చడానికి అనువుగా వున్నట్టి సగటు సత్యాలను గణాంకాలంటారు'.

ఈ నిర్వచనం ఎంతో సమగ్రమైనది. ఎందుకంటే గణాంక శాస్త్రము అనడానికి ఉండవలసిన లక్షణాలన్నింటిని పేర్కొనడం జరిగింది.

1.3.2 గణాంక పద్ధతుల భావనలో నిర్వచనాలు : ఏకవచన ప్రయోగంలో గణాంకశాస్త్రం అంటే దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ, విశ్లేషణ, వివరణలకు సంబంధించిన గణాంక పద్ధతులని అర్థం. ఈ భావనతోనే కొంత మంది గణాంకశాస్త్రవేత్తలు గణాంకశాస్త్రాన్ని నిర్వచించారు. వాటిని పరిశీలిద్దాం.

ఎ) ఎ.ఎల్. బౌలీ(A.L. Bowely) : "గణాంకశాస్త్రం అంటే అంకెలను సేకరించి లెక్కలు రాసే శాస్త్రం" అని ఒక చోట, మరో సందర్భంలో "గణాంకశాస్త్రం సగటులకు సంబంధించిన శాస్త్రం" అన్నాడు. వాస్తవానికి వ్యక్తులకు, వస్తువులకు సంబంధించిన వివరాలు సేకరించడం గణాంక శాస్త్రం ముఖ్యవిధులలో ఒకటి. పెద్ద పరిమాణంలోని దత్తాంశ లక్షణాలను సులభంగా గ్రహించడానికి వర్గీకరణ, పట్టీకరణ, విశ్లేషణ, వివరణ వంటి ఇతర గణాంక పద్ధతులవసరం అవుతాయి. వీటిని గూర్చి నిర్వచనంలో పేర్కొనలేదు. అంతేగాక దత్తాంశ లక్షణాలను కుదించి చెప్పడానికి 'సగటు' లెక్కించడం అవసరమైనప్పటికీని దత్తాంశంలోని అంశాల విస్తరణ ఏ విధంగా ఉందో సగటు తెలియజేయును. దీనిని తెలుసుకొనుటకు విస్తరణమానాలు అవసరమవుతాయి. రెండు చలనరాశుల మధ్య సంబంధం తెలుసుకోవాలంటే సహసంబంధ గుణకం అవసరం. అందుచేత ఈ నిర్వచనం గణాంకశాస్త్ర పరిధిని పూర్తిగా తెలియజేయనందున సమగ్రమైనదిగా భావించుట లేదు.

బి) క్రాక్స్‌టన్, కౌడెన్ (Croxton & Cowden) : వీరి అభిప్రాయంలో "పరిమాణాత్మక దత్తాంశంను సేకరించడానికి, సమర్పించడానికి, విశ్లేషణ చేయడానికి, విపులీకరణ చేయడానికి ఉపయోగపడే శాస్త్రమే గణాంక శాస్త్రం". ఈ నిర్వచనంలో గణాంక పద్ధతులైన దత్తాంశ సేకరణ. దత్తాంశ సమర్పణ, దత్తాంశ విశ్లేషణ, దత్తాంశ వివరణ వంటి నాల్గు పద్ధతులను పేర్కొనడం చేత ఈ నిర్వచనం సమగ్రమైందని చెప్పవచ్చు.

సి) బోడింగ్‌టన్ (Bodington) : 'అంచనాలకు, సంభావ్యతలకు సంబంధించిన శాస్త్రమే గణాంకశాస్త్రం' అని బోడింగ్‌టన్ నిర్వచించాడు. పెద్ద పరిమాణంలోని దత్తాంశాన్ని సేకరించడంలో గల పరిమితులను అధిగమించడానికి అంచనాలను, సంభావ్యతలను ఉపయోగించుకోవడం జరుగుతుంది. ఉదాహరణ : వ్యాపారస్తులు భూత, వర్తమాన వ్యాపార తీరుతెన్నులను బట్టి భవిష్యత్తును గూర్చి సరియైన అంచనాలతో వ్యాపారం చేస్తాడు. అట్లాగా ప్రయాణికుల రద్దీని దృష్టిలో పెట్టుకొని రైల్వే డిపార్టుమెంటు వారు అదనపు రైళ్ళను ఏర్పాటు చేస్తారు. అయితే ఈ నిర్వచనం అంచనాలకు, సంభావ్యతలకు ప్రాధాన్యతను ఇచ్చి వర్గీకరణ, విశ్లేషణ వంటి ఇతర గణాంక పద్ధతులను గూర్చి తెలియజేయలేదు.

డి) సెలిగ్మన్ (Seligman) : "ఏ విచారణలోనైనా సమస్యను అవగాహన చేసుకొనుటకు సంఖ్యాదత్తాంశాన్ని సేకరించడం, వర్గీకరించడం, సమర్పించడం, తారతమ్యతను పోల్చి, వివరించడానికి సంబంధించిన శాస్త్రీయ పద్ధతులను గూర్చి తెలిపేదే గణాంకశాస్త్రం' ఈ నిర్వచనం సులభంగాను, చిన్నదిగాను, విపులీకరణగాను ఉంది. బృహత్ పరిమాణంలో ఉన్న దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి, దానిని వర్గీకరించడం, పట్టీలు, చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాల రూపంలో సమర్పించడం చేయవలెను. అంతేగాక దత్తాంశ పూర్తి లక్షణాలు తెలుసుకోవడానికి విస్తరణ కొలతలు, సగటు కొలతలు, వైషమ్య కొలతలు మొదలైన విశ్లేషణా పద్ధతులనుపయోగించాలి. ఆ తర్వాత విపులీకరణ ప్రాతిపదికగా విధానాలను రూపొందించాలి. ఈ గణాంక పద్ధతులన్నింటి ప్రాముఖ్యతను తెలియజేయడం వల్ల ఈ నిర్వచనం ఎంతో సమగ్రమైందిగా భావించబడుచున్నది.

1.4 గణాంకశాస్త్ర లక్షణాలు

సెక్రిస్ట్ నిర్వచనాన్ని జాగ్రత్తగా పరిశీలిస్తే గణాంకశాస్త్ర లక్షణాలను సమగ్రంగా తెలుసుకోవచ్చు. అవి :

1) **గణాంకాలు సమిష్టి విషయాలను పరిశీలిస్తుంది :** గణాంక శాస్త్రం ఎప్పుడు సాంఖ్యాపరమైన, సమిష్టి విషయాలను లేదా సగటు సత్యాలను గూర్చి పరిశీలిస్తుంది. వ్యక్తిగతమైన లేదా ఒకే అంశానికి సంబంధించిన విషయాలను, నిజాలను వివరించదు.

   ఉదా : ఒక వ్యక్తి ఆదాయము, ఒక సంస్థ లాభము మొదలైనవి పరిగణనలోనికి తీసుకోదు. కాని కొందరు వ్యక్తుల సగటు ఆదాయము, ఒక సంస్థ సగటు లాభము మొదలైనవి మాత్రమే పరిగణనలోనికి తీసుకుంటుంది. అవే గణాంకాలు.

2) **గణాంకాలు అంకెలలో చెప్పడానికి వీలుగా వుండాలి :** సేకరించిన సమాచారాన్ని అంకెల రూపములో చెప్పడానికి ఉపక్రమిస్తేనే వాటిని గణాంకాలు అంటారు. గుణాత్మకంగా ఉన్నప్పుడు వాటిని గణాంకాలు అనరు. గుణాత్మకమైన అంశాలను అనగా అందచందాలు, మంచి చెడ్డలను గూర్చి గణాంకశాస్త్రం వివరించలేదు. పరిమాణాత్మక విలువలను పోల్చిచెప్పినప్పుడే అవి గణాంకాలు అవుతాయి.

   ఉదా : భారతదేశములో జనాభా అధికము అనిగాని, ఈ నెలలో ఎండలు ఎక్కువ అని చెప్పినప్పుడుగాని అవి గణాంకాలు కానేరవు.

3) **గణాంకాలు అనేక కారణాల వల్ల ప్రభావితం అవుతాయి.**

   ఏ విషయాలను గణాంకాలుగా పరిగణిస్తామో అవి వివిధ కారణాల చేత ప్రభావితం కావాలి. ప్రతి కారణాన్ని విడగొట్టి దాని ప్రభావం ఎంత మాత్రము ప్రతి అంశము మీద వుంటుందో చెప్పటానికి వీలుపడదు. అందువల్ల అన్ని కారణాల ప్రభావాన్ని సమిష్టిగా తీసుకోవాలి. గణాంకాలు మార్పులకు అనేక అంశాలు కారణం.

4) **గణాంకాలు ఒక పద్ధతి ప్రకారము సేకరించినవి ఏర్పాటు చేసి విశ్లేషించాలి.**

   విషయ సేకరణను దత్తాంశ సేకరణ అంటారు. ఈ దత్తాంశాన్ని సేకరించడానికి ఒక నియమబద్ధమైన ప్రణాళికను తయారు చేసుకుని దానిననుసరించి దత్తాంశ సేకరణ చేయాలి. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని, తగిన విధంగా విశ్లేషించి మలిచినట్లైతే అవి గణాంకాలు అవుతాయి. హడావుడిగాను, అనాలోచితంగాను విషయ సేకరణ జరిగితే వాటి ద్వారా సరియైన నిర్ణయాలు రాక కొన్ని సమయాలలో అపాయకర పరిస్థితులకు దారి తీస్తుంది.

5) **గణాంకాలను పూర్వ నిర్ధారిత లక్ష్యంతో సేకరించి వుండాలి.**

   గణాంకాల సేకరణ ఏ ప్రయోజనం కొరకు, ఏ ఉద్దేశ్యంతో చేస్తున్నారో ముందుగానే నిర్ణయించుకోవాలి. లేనప్పుడు అటువంటి దత్తాంశ సేకరణ నిరుపయోగమవుతుంది. ముందుగా నిర్ణయించిన లక్ష్యాల కోసం దత్తాంశ సేకరణ ఎలా ఉండాలి, దాని తరువాత ఏ విషయాల కోసం ఈ విషయాన్ని ఎక్కడ ఎప్పుడు సేకరించాలో కూడా తెలిసి వుండాలి.

6) **గణాంకాలను సాధ్యమైనంత వరకు యదార్థతననుసరించి సేకరించాలి.**

   విషయ యదార్థత పరిమాణం గణన చేసే సమాచారంపై ఆధారపడి వుంటుంది. అన్ని విచారణల్లోనూ ఒకే విధమైన యదార్థత వుండనవసరం లేదు. ఉదాహరణకు బొగ్గు తూకం యదార్థత కిలోలలో వుండగా, బంగారం

తూకం యదార్థత మిల్లీ గ్రాములలో వుంటుంది. ఏదైనా ఒక విచారణకు సంబంధించిన గణాంకాలను సేకరించడానికి రెండు పద్ధతులను అవలంబిస్తాము. 1. పూర్తి లెక్కింపు చెయ్యడం, 2. ఊహించి అంచనా కట్టడం.

ప్రతి అంశాన్ని లెక్కలోనికి తీసుకుని దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తే దానిని లెక్కింపు పద్ధతి అంటారు. ఆ విధంగా కాకుండా ఒక సంఘటనకు సంబంధించిన విలువలను గూర్చి ఊహించడాన్ని అంచనా పద్ధతి అంటారు. మొదటి పద్ధతిలో యదార్థత అధికంగా వుంటుంది. అయితే పరిశోధన స్థాయిని బట్టి స్వభావాన్ని బట్టి నిర్ణయించడం జరుగుతుంది. కొన్ని సమయాలలో పూర్తి లెక్కింపు సాధ్యపడదు. అట్టి సమయాలలో యదార్థతకు దగ్గరగా వుండే అంచనాలు వేయడం జరుగుతుంది.

ఉదా : ఒక సభకు విచ్చేసిన జన సమూహాన్ని లెక్కించడం సాధ్యమయ్యే విషయం కాదు. అట్టి పరిస్థితులలో ఆ సమూహాన్ని అంచనా వేయడమే సరియైన పద్ధతి.

7) గణాంకాలు ఒకదానికొకటి సంబంధం కలిగి పోల్చేందుకు అనుగుణంగా వుండాలి.

గణాంకాలు రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా వుండే విషయాలను పోల్చడానికి వీలుగా వుండాలి. ఇవి కాలానుగుణంగా గాని ప్రాంతీయతను అనుసరించిగాని ఉన్నట్లైతే సులువుగా పోల్చవచ్చు. వివిధ కాలాలలో ఏర్పడే విషయాలను, లేదా ఒకే సంఘటన వివిధ ప్రాంతాలలో సంభవించినట్లైయితే వాటిని పోల్చవచ్చు.

ఉదా : ఒక సంవత్సరములోని వివిధ కాలలలో వుండే ఉష్ణోగ్రత.

పై లక్షణాలు లేని ఏ దత్తాంశాన్ని గణాంకాలుగా చెప్పలేము. అందువలనే గణాంకాలన్ని సంఖ్యా వాస్తవాలేగాని సంఖ్యా వాస్తవాలన్నీ గణాంకాలు కాజాలవు.

1.4.1 గణాంక పద్ధతులు (Statistical Methods) : సమస్యకు సంబంధించిన సంఖ్యా దత్తాంశాన్ని సేకరించడం, వర్గీకరించడం, సమర్పించి, విశ్లేషించడం, వివరణ చేసే పద్ధతులనే గణాంక పద్ధతులంటారు. వాటిని క్లుప్తంగా పరిశీలిద్దాం.

1. **దత్తాంశ సేకరణ :** దత్తాంశాన్ని సేకరించడం గణాంక విచారణలో ప్రథమ దశ. దీనికిగాను ముందుగానే గణాంక శోధకుడు పరిశోధనా ఉద్దేశాన్ని, దత్తాంశ వనరులను, సేకరణ పద్ధతులను అవసరమైన యదార్థతను గూర్చి ఒక ప్రణాళికను సిద్ధం చేసుకున్న తరువాత ఒక పద్ధతి ప్రకారం దత్తాంశ సేకరణ జరపవలెను. దత్తాంశ సేకరణలో గణాంక శోధకుడు అత్యంత జాగ్రత్త వహించవలె. దత్తాంశ సేకరణ లోపభూయిష్టంగా ఉంటే ఫలితాలు విశ్వసనీయంగా ఉండవు. అనవసరమైన వ్యయప్రయాసలకు లోనుకాకుండా కావలసిన దత్తాంశాన్ని ముద్రిత మూలాల నుంచి గాని అముద్రిత మూలాల నుంచి గాని సేకరించవచ్చు.

2. **వ్యవస్థీకరణ :** ముద్రిత మూలాల నుండి లభించే దత్తాంశం రెడీమేడ్ వస్తువులాంటిది. సాధారణంగా ఈ దత్తాంశం వ్యవస్థీకరించబడి ఉంటుంది. కాని సర్వే ద్వారా సేకరించబడే దత్తాంశం సాధారణంగా వ్యవస్థీకరించబడి ఉండదు. అందుచేత అట్టి దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయడం జరుగుతుంది. ఈ సందర్భంలో అవసరమైన విషయాలను తీసుకోవడం, అవసరం లేని విషయాలను వదలివేయవచ్చు. ఆ తర్వాత కొన్ని సాధారణ లక్షణాలను దృష్టిలో నుంచుకొని దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించవలెను. వర్గీకృత విషయాలను స్పష్టపరుచుట, వాటిని పంక్తులలోను, దొంతులలోను అమర్చవలెను.

3. **సమర్పణ :** వర్గీకరించబడిన దత్తాంశాన్ని తగురీతిలో సమర్పించవలె. దత్తాంశ సమర్పణకు పట్టీలు, చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాలు వంటి వాటిని ఉపయోగిస్తారు. చిత్రపటాలు రేఖాచిత్రాలు ఆకర్షణీయంగా ఉండి చూపరులకు కనువిందు చేస్తాయి. చదువరులు దత్తాంశ మూల విషయాన్ని సులభంగా గ్రహించగలరు.

4. **విశ్లేషణ :** వివిధ చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని కల్గించడమే విశ్లేషణ ఉద్దేశం. దత్తాంశ విశ్లేషణ చేయుటకుగాను సగటు కొలతలను, విస్తరణ కొలతలను, వైషమ్యపు కొలతలను సహసంబంధం, వంటి వివిధ గణాంక ప్రక్రియలను, పద్ధతులను ఉపయోగిస్తారు.

5. **వివరణ :** విశ్లేషించబడిన దత్తాంశాన్ని విపులీకరించి చెప్పడం, నిష్పక్షపాతంగా, హేతుబద్ధంగా నిర్ణయాలు తీసుకోవడం, వివరణగా చెప్పడం జరుగుతుంది. అయితే దత్తాంశాన్ని వివరించి చెప్పడం అంత సులభమైంది కాదు. గణాంక శోధకునికి అత్యంత నైపుణ్యం, అనుభవం అవసరం. వివరణ సరిగా లేకపోతే తప్పుడు నిర్ణయాలు తీసుకోవడమేగాక గణాంక శోధన ప్రధాన ఉద్దేశాన్ని భంగపరచినట్లు కాగలదు.

పై వివరణ కాబట్టి తెలిసేదేమిటంటే కేవలం దత్తాంశ సేకరణ గాని, గణాంక పద్ధతులుగాని, నిరూపయోగం. సముచిత నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి సేకరించబడిన దత్తాంశాన్ని తగిన విధంగా వర్గీకరించి, విశ్లేషించవలసి వుంటుంది. కాబట్టి గణాంక దత్తాంశం, గణాంక పద్ధతుల వలన విడివిడిగా ఎట్టి ప్రయోజనం లేదు. ఈ రెండూ ఒకదానికొకటి పూరకాలు.

1.5 గణాంకశాస్త్ర విధులు

పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని విశ్లేషణ చేయడం ద్వారా అశాస్త్రీయ, అపరిపూర్ణ విధానాలకు స్వస్తి పలికి శాస్త్రీయమైన నిర్ణయాలను తీసుకొనడానికి గణాంకశాస్త్రము సహాయపడుతుంది. అందువల్లనే ఈ శాస్త్ర ప్రాముఖ్యత క్రమక్రమంగా పెరుగుతోంది. గణాంక శాస్త్రం కొన్ని ముఖ్యమైన విధులు నిర్వహించటం చేస్తోంది. ఈ విధులను బట్టి ఈ శాస్త్ర ప్రాధాన్యత స్పష్టమవుతుంది. ఈ శాస్త్ర విధులను వివరించటం జరిగింది.

1) **ఒక నిశ్చిత రూపములో విషయాలను సమర్పించటం :** అస్పష్టముగా, సంఖ్యాపూర్వకంగా వున్న దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తమైన నిశ్చితమైన రూపములో సమర్పించటమే గణాంక శాస్త్ర ప్రధాన విధి. ఈ విధంగా సమర్పణ చేయటం వల్ల చదివే వారికి ఎటువంటి అసౌకర్యం వుండదు. సులువుగా విషయాలను అర్థం చేసుకొనడానికి అవకాశం వుంటుంది.

ఉదా : మన దేశ జనాభా 1961లో 43 కోట్లని, 1991లో 87 కోట్లని చెబితే జనాభా పెరుగుదల అధికంగా వున్నదని పాఠకులకు అవగాహన ఏర్పడుతుంది.

2) **జటిలంగా వున్న దత్తాంశాన్ని సూక్ష్మీకరించడం :** అంకెల రూపములో జటిలంగా వున్న దత్తాంశాన్ని ఖచ్చితంగా లేదా స్పష్టంగా పొందు పరచడమే కాకుండా సూక్ష్మీకరించి చిన్న అంకెలుగా కాని, శాతాలుగా కాని తెలియజెప్పడం అవసరం. జటిలంగా వున్న దత్తాంశాన్ని సూక్ష్మీకరణ ద్వారా అసంగ్దిత తొలగించి సులువుగా అవగాహన అయ్యే విధంగా రూపొందించటం మరో గణాంకశాస్త్ర విధి. దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తపరచడానికి సగటులు నిష్పత్తులు, విచారణా గుణకాలు మొదలగు వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

3) **అంచనా వేయటంలో తోడ్పడుతుంది :** గణాంక శాస్త్రం గడిచిన కాలానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడమే కాకుండా భవిష్యత్తులో ఆ దత్తాంశాన్ని అంచనా వేయటానికి లేదా ఊహించటానికి లేదా జోస్యం చెప్పటానికి సహాయపడుతుంది. వివిధ ప్రణాళికలు అమలు పరచడానికి కావలసిన సహాయ సహకారాలను అందిస్తుంది. ఈ విధంగా భవిష్యత్తును అంచనా వేయటం ఈ శాస్త్ర మరో విధి. భవిష్యత్తు సంఘటనలను అంచనా వేయడానికి కాలశ్రేణులు, ప్రతిగమన విశ్లేషణ, బహిర్వేశం వంటి గణాంక పద్ధతులు చాలా ఉపయోగపడతాయి.

4) **విధాన నిర్ణయాలను రూపకల్పన చేయడానికి వీలుకల్పించడం :** దేశాభివృద్ధికి ప్రభుత్వం చేపట్టే ప్రణాళికలను రూపొందించడానికి వీలు కలిగిస్తుంది. సామాజిక, ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాల్లో విధానాలు ఏ విధంగా వుండాలో, సామాజిక రక్షణ ఏ విధంగా వుండాలో గణాంకశాస్త్రం తెల్పుతుంది. అంతేకాక క్రొత్త విధానాలను రూపొందించడంలోను ఆచరణలో వున్న విధానాల పనితీరును సమీక్షించడంలోను గణాంక పద్ధతులు ఉపయోగపడును.

5) **పోల్చిచూడటానికి అవసరమైన పరిస్థితులను కల్పించటం :** గణాంకశాస్త్రములో పరిమాణాత్మక విషయాలను పోల్చిచూస్తేనేగాని అర్థవంతమైన సమాచారం లభించదు. వివిధ సమాచారాలను పోల్చడానికి అవసరమైన పరికరాలను లేదా పద్ధతులను గణాంకశాస్త్రం సమకూరుస్తుంది. ఆచార్య బౌలే అభిప్రాయం ప్రకారం "వివిధ అంశాల సాపేక్ష ప్రాముఖ్యతను గూర్చి అధ్యయనం చేయడమే గణాంక శాస్త్ర ముఖ్య విధి". దత్తాంశాన్ని పోల్చడానికి గణాంకశాస్త్రంలో సగటులు, శాతాలు, నిష్పత్తులు గుణకాలు చిత్రపటాలు వంటి వాటిని ఉపయోగిస్తారు.

6) **సంఖ్యాత్మకమైన కొలత ఇవ్వడం :** గుణాత్మక అంశాలను కొలవలేము. కొన్ని సందర్భాల్లో వాటిని పరిశీలించవలసి వస్తే ఆ చలాంకము కొలవడానికి తగిన ఉపకరణాలను మరియు పద్ధతులను గణాంక శాస్త్రము సమకూరుస్తుంది. ఈ పద్ధతుల సహాయంతో గుణాత్మక దత్తాంశాన్ని కూడా సంఖ్యామానంతో చెప్పవచ్చు. ఉదా: అందాల పోటీలలో వివిధ అంశాలకు మార్కులను వేయడం, విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులను బట్టి విద్యార్థుల తెలివితేటలను నిర్ణయించడం.

7) **పరికల్పనను తయారుచేసి, పరిరక్షించడంలో సహాయం చేయడం :** పరికల్పనను రూపొందించి పరిశీలించడమే కాకుండా కొత్త సిద్ధాంతాన్ని కనుగొనడానికి కూడా గణాంక పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి. వివిధ విజ్ఞాన సిద్ధాంతాలలోని నిర్దిష్టతను పరిశీలించేందుకు గణాంక పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి.

1.6 గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత

నాడు రాజులశాస్త్రంగాను (Science of Kings), రాజకీయ గణితశాస్త్రం (Political Arithematic)గా పిలవబడ్డ గణాంకశాస్త్రం నేడు సామాన్య మానవశాస్త్రంగా అభివృద్ధి చెందింది. వివిధ రంగాలలో ఉత్పన్నమగుచున్న సమస్యలను పరిష్కరించే శక్తి ఈ శాస్త్రానికి ఉండడం వలన ఈ శాస్త్రం దినదినాభివృద్ధి చెందుచున్నది. గణాంకశాస్త్రంలో దత్తాంశ సేకరణ, విశ్లేషణ వంటి గణాంకపద్ధతులు కాల, ధన వ్యయాలతో కూడినవి. అందుచేత త్వరగా ఫలితాలను రాబట్టుటకు ఆధునిక కాలంలో కంప్యూటర్లనుపయోగిస్తున్నారు. ఈ కారణంగా గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత బాగా పెరిగింది. ప్రపంచంలో వెలుగులోకి వస్తున్న వివిధ శాస్త్రాల అభివృద్ధికి శాస్త్రవేత్తలు గణాంకశాస్త్రాన్ని ఉపయోగించుచున్నారు. వివిధ రంగాలలో గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యతను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

గణాంకశాస్త్రం - వ్యాపార రంగం : ఆధునిక వ్యాపార, పారిశ్రామిక సంస్థలను సమర్ధవంతంగా నిర్వహించడానికి గణాంకాలు ఈ క్రింది విధంగా ఉపయోగపడతాయి.

వ్యాపార స్థానం నిర్ణయించడం : పారిశ్రామికవేత్తలు పరిశ్రమలను ఏర్పాటు చేసే సందర్భంలో అనేక అంశాలపై కీలకమైన నిర్ణయాలు చేయవలసి వుంటుంది. వాటిలో ముఖ్యమైనది పరిశ్రమ స్థల నిర్ణయం. ముడి పదార్థాల లభ్యత, శ్రామికుల లభ్యత, రవాణా సదుపాయాలు, ప్రభుత్వం అందజేసే ప్రోత్సాహాలు వంటి అనేక అంశాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సేకరించి, వ్యవస్థీకరించి, విశ్లేషణ జరిపిన తర్వాత నిర్ణయాలు చేస్తారు. వివిధ అంశాలకు సంబంధించిన గణాంకాల ఆధారంతో చేసిన నిర్ణయాలు సహేతుకంగా ఉండటమేగాక సంస్థ పురోగాభివృద్ధికి తోడ్పడతాయి. ఈ దత్తాంశ వివరాలు తెలియకపోతే సంస్థ స్థాపనకు సంబంధించిన నిర్ణయాలు చేయడం వ్యవస్థాపరులకు అసాధ్యమవుతుంది.

సంస్థ పరిమాణ నిర్ణయంలో తోడ్పాటు : వ్యవస్థాపకుడు తాను ప్రారంభించబోవు సంస్థ పరిమాణం నిర్ణయించడం మరో జటిలమైన సమస్య. ఈ సమస్యను పరిష్కరించడానికి గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడును. గణాంక పద్ధతుల ద్వారా ఊహించిన ఉత్పత్తి స్థాయిలలో సంస్థ యొక్క ఆదాయ, వ్యయాలను విశ్లేషణ చేసి సంస్థకు తగిన పరిమాణం నిర్ణయిస్తారు. సంస్థ పరిమాణం నిర్ణయించడంలో పొరపాట్లు జరిగితే సంస్థ మనుగడకే ముప్పువాటిల్లుతుంది. అందుచేత అభిలషణీయ పరిమాణాన్ని నిర్ణయించుకోవడం వల్ల సంస్థ అనేక రకాల ఆదాలను పొందగల్గుతుంది.

ఉత్పత్తి ప్రణాళిక తయారీలో తోడ్పాటు : సమర్ధవంతమైన వ్యాపార నిర్వహణకు ఉత్పత్తి ప్రణాళిక అద్దం పడుతుంది. ఉత్పత్తి ప్రణాళికలో లోటుపాట్లు జరిగితే సంస్థ వివిధ స్థాయిలలో భారీగా నష్టపోవలసి వుంటుంది. ఖచ్చితమైన అమ్మకాల అంచనాలు ఉత్పత్తి ప్రణాళికను క్రమబద్ధం చేయడానికి దోహదం చేస్తాయి. అంతేగాక ఉత్పత్తి ప్రణాళిక ముడిపదార్థాల నియంత్రణకు కూడా సహాయపడుతుంది. ఉత్పత్తి ప్రణాళికను బట్టి సంస్థలు కావలసిన ముడిపదార్థాలను సరైన ధరలకు సేకరించి నిల్వ ఉంచగల్గుతాయి. ఉత్పత్తి ప్రణాళిక తయారీలోను, సరుకుల నిల్వల నియంత్రణలోను తగిన నిర్ణయాలు చేయడానికి గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

సరైన మార్కెటింగ్ నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి : వస్తువు తయారీ చేయడం ఎంత ముఖ్యమో, ఆ వస్తువుకు తగిన మార్కెట్ కలుగజేయడం కూడా అంతే ముఖ్యం. వస్తువులు తయారు చేయబోవు ముందు వ్యవస్థాపకులు మార్కెట్ పరిశోధన చేసి డిమాండ్‌ను అంచనా వేయవలసి వుంటుంది. వినియోగదార్ల అభిప్రాయాలను తెలుసుకోవడానికి వినియోగదార్లు సర్వే చేయవలసి వుంటుంది. వ్యాపారచక్రాల కారణంగా డిమాండులో వచ్చే మార్పులను తెలుసుకొనడానికి కాలశ్రేణుల విశ్లేషణను విశేషంగా వినియోగిస్తున్నారు. తమ వస్తువుకు మార్కెట్ మందగించినప్పుడు వినియోగదార్లకు బహుమతులివ్వడం వంటి ప్రోత్సాహకాలు ఇవ్వడం వల్ల వాటి ప్రభావం ఎట్లా ఉంటుందో గణాంక పద్ధతుల ద్వారా విశ్లేషించవచ్చు. సంస్థ యొక్క భవిష్యత్ ఆర్థిక పరిస్థితులను అంచనా వేయడానికి ప్రతిగమన, బహిర్నివేశ (Regression and Extrapolation) పద్ధతులు ఎంతో అమూల్యమైనవి.

నాణ్యతా నియంత్రణలో తోడ్పాటు : వస్తువుల నాణ్యతను కాపాడుకోవలసిన బాధ్యత ఉత్పత్తిదార్లపై ఉంటుంది. ఆధునిక వ్యాపార ప్రపంచంలో సంస్థల మధ్య ఉన్న పోటీని తట్టుకొని నిలబడాలంటే అత్యంత నాణ్యత గల వస్తువులను సరసమైన ధరలకు వినియోగదార్లకు అందించవలసి వుంటుంది. అందుచేత సంస్థలు గణాంక నాణ్యత నియంత్రణా విభాగాలను (Statistical Quality Control) ఏర్పరచి ఉత్పత్తుల గుణాన్ని నియంత్రించడం ద్వారా వ్యవస్థాపకులు నాణ్యమైన వస్తువులను, సేవలను సముచితమైన ధరలకు వినియోగదార్లకు అందించడానికి ప్రయత్నిస్తున్నారు.

సిబ్బంది పాలనలో తోడ్పాటు : వ్యాపార సంస్థలకు ఒక ఉద్యోగి ఎంతవరకు ఉపయోగపడతాడనేది అతని పనిచేసే సామర్థ్యాన్ని బట్టి, పని పట్ల అతని ఆసక్తి ఉండేదాన్ని బట్టి వుంటుంది. ఈ విషయాలను పరీక్షించడంలో గణాంక పద్ధతులు బాగా ఉపకరిస్తాయి. ఉద్యోగుల మానసిక ప్రవృత్తులను, పనితీరును అధ్యయనం చేయడానికి గణాంక పద్ధతుల సహాయం తీసుకుంటున్నారు. అసమర్థులను తీసివేయడం, ప్రామాణిక ఉత్పత్తి స్థాయిని వేరుకోలేకపోవుటకు గల కారణాలను అన్వేషించడం, నివారణ చర్యలు తీసుకోవడానికి సమర్ధవంతంగా పనిచేసే వారికి ప్రోత్సాహకాలు ఇవ్వడానికి సంబంధించిన నిర్ణయాలను గణాంక పద్ధతుల ద్వారా చేయవీలవుతుంది.

ఆడిటింగ్‌లో సహాయం : వ్యాపార సంస్థల ఆర్థిక పరిస్థితులను తెలుసుకోడానికి లాభనష్టాల ఖాతా, ఆస్తి, అప్పుల పట్టికను తయారుచేస్తారు. అంశాల స్వభావాన్ని బట్టి వివిధ ఖర్చులను, ఆదాయాలను విభజించి ఒక క్రమపద్ధతిలో అమరుస్తారు. సంస్థలను లాభసాటిగా నిర్వహించుటకు ఆడిటర్లు గతంలోని రికార్డులలో గల సమాచారాన్ని సేకరించి నివేదిక తయారుచేసి సిఫార్సు చేస్తారు. అంతేగాక సంస్థలు తయారుచేసిన అకౌంటింగ్ దత్తంశపు విశ్వాసాన్ని కాపాడుటకు ఆడిట్ నిర్వహించడం జరుగుతుంది. ఈ కార్యక్రమాలన్నీ గణాంకాల సహాయంతోనే నిర్వహించబడతాయి.

శాస్త్ర పరిశోధనలో గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత : నేటి ఆధునికయుగంలో అనేక శాస్త్రాలలో పరిశోధనలు నిర్విరామంగా జరుగుచున్నాయి. సరైన పరిశోధనా ఫలితాలు సాధించడానికి గణాంక పద్ధతుల సహాయం తప్పనిసరి అవుతుంది. వ్యవసాయ, వైద్యం, జీవశాస్త్రం, భౌతిక, రసాయనిక, ఖగోళ, మానసిక, సాంఘిక శాస్త్రాలలో సైతం పరిశోధనలు జరిపే వారికి గణాంకశాస్త్రం ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది.

గణాంకశాస్త్రం - అర్థశాస్త్రం : గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత అర్థశాస్త్రంలో ఎక్కువగా వుంది. ఆర్థిక సమస్యలను అధ్యయనం చేసి పరిష్కార మార్గాలు సూచించడానికి గణాంక పద్ధతులు ఎంతగానో ఉపయోగపడుచున్నాయి. జాతీయాదాయం, తలసరి ఆదాయాలను అంచనా వేయడానికి, ఆర్థిక సిద్ధాంతాలను రూపొందించడానికి గణాంకాలు అవసరం ఎంతో ఉంది. అందుచేతనే అర్థశాస్త్రానికి గణాంకాలు పునాది వంటివని చెప్పవచ్చు. ఆచార్య మార్షల్ 'గణాంకాలు గడ్డిపోచల వంటివి. వాటిని ఆధారంగా చేసుకొని అర్థశాస్త్రవేత్త తనకు ఉపయోగపడే "ఆర్థిక సూత్రాలు" అనే ఇటుకలను తయారు చేస్తాడని' పేర్కొన్నాడు. ఈయన దృష్టిలో గణాంకాలు గడ్డిపోచల వలే ఉన్నను, అవి ఆర్థిక సిద్ధాంతాల నిర్మాణానికి ఎంతగానో దోహదపడతాయన్నమాట.

ప్రణాళికల తయారీ, అమలులోగల గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత : ఇది ప్రణాళికాయుగం. ప్రపంచంలోని చాలా దేశాలలో ప్రణాళికలు జరిపి తక్కువ కాలంలోనే ప్రజల జీవన ప్రమాణాన్ని పెంచడానికి ప్రయత్నాలు జరుగుతున్నాయి. ప్రణాళికలు సక్రమంగా రూపొందించడానికి గణాంకాలు ఎంతో అవసరం. దేశంలోని సహజవనరులను, మానవవనరులను, ద్రవ్య వనరులను అంచనా వేయడానికి, వివిధ రంగాల ప్రాధాన్యాతలను నిర్ణయించి, ఆయా రంగాలకు కేటాయింపులు చేయడానికి గణాంకాలు తోడ్పడతాయి. అంతేగాక ప్రణాళిక అమలు జరిపిన తర్వాత ప్రణాలికా ఫలితాలను సమీక్షించడానికి గణాంక పద్ధతులను ఉపయోగించుట తప్పనిసరి.

బ్యాంకర్లకు, స్టాక్‌బ్రోకర్లకు గణాంకాల ఉపయోగం : ఆర్థిక వ్యవస్థలో ఏర్పడే ఒడుదుడుకులను వ్యాపారచక్రాలంటారు. బ్యాంకరు వ్యాపారచక్రాలను గణాంక పద్ధతుల ద్వారా పరిశీలించి విజృంభణ, మాంధ్యాలను ఊహించి, దానికనుగుణంగా ద్రవ్యస్థాయి నిర్ణయిస్తాడు. బ్యాంకులు ఎప్పుడు ద్రవ్యత్వత (liquidity)ని కల్గి ఉండాలి. ఖాతాదారు అడిగిన వెంటనే నగదు చెల్లించే శక్తిని బ్యాంకు కల్గిఉండటాన్నే ద్రవ్యత్వత అంటారు. ద్రవ్యత్వత లేకపోతే బ్యాంకు ప్రతిష్టను కోల్పోతుంది. అట్లాని అవసరాన్ని మించి నగదు ఉంచుకుంటే బ్యాంకు నష్టపోతుంది. కాబట్టి అభిలషణీయమైన స్థాయిలో నగదు నిల్వలు ఉంచుకోవడానికి గణాంకశాస్త్రం ఉపయోగపడుతుంది. బ్రోకర్లకు, స్పెక్యులేటర్లకు, పెట్టుబడిదార్లకు కూడా గణాంకాలు ఆయువుపట్టు. వివిధ కంపెనీల వాటాల ధరలు ఎట్లా ఉంటుందో గణాంకాల ద్వారా అధ్యయనం చేసి వాటాలలో పెట్టుబడులను పెడతారు.

ప్రభుత్వ నిర్వహణలో గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యత : గణాంకశాస్త్రం వాస్తవంగా ప్రభుత్వ, లేదా రాజ్య పరిపాలనా అవసరాల నుండి ఏర్పడిందని చెప్పవచ్చు. దేశ స్థితిగతులను, ప్రజాసమస్యలను తెలుసుకొని వాటికి పరిష్కారమార్గాలు కనుగొనడంలో ప్రభుత్వాలకు గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడుచున్నాయి. అందుచేతనే ప్రతి ప్రభుత్వ శాఖలో కూడా తప్పనిసరిగా గణాంకా విభాగాన్ని ఏర్పాటు చేయడం జరిగింది. పన్నుల విధానాలు రూపొందించడానికి, వివిధ సంక్షేమ కార్యకలాపాలు అమలుపరచడానికి గణాంకాలు ఎంతో అమూల్యమైనవి. శాంతిభద్రతలను సమీక్షించడానికి నేరాలు, ప్రమాదాలకు సంబంధించిన గణాంకాలు సేకరిస్తారు. ప్రభుత్వం రూపొందించిన వివిధ సాంఘిక, ఆర్థిక పథకాల జయాపజయాలను అధ్యయనం చేయడం గణాంకశాస్త్రం ద్వారానే జరుగుతుంది. అందుచేతనే "సక్రమ రాజ్యపాలనకు గణాంకాలు పునదివంటివని" చెప్పవచ్చు.

ఇతర రంగాలలో గణాంకశాస్త్ర ఉపయోగం : పైన వివరించిన రంగాలలోనే కాకుండా రవాణాసంస్థలు, భీమా సంస్థల సామార్థ్యాలను నిర్ణయించడానికి కూడా గణాంకాలు ఉపయోగపడతాయి. ఉదాహరణకు ఆర్టీసి సంస్థ వారు ప్రతి బస్సుకు ఒక గణాంక నివేదికను తయారుచేస్తారు. దీనితో సంస్థలో ఆదాయ, వ్యయాలను తెలియజేస్తారు. ఈ వివరాలను బట్టి లాభసాటి కాని రూట్లలో బస్సులు తగ్గించడం, లేదా నిలుపుదల చేయడం చేస్తారు. అట్లాగే భీమా కంపెనీలు వివిధ వయో వర్గాల మరణాల శాతాన్ని అంచనా వేయడం ద్వారా వివిధ ప్రమేయాలను ఆయా పాలసీలపై నిర్ణయించడం జరుగుతుంది. ఈ విధంగా ఆయా సందర్భాలలో రవాణా, భీమాసంస్థలు గణాంకాలను ఉపయోగించి ప్రయోజనం పొందుచున్నారు.

1.7 గణాంకశాస్త్ర పరిమితులు

గణాంకశాస్త్రం వివిధ శాస్త్రాలతో సంబంధం కలిగి వుంది. ఈ శాస్త్రానికి అనేక ఉపయోగములు వున్నప్పటికీ కొన్ని పరిమితులు కూడా వున్నాయి. అవి :

1) గణాంకశాస్త్రం సమిష్టి విషయాలనే తప్ప వ్యక్తిగత విషయాలను గూర్చి పరిగణించదు మరియు వివరించదు. దీని ఉపయోగము సామూహిక విషయాలు లేదా సమస్యలకు మాత్రమే పరిమితమై వుంటుంది.

2) గణాంకాలు లేదా గణాంక పద్ధతులు ఫలితాలు కావు. ఇవి ఫలితాలను సాధించటానికి ఉపయోగపడే సాధనాలు మాత్రమే. సమస్యలను అధ్యయనం చేసి దాని ద్వారా విషయాలను రుజువు పరచడానికి గణాంకాలు ఉపయోగపడతాయి.

3) గణాంకాలను దుర్వినియోగ పరచటానికి అవకాశం వుంది. అసంపూర్తిగాను, పక్షపాత నిర్ణయాలతోను, అవగాహన లోపంతో గణాంకాలను గణకుడు ఉపయోగిస్తే, ఈ శాస్త్రం దుర్వినియోగమవుతుంది. దీన్ని దృష్టిలో వుంచుకొనే W.I. King అనే శాస్త్రవేత్త "గణాంకాలు మట్టి ముద్ద వంటివి. వాటినుపయోగించి దైవాన్నిగాని, దెయ్యాన్ని గాని సృష్టించవచ్చు" వ్యాఖ్యను చేశాడు. కావున గణాంకాలు సక్రమంగా ఉపయోగించకపోతే ప్రమాదకర ఫలితాలు వస్తాయి. ప్రఖ్యాత గణాంకశాస్త్రవేత్త అయిన బౌలీ ఒక సందర్భంలో "గణాంకశాస్త్రం ఒక పనిముట్టు. ఇది అసంపూర్ణమైంది కావచ్చు. కాని దాని ఉపయోగం, లోపం తెలియని వాళ్ళు వలన అది చాలా ప్రమాదకరంగా పరిణమిస్తుందని" తెలియజేశాడు.

4) గణాంకశాస్త్రం విచక్షణ, చాకచక్యంతో అన్వయించాలి. నిర్దిష్ట లక్ష్యం లేనట్లయితే సేకరించిన దత్తాంశం సరియైన ఫలితాన్ని ఇవ్వదు.

5) గణాంక శాస్త్రం పరిమాణాత్మక అంశాలను మాత్రమే పరిగణనలోనికి తీసుకుంటాయి. గుణాత్మక విషయాలు పరిశీలించదు. ఒకవేళ గుణాత్మక విషయాలను అధ్యయనం చేయడానికి కూడా వాటికి పరిమాణాత్మక విలువలను అపాదించి మాత్రమే అధ్యయనం చేయవలసి వుంటుంది. ఉదాహరణకు విద్యార్థుల తెలివితేటలను పరీక్షలలో వారికి వచ్చిన మార్కులను బట్టి కొంతవరకు అంచనా వేయవచ్చు.

6) గణాంకాలు పూర్తి వాస్తవాలు కాదు. రమారమి యదార్థాలు ఈ శాస్త్రంలో రూపొందించబడిన సిద్ధాంతాలు భౌతికశాస్త్రాలలో వలే ఖచ్చితంగా ఉండవు. అవసరమైన యదార్థతయే తప్ప సంపూర్ణ యదార్థత ఈ శాస్త్రంలో యదార్థత వుండదు. ఈ శాస్త్రం చాలా వరకు సంభావ్యత సిద్ధాంతం మీద ఆధారపడి వుంటుంది. కావున యధార్థత కలిగి వుండవచ్చు లేదా ఉండకపోవచ్చు. ఉదాహరణకు ఒక నాణెం ఎగురవేసినపుడు బొమ్మ లేదా బొరుసు పడే అవకాశాలు సమానంగా ఉంటాయి. ఒక నాణెంను 10 సార్లు ఎగురవేస్తే బొమ్మ బొరుసు సమానంగా పడదు. కాని 1000సార్లు ఎగరవేస్తే బొమ్మ, బొరుసు సమానంగా పడే అవకాశాలు ఎక్కువగా ఉంటాయి.

7) గణాంకాలు విచారించే విషయానికి సంబంధించిన పూర్తి సమాచారాన్ని తెలియజేయలేవు. అనేక సందర్భాలలో విషయ అవగాహనకు కావలసిన సమాచారం గణాంకాల ద్వారా ఉండడం సాధ్యం కాదు. ఉదాహరణకు A, B అనే ఇద్దరు వ్యాపారస్తులు గత 3 సంవత్సరములలో సగటును 10,000 రూపాయల లాభం సంపాదిస్తే వ్యాపారంలో సమాన సామర్థ్యం గల వారని చెప్పలేము. ఎందుకంటే వారి పెట్టుబడులలోను లేదా అమ్మకాల టర్నోవరులోను బేధాలు ఉండవచ్చు. ఈ సమాచారం తెలియకపోతే తప్పుడు నిర్ణయాలు చేసే అవకాశం వుంటుంది.

8) గణకుడు నిపుణుడు కానప్పుడు, పక్షపాత వైఖరి అవలంభించటం వంటి పరిస్థితుల వల్ల గణాంకశాస్త్రంపై నమ్మకం పోతోంది. సరియైన వాఖ్యలు వివరణ లేనప్పుడు, గణాంకాలు ప్రజలలో అపనమ్మకాన్ని సృష్టిస్తాయి. డిస్రేలీ అనే ఆర్థికవేత్త గణాంకాలను అపహాస్యం చేస్తూ ఈ విధంగా వివరించాడు. "ప్రపంచంలోని అబద్ధలు మూడు రకాలు ఒకటి అబద్ధాలు, రెండు పచ్చి అబద్ధాలు, మూడు గణాంకాలు. దీన్నిబట్టి పరిశీలిస్తే గణాంకాలను నమ్మశక్యంకాని అబద్ధాలుగా చెప్పవచ్చు. అంతేకాక అనుభవం లేని వారి చేతిలో గణాంకాలు చాలా ప్రమాదకరమైన సాధనాలు.

ఎ) గణాంకా ఫలితాలను విశ్లేషించేటప్పుడు ఆ గణాంక పద్ధతులను, విశ్లేషణ సాధనాలను గూర్చి పూర్తిగా తెలుసుకోవాలి. లేకపోతే వాటి వ్యాఖ్యానాలు తప్పుదోవ పట్టిస్తాయి.

బి) గణాంక పరిశోధకుడు నిపుణుడై యుండి నిష్పక్షపాతంగా మెలగాలి. ప్రతిచయనాల ఎంపికలో కూడా పక్షపాతం లేకుండా వుండాలి.

సి) కొన్ని సందర్భాల్లో గణాంక పద్ధతులను సగటుల ఆధారంగా పరిశీలించినప్పుడు సాధారణ విషయాలకు అనుసరిస్తే అవి అసత్యంగా వుంటాయి.

డి) ప్రతిచయనాలు అవసరమైన సంఖ్యలో లభ్యంకాకపోతే ఫలితాలు పూర్తి దత్తాంశాన్ని ప్రతిబింబించవు. అందువల్ల ఫలితాలు తప్పుగా వుండవచ్చు.

గణాంకశాస్త్రం లోని పరిమితుల వల్ల ప్రజలలో కొద్దిమేర అపనమ్మకం వున్నా శాస్త్రీయ అధ్యయనానికి గణాంకాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. ఈ శాస్త్రం పట్ల విశ్వాసం పెరగాలంటే గణకులు దత్తాంశ స్వభావాన్ని బట్టి గణాంక పద్ధతులను పాటించి సక్రమంగా విశ్లేషణ చేయాలి. నిపుణులు సరియైన అవగాహనతో గణాంక పద్ధతులను ఉపయోగించటం వల్ల, ఆధునిక కాలంలో గణాంకశాస్త్ర ప్రాముఖ్యం విపరీతంగా పెరిగింది.

1.8 ఆర్థిక కార్యకలాపాలను కొలవటంలో గణాంకశాస్త్ర పాత్ర

గణాంకశాస్త్రానికి, అర్థశాస్త్రానికి గల పరస్పర సంబంధాన్ని విలియం పెట్టీ అనే శాస్త్రవేత్త 17వ శతాబ్ది చివర్లో వివరించారు. అయితే గణాంకశాస్త్ర సూత్రాల ప్రాతిపదికగా ఆర్థిక సిద్ధాంతాలను రూపొందించటం, ఆర్థిక విధానాలను రూపకల్పన చేయటానికి చాలా కాలం తీసుకుంది. ఎందుకంటే ఆ కాలంలో నిగమన విధానంపై ఆధారపడి సిద్ధాంత రూపకల్పన జరిగేది.. తరువాత క్రమక్రమంగా గణాంకశాస్త్ర ప్రాతిపదికపై ఆధారపడి సిద్ధాంతాలను రూపొందించటం జరిగింది. గణాంకశాస్త్ర ప్రాతిపదికపై ఆధారపడి సిద్ధాంతాలను రూపొందించిన ముఖ్యమైన ఆర్థిక శాస్త్రవేత్తగా జె.యస్. మిల్‌ను చెప్పవచ్చు. ఆ తరువాత జీవాన్స్, ఆల్‌ఫ్రెడ్ మార్షల్, పారిటో, కీన్స్ మొదలైన అనేక మంది శాస్త్రవేత్తలు గణాంక పద్ధతులపై ఆధారపడి ఆర్థిక సూత్రాలను, ఆర్థిక విధానాలను రూపొందించడం జరిగింది. నేడు గణాంక శాస్త్ర ప్రాధాన్యతపై రెండో అభిప్రాయమే కన్పించదు.

గణాంక సమాచారం, గణాంక విశ్లేషణ పద్ధతులు సకల ఆర్థిక సమస్యల పరిష్కారంలో ఎంతో ఉపకరిస్తున్నట్లు మనం గమనించవచ్చు. ఉత్పత్తి, వినియోగం, పంపిణీ, జాతీయాదాయం, జాతీయ సంపద, వేతనాలు, ధరలు, పొదుపు, వ్యయం, పెట్టుబడి, నిరుద్యోగం, పేదరికం లాంటి ఆర్థిక సమస్యల పరిమాణాల్లో మార్పులను కనుగొనేందుకు, తదనుగుణంగా సిద్ధాంతాలను రూపొందించేందుకు కావలసిన ఉపకరణాలను గణాంకశాస్త్రమే అందిస్తుంది. ఆర్థిక కార్యకలాపాల్లోని మార్పులు కొలిచేందుకు (ఉదా॥ ద్రవ్యోల్బణం, ద్రవ్య సప్లయ్, ద్రవ్య డిమాండ్ etc.) ఉపయోగించే సూచీ సంఖ్యలు గణాంకశాస్త్రము అందించిన పనిముట్లే. స్థూల ఆర్థిక చలాంకాలైన జాతీయాదాయం, పెట్టుబడి, పొదుపు మొదలైనవి గణాంకాల ప్రాతిపదికగా జాతీయాదాయ లెక్కలలో రూపొందించటంతోపాటు, దేశాభివృద్ధికి సంబంధించి ప్రణాళికా రూపకల్పన, అమలుకు దోహదపడుతుంది. గణాంకశాస్త్రంలోని ఆధునిక గణాంక పద్ధతులను వ్యయఫలాలు, ఉత్పత్తి ఫలాలు, వినియోగఫలాలు మొదలైన వాటితోపాటు ఉపయోగించడం జరుగుతుంది.

కాలశ్రేణులు, సూచీ సంఖ్యలు, భవిష్యత్తును అంచనా వేసే పద్ధతులు (Forecasting Techniques), డిమాండు విశ్లేషణ మొదలైనవి ఆర్థికశాస్త్రంలో ఉపయోగించే అతిముఖ్యమైన గణాంక పద్ధతులు. ఉదాహరణకు కాలశ్రేణుల విశ్లేషణను అర్థశాస్త్రంలోని ధరలు, ఉత్పత్తి, వినియోగం, ద్రవ్య చలామణి, బ్యాంకు డిపాజిట్లు మొదలైన అనేక విషయాల్లో ఉపయోగించి మెరుగైన ఫలితాలను రాబట్టడం జరుగుతోంది. ధరలు, ద్రవ్యోల్బణం, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తులు, మొదలైన అనేక అంశాలలో మార్పులను కనుగొనేందుకు సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడుతున్నాయి. డిమాండు విశ్లేషణలో భవిష్యత్తును అంచనా వేసే పద్ధతులు (Forecasting Techniques) ఉపయోగపడుచున్నాయి.

ఈ విధంగా గణాంకశాస్త్ర ఆవశ్యకత అర్థశాస్త్రానికి ఎంతో వుంది. దేశప్రగతిని కొలవటంలో, దేశ ప్రగతి కొలిచే కొలమానాలు రూపొందించుటలో సిద్ధాంతాల రూపకల్పనలో గణాంక శాస్త్ర ప్రాముఖ్యం ఎంతో వుంది. రానురాను అర్థశాస్త్రమునకు, గణిత మరియు గణాంక శాస్త్రాలకు మధ్య గల సంబంధం త్వరితగతిని పెంపొందడం ఫలితంగా Econometrics అనే నూతన శాస్త్ర ఆవిర్భావానికి దోహదం చేసింది. ఆర్థికపరమైన గణాంకాల ఖచ్చితత్వము, వాస్తవికత మీద ఆర్థిక శాస్త్రం రూపొందించే ఫలితాలు ఆధారపడి వుంటాయి. ఫలితాలు యొక్క విశ్వసనీయత గణాంకాల విశ్వసనీయత మీదనే ఆధారపడి వుంటుంది.

1.9 సారాంశం

గణాంకశాస్త్రాన్ని మొట్టమొదట రాజుల శాస్త్రము, రాజ్యాంగ శాస్త్రము, రాజకీయ అర్థశాస్త్రముగా పిలిచేవారు. ఈ శాస్త్రాన్ని గణాంకశాస్త్రంగా ఉపయోగించిన శాస్త్రవేత్త అచన్‌వాల్. గణాంకశాస్త్రము అనే పదాన్ని ఏకవచన మరియు బహువచన రూపంలో ఉపయోగిస్తాము. ఏకవచన ప్రయోగంలో గణాంకశాస్త్రము అనగా గణాంక పద్ధతుల సముదాయం, బహువచన ప్రయోగంలో గణాంకశాస్త్రం అంటే సాంఖ్యక దత్తాంశం. అనేక మంది శాస్త్రవేత్తలు గణాంకశాస్త్రాన్ని నిర్వచించే ప్రయత్నం చేశారు. అందులో గణాంకశాస్త్ర లక్షణాలను అన్నింటిని చెప్పిస్తూ సమగ్ర నిర్వచనాన్ని ఇచ్చిన శాస్త్రవేత్త హోరేస్ సేక్రిస్ట్.

ఏదైనా సత్యానికి సంబంధించిన సమాచారాన్ని సేకరించి, సూక్ష్మీకరించి, విశ్లేషించి, వివరించి, భవిష్యత్‌కు సంబంధించిన జోస్యాన్ని తెలుపుతూ, విధానాలను రూపకల్పన చేయటం గణాంక శాస్త్రం యొక్క విధి. మొట్టమొదట గణాంకశాస్త్రాన్ని రాజులు ఉపయోగించినా, కాలగమనంలో దీని పరిధి విస్తరిస్తూ నేడు సాధారణ మానవుని దైనందిన జీవనంలో భాగంగా రూపొందింది. ఈ శాస్త్రంతో సంబంధం లేని శాస్త్రాలు దాదాపుగా లేవనే చెప్పాలి. గణాంకశాస్త్ర ప్రయోజనం, ప్రాముఖ్యతలు క్రమక్రమంగా పెరుగుచున్ననూ, పరిమితులు కూడా లేకపోలేదు. గణాంకశాస్త్రం ఒక వాడియైన పనిముట్టు. ఈ శాస్త్రాన్ని ఉపయోగించే గణకుడు నిపుణుడు, నిష్పాక్షికత కలవాడు కానట్లయితే, గణాంకశాస్త్రము వల్ల ప్రయోజనాలకన్నా నష్టాలే ఎక్కువవుతాయి. కావున ఈ శాస్త్ర ప్రయోజనం దీనిని ఉపయోగించే శాస్త్రవేత్త నైపుణ్యంపై ఆధారపడి వుంది. ఈ పాఠ్యభాగంలో మనం గణాంకశాస్త్ర నిర్వచనాలు మరియు పరిధిని గురించి తెలుసుకున్నాం. వచ్చే పాఠ్యభాగంలో మనం దత్తాంశ సేకరణను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

1.10 ముఖ్యపదాలు

1. **దత్తాంశం :** అంకెలలో సమాచారం
2. **గుణాత్మక సమాచారం :** అంకెలలో కొలవలేని సమాచారం. ఉదా ॥ మంచితనం, అందం మొదలైనవి.
3. **ప్రతిచయనాలు :** ప్రాతినిధ్యం వహించే కొన్ని అంశాలు. ప్రతిచయనాల పర్యాయపదం శాంపిల్స్.
4. **జనాభా :** గణాంకశాస్త్రములో పరిశీలన చేసే అంశాలనన్నింటిని 'జనాభా' అనే పదంతో పిలుస్తాము.

1.11 నమూనా ప్రశ్నలు

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. గణాంకశాస్త్ర పురోగతిని తెల్పండి?
2. గణాంకశాస్త్రాన్ని నిర్వచించి ఇతర శాస్త్రాలతో సంబంధాన్ని తెలుపండి ?
3. గణాంకశాస్త్రం అంచనాలకు సంభావ్యతలకు సంబంధించిన శాస్త్రం - చర్చించండి.
4. గణాంకాలు మట్టిముద్ద వంటివి. వాటి నుండి దైవాన్ని గాని, దెయ్యాన్ని గాని సృష్టించవచ్చు - వివరించండి?

II. సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

5. ఏకవచన, బహువచన ప్రయోగాల్లో గణాంకశాస్త్రం.
6. గణాంకశాస్త్ర ప్రయోజనాలు
7. గణాంకశాస్త్ర పరిమితులు

1.12 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. B.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
2. S.P. Gupta	:	Statistical Methods
3. C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Method
4. S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics.
5. M.C. Shukla and S.S. Gulshan	:	Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 2

గణాంక విచారణ - యోజన - దత్తాంశ సేకరణ - ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

2.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్య భాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది విషయాలను తెలుసుకోగలరు.

* గణాంక సేకరణ అంటే ఏమిటి?
* గణాంక విచారణ లక్ష్యము, పరిధిని గురించి తెలుసుకోవడం
* గణాంక ప్రమాణాలను తెలుసుకోవడం
* గణాంక విచారణ పద్ధతులను తెలుసుకోవడం
* దత్తాంశ సేకరణ, సేకరణ పద్ధతులను తెలుసుకోవడం
* జనాభా పద్ధతి, ప్రతిచయన పద్ధతులను గూర్చి తెలుసుకోవడం
* ప్రతిచయన పద్ధతులను గూర్చి తెలుసుకోవడం

2.1 విషయపరిచయం

సత్యాన్వేషణ మానవ నైజము. సత్యాన్వేషణలో భాగంగా ప్రపంచంలోని అన్ని దేశాల్లో వివిధ రంగాల్లో ఉదా॥కు రాజకీయ, ఆర్థిక వైజ్ఞానిక రంగాల్లో గణాంక విచారణలు కొనసాగుచున్నాయి. సత్యాన్వేషణ కోసం ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో జరిపే శోధన లేదా పరిశోధనను గణాంక విచారణ అంటారు. గణాంక పద్ధతుల ద్వారా సత్యాన్ని లేదా విషయాన్ని గురించి తెలుసుకోవటాన్నే గణాంక విచారణ అని కూడా చెప్పవచ్చు.

గణాంక విచారణ ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో జరిపవలసిన ప్రక్రియ. ఈ పద్ధతి ఐదు దశల ద్వారా జరుగుతుంది. అందులో మొదటి దశ యోజన లేదా ప్రాథమిక ఆలోచన దశ. రెండో దశ దత్తాంశ సేకరణ, మూడో దశ ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ. నాలుగో దశ పట్టికలు, రేఖా పటాలు, చిత్ర పటాల ద్వారా దత్తాంశాన్ని సమర్పించడం. ఆఖరి దశ గణాంక విశ్లేషణ మరియు విపులీకరణ. ఈ అధ్యాయంలో మనం యోజన, దత్తాంశ సేకరణ, ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ అనే మూడు దశలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

2.2 గణాంక విచారణ

సత్యాన్వేషణ మానవ స్వభావము. సత్యాన్వేషణ కోసం శాస్త్రీయ పద్ధతిలో జరిపే శోధన లేదా పరిశోధనను గణాంక విచారణ అంటారు. గణాంక విచారణ ఐదు దశల్లో జరుగుతోంది. అవి - 1. యోజన, 2. దత్తాంశ సేకరణ, 3. ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ, 4. సమర్పణ, 5. విశ్లేషణ, విపులీకరణలు. ఈ వివిధ దశలలో గణాంక విచారణలు కొనసాగాలి. మొదటి దశ యోజన అంటే ప్రాథమిక ఆలోచన దశ. ఈ దశలో విచారణోద్దేశము, పరిధి, విచారణ పద్ధతులు, గణాంక మూలాలు, యదార్థతా స్థితి మొదలైనవి నిర్ణయించుకోవాలి. యోజన తరువాత దశ దత్తాంశ సేకరణ. దత్తాంశం లభ్యమయ్యే మూలాలు రెండు రకాలు. అవి ప్రాథమిక దత్తాంశం, ద్వితీయ దత్తాంశం. ఈ మూలాల ద్వారా దత్తాంశాన్ని సేకరించే ప్రక్రియ రెండో దశలో జరుగుతుంది. దత్తాంశ సేకరణ ద్వారా సేకరించిన దత్తాంశం బృహత్ పరిమాణంలోను, జఠిలంగాను, వివిధ దోషాలను కలిగి ఉంటుంది. కావున ఈ విధమైన దత్తాంశాన్ని సరళంగా, దోష రహితంగా, యదార్థంగా, సంపూర్ణంగా సంకల్పితాన్ని మూడో దశలో చేయటం జరుగుతోంది. ఈ మూడో దశలోనే ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ అంటారు. మూడోదశ దాటిన తరువాత సమర్పణ అనేది నాల్గవ దశ సమర్పణ. ఈ దశలో దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించి, పట్టీకరించటం ద్వారా సులభతరం చేసి పట్టికలు, రేఖా చిత్ర పటాల ద్వారా సమర్పణ

చేయటం జరుగుతుంది. గణాంక విచారణలో ఆఖరి దశ విశ్లేషణ, విపులీకరణ. ఈ దశలో గణాంక సమాచారాన్ని వివిధ విశ్లేషణ ప్రమాణాల ద్వారా అంటే సగటులు, విస్తరణ మానాలు, సహ సంబంధం, అంతర్నివేశనం లాంటి విశ్లేషణ పద్ధతుల ద్వారా విశ్లేషించి, విపులీకరించటం జరుగుతోంది. ఈ విధంగా గణాంక విచారణ కొనసాగుతుంది.

2.3 యోజన దశ

గణాంక విచారణలో మొదటి దశ యోజన. యోజన లేదా ప్రణాళిక దశ నాలుగు గోడల మధ్య జరిగే ప్రక్రియ. దీనినే ప్రాథమిక ఆలోచన దశ అంటారు. ఈ దశలో గణాంక విచారణకు పూర్వం గణాంక శోధకుడు విచారణకు తగిన ప్రణాళికను రూపొందిస్తాడు.

యోజన దశలో గణాంక శోధకుడు దత్తాంశ సేకరణకు సంబంధించి అనేక చర్యలు తీసుకుంటాడు. ప్రణాళిక సక్రమంగా రూపొందించుకుంటే అనేక సమస్యలు తొలగి, మంచి ఫలితాలు వస్తాయి. కాలం, ధనం వృథాకాదు. కావున తగు జాగ్రత్తలను వహించి యోజన రూపొందించుకోవాలి. ఈ దశలో గణాంక విచారణకు అవసరమైన అనేక విషయాలకు సంబంధించి ఆలోచన చేసి, తగు ప్రణాళికను రూపొందించుకోవాలి. అందుకోసం కింద సూచించిన విషయాల పై తగు జాగ్రత్తలు తీసుకొని, నిర్ణయాలను తీసుకోవాలి.

2.3.1 గణాంక విచారణ లక్ష్యం - పరిధి (Objectives ad Scope of the Enquiry) **:-** గణాంక సేకరణకు ముందు పరిశోధనా లక్ష్యము - పరిధిని నిర్ణయించవలెను. లక్ష్య నిర్ణయము ఖచ్చితంగా వుంటే గణాంక విచారణలో సేకరించవలసిన గణాంకాల స్వభావము, సేకరణ పద్ధతిని నిర్ణయించటం సులువుగా సాధ్యపడును. సమస్యకు సంబంధించిన సమాచారాన్ని మాత్రమే సేకరించుటకు వీలుపడును. వనరులు దుబారా కాకుండా నిరుపయోగమైన సమాచార సేకరణను తొలగించుకొనవచ్చును. అవసరాన్ని బట్టి విశ్లేషణా పరిధి, గణాంక సేకరణ ప్రాంతమును పరిమితి చేయవచ్చును. పరిధి విస్తరించినదైనచో sample method వినియోగించవలసి యుండును. పరిమితి పరిధి కలిగి యున్నచో జనాభా పద్ధతి (censes method) వినియోగించవచ్చును. గణాంక పరిశోధనకు అందుబాటులో గల వనరులు - డబ్బు, సిబ్బంది, కాలము తదితర అంశాలు ఆధారంగా పరిశోధనకు వినియోగించవలసిన పద్ధతిని ఎన్నుకొనవలెను.

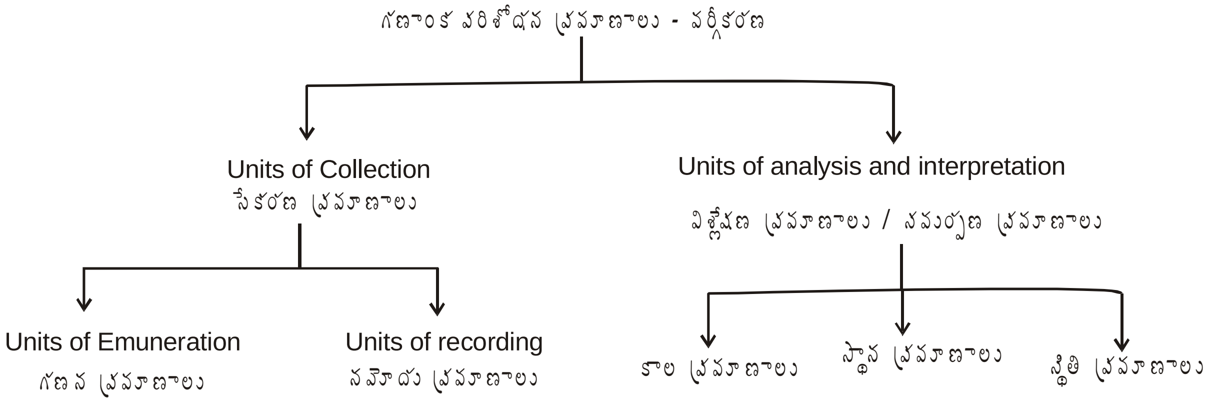
2.3.2 గణాంక ప్రమాణాల నిర్ణయం (Statistical Units to be Used) **:-** సమస్య పరిష్కారానికి అనువైన గణాంకాల సేకరణకు స్పష్టమైన గణాంక ప్రమాణాలను నిర్ణయించుకొనవలెను. ఉదా॥ సామాజిక ఆర్థిక అంశాలకు సంబంధించిన పరిశోధనలకు వ్యక్తి, కుటుంబము, గృహము లేక ఒక మండలము (ప్రాంతం) ప్రమాణంగా గ్రహించబడును. గణాంక విషయమే గణాంక ప్రమాణ ఎన్నికకు మార్గమవుతుంది. గణాంక సమాచారాన్ని కొలవటానికి, మార్పులను అంచనావేయటానికి ఇవి ఉపయోగపడతాయి. సాంప్రదాయకంగా భౌతిక ప్రమాణాలైన మీటరు, లీటరు, గంటలు, రోజులు, వారాలు ప్రమాణాలుగా గ్రహింపబడును. పరిశోధన నిర్వహణకు తగిన స్పష్టమైన ప్రమాణాలను ఎన్నిక చేసుకొనవలెను.

గణాంక యూనిట్‌లు : 1. స్పష్టంగా, 2. నిర్దుష్టముగా, 3. స్థిరత్వమును కలిగి, 4. పరిశోధనకు తగినదిగా, 5. ఏకత్వమును కలిగి యుండవలెను.

గణాంక ప్రమాణ ఎంపికలో - పరిగణించవలసిన అంశాలు :-

1. గణాంక ప్రమాణము విచారణ తగినదిగా ఉండవలె.
2. సులభంగా అర్థమయ్యేటట్లుగా ఉండవలెను.
3. నిర్దుష్టమైనదిగా ఉండవలెను.

4. నిర్వచింపబడిన ప్రమాణాన్ని స్థిరంగా గ్రహించవలె (మార్చరాదు).
5. గణాంక ప్రమాణము ప్రామాణికమైనదై పోల్చుటకనువైనదిగా యుండవలెను.
6. గణాంక ప్రమాణ నిర్వచనము నిర్ణీతంగా, స్వయం బోధితంగా, స్వయం వ్యక్తంగా నుండవలెను.
7. క్లుప్తంగా, స్పష్టముగా యుండవలె ప్రాతినిధ్యపు లక్షణం కలిగి యుండవలెను.
8. గణాంక ప్రమాణాలలో తారతమ్య శక్తి, సజాతీయత సమానత్వం, సంపూర్ణత్వం, నిశ్చలత, నిర్దుష్టత, ప్రాతినిధ్యము, నిష్పాక్షికత ఉండవలెను.



గణాంక సేకరణ ప్రమాణాలు :- దత్తాంశాన్ని సేకరించేందుకు ఉపయోగించే ప్రమాణాలను గణాంక సేకరణ ప్రమాణాలుగా చెప్పవచ్చు. ఈ విధంగా ఉపయోగించే ప్రమాణాలను రెండు ఉపవర్గాలుగా విభజించవచ్చును. అవి గణన ప్రమాణాలు, నమోదు ప్రమాణాలుగా చెప్పవచ్చు.

(ఎ) గణన ప్రమాణాలు : అవి గణన ప్రమాణాలు, గణాంక సేకరణ లక్ష్యాన్ని దృష్టి యందుంచుకుని గణాంక సేకరణ, గణన ప్రమాణాన్ని నిర్ణయించుకొనవలె. భౌతిక ప్రమాణాలైన టన్ను, పౌండు, మీటరు, గంట, సం॥ మొదలగునవి స్పష్టమైన సాంప్రదాయక ప్రమాణాలు. కాని ఉదాహరణకు జీవన వ్యయ సూచి నిర్మాణంలో ప్రమాణాన్ని నిర్ణయించుటకు స్పష్టంగా దానిని నిర్వచించవలెను. గృహము అనే దానిని ప్రమాణంగా తీసుకుంటే అందు రక్త సంబంధికులు / అక్కడ భోజనము చేయువారు / రేషన్ కార్డులో ఉన్నవారు అనేది స్పష్టంగా నిర్వచించవలెను. తద్వార గణాంకాల సేకరణలో అవసరమైనవి మాత్రమే స్వీకరించబడి అవసరంలేనివి తొలగిపోవును.

(బి) నమోదు ప్రమాణాలు :- గణాంకాల నమోదులో ఉపయోగింపబడు కిలోగ్రాములు, క్వింటాళ్ళు, టన్నులు - (ఆహార పదార్థాలకు సంబంధించినవి) వస్త్రములకు సంబంధించి మీటర్లు ధరలను రూపాయలలో నమోదు చేయుదురు.

నమోదుకు సంబంధించిన యూనిట్లు :

1. సామ్యామైనవి లేక ఒక అంశానికి మాత్రమే సంబంధించినవి. ఇవి సాంప్రదాయక ప్రమాణాలు. మీటరు, రూపాయ, టన్ను, కిలోగ్రాము, పౌండు, వస్త్రబేళ్లు, గంట, వారము, సం॥ మొదలైనవి. ఇవి సాంప్రదాయంగా వినియోగించేవి కనుక నిర్వచించడం సులభము. కాని వినియోగించేటపుడు తగిన జాగ్రత్తలు తీసుకొనవలెను.

2. మిశ్రమమైనవి కావచ్చును. సామాన్య ప్రమాణాలకు విశ్లేషణము చేర్చినపుడు అవి మిశ్రమ యూనిట్లుగా ఏర్పడును. ఉదా॥ నిపుణుడైన శ్రామికుడు, ఉద్యోగము గల వ్యక్తి , టన్ను - కిలో మీటరు, కిలోవట్ - అవర్ (గంట), మానవ - గంటలు, చిల్లర ధరలు, నెలసరి వేతనము, పాసింజర్ కిలోమీటరు, ఈ ప్రమాణాలు పరిమిత పరిధి కలిగి నిర్వచించడం జటిలమగును. అందువలన వీనిని స్పష్టంగా తగిన విధంగా నిర్వచించవలెను.

విశ్లేషణ - అణువర్తిత / సమర్పణ ప్రమాణాలు :

(ఎ) విశ్లేషణా ప్రమాణాలను విపులీకరణ ప్రమాణాలు అని కూడా వ్యవహరింతురు. ఇవి : అనుపాతము - నిష్పత్తి, రేటు, శాతము, విచలన గుణకము, విస్తరణ మొ॥వి. గణన ప్రమాణాలుగా కాక స్వతంత్రమైన శుద్ధ సంఖ్యలుగా యుండి శ్రేణులను పోల్చుటకు తోడ్పడును.

(బి) అనువర్తిత / సమర్పణా ప్రమాణాలు : ఈ ప్రమాణాలను మూడు రకాలుగా చెప్పవచ్చు : కాల ప్రమాణాలు, స్థాన ప్రమాణాలు, స్థితి ప్రమాణాలు, దత్తాంశ ఫలితాలను సమర్పించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

2.3.3 దత్తాంశ సేకరణ మూలాలు : గణాంక విచారణలో యోజన దశ తొలిమెట్టు. ఆ తరువాత గణాంక విచారణకు అవసరమైన దత్తాంశాన్ని సేకరించవలె. ఫలితాలు సేకరించిన దత్తాంశంపై ఆధారపడి వుంటాయి. అందువల్ల తగు జాగ్రత్తలతో దత్తాంశాన్ని సేకరించవలసి వుంటుంది. విచారణ పద్ధతి జనాభా పద్ధతి అయినా లేదా ప్రతిచయన పద్ధతి అయినా దత్తాంశ సేకరణ అతి ముఖ్యమైన ప్రక్రియ. గణాంక విచారణ కోసం సేకరించే దత్తాంశం రెండు రకాలుగా చెప్పవచ్చు.

అవి : 1. ప్రాథమిక దత్తాంశము, 2. ద్వితీయ / గౌణ దత్తాంశము

1. **ప్రాథమిక దత్తాంశము :** ఒక వ్యక్తి లేదా సంస్థ లేదా ప్రభుత్వం గణాంక విచారణ కోసం మొట్టమొదటగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశం అంటారు. ఈ విధమైన సమాచారం గతంలో సేకరించి వుండరు. పరిశోధనలో గల సమస్య పరిష్కారానికి సంబంధించి (స్వంతగా) తొలిసారి గణాంకాలను సేకరించడము. ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణకు ముందు, దత్తాంశ సేకరణ లక్ష్యము, పరిధి దృష్టియందుంచుకొని వివిధ పదాలు, గణన యూనిట్లను నిర్వచింపవలె.

2. **ద్వితీయ దత్తాంశము :** ఒక వ్యక్తి లేదా సంస్థ లేదా ప్రభుత్వ సంస్థ లోగడ సేకరించి, విచారణ జరిపి, విశ్లేషించిన సమాచారాన్ని ప్రస్తుత గణాంక విచారణలో ఉపయోగిస్తే దాన్ని ద్వితీయ లేదా గౌణ దత్తాంశం అంటారు. వీటిని గురించి ఈ పాఠం **2.4**లో వివరంగా తెలుసుకుందాం.

2.3.4 గణాంక విచారణ పద్ధతులు (Method of Data Collection -Type of enquiry) : యోజన దశలో నిర్ణయించుకోవలసిన మరొకటి ఏ విధమైన గణాంక విచారణ పద్ధతిని చేపట్టాలి. విచారణ లక్ష్యము, పరిధి, ఆర్థిక వనరులు, కాలము సాధించవలసిన ఖచితత్వం ఆధారంగా విచారణా పద్ధతిని ఎంచుకొనవలెను. ప్రాథమిక దత్తాంశం సేకరణలో గణాంక ప్రమాణాలను జాగ్రత్తగా నిర్ణయించవలెను. ద్వితీయ దత్తాంశమునకు యీ సమస్యరాదు.

గణాంక విచారణ పద్ధతులు : గణాంక విచారణ పద్ధతులు వివిధ రకాలు. విచారణ ఉద్దేశం, ఉద్దేశ పరిధి, విచారణకు సంబంధించిన అంశాల పరిమాణం మొదలైన వాటిపై ఆధారపడి గణాంక విచారణ పద్ధతులను వివిధ రకాలుగా చెప్పటం జరుగుతుంది. వీటిని గూర్చి ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం.

1. **జనాభా విచారణ, ప్రతిచయన విచారణ :** విచారణకు సంబంధించిన (అన్ని యూనిట్లను) అందరిని పరిగణనలోనికి తీసుకొని గణాంక శోధన జరుపబడును. దీనిని జనాభా విచారణ లేక సెన్సెస్ పద్ధతి అందురు. ఉదాహరణకు

హైదరాబాద్ నివాసుల వినియోగ పద్ధతికి సంబంధించిన విచారణలో హైదరాబాదులోని ప్రతి కుటుంబ పెద్దను కలసి వివరాలు సేకరించబడును.

విచారణకు సంబంధించి ప్రాతినిధ్యం వహించే కొన్ని యూనిట్లను మాత్రమే గణనలోనికి తీసుకొని విచారణ జరిపే పద్ధతిని ప్రతిచయన పద్ధతి అంటారు. సమస్యకు సంబంధించి ప్రాతినిధ్యము గలిగిన కొన్ని యూనిట్లను కుటుంబాలకు గణాంకాలు సేకరింపబడును. గణాంక విచారణలో ప్రతిచయన పద్ధతినే ఎక్కువగా ఉపయోగించడం జరుగుతూ ఉంది.

పై రెండు పద్ధతులలో అంటే జనాభా పద్ధతి, ప్రతిచయన పద్ధతులలో ఏ పద్ధతి ఉపయోగించాలి అనేది (ఎ) వనరుల లభ్యత, (బి) కాల పరిమితి, (సి) యదార్థ పరిమితి, (డి) సమస్యల స్వభావం మొదలైన అంశాలను ప్రాతిపదికగా తీసుకొని నిర్ణయించడం జరుగుతుంది.

2. **ప్రారంభిక, పునర్విచారణలు :** ఒక సమస్య పై మొట్టమొదటిగా చేసిన విచారణ ప్రారంభిక లేక ప్రాథమిక విచారణ అందురు. ప్రాథమిక విచారణలో దత్తాంశము సేకరించుటకు ప్రణాళిక అవసరము. అంతేకాకుండా మొదటిసారిగా సేకరించడం కావున అనేక కష్టనష్టాలు ఎదుర్కోవలసి వుంటుంది. ప్రాథమిక విచారణను విడవకుండా, ఆచరణలో యింకా ఆ విచారణ కొనసాగిస్తే దానిని పునర్విచారణ అంటారు. ప్రాథమిక విచారణలోని ప్రణాళికనే వినియోగించబడడం వల్ల క్రొత్త ప్రణాళిక దీనికి అవసరం ఉండదు. కాని కాలరీత్యా కొన్ని మార్పులు చేసుకొనవచ్చును. ఫలితంగా దత్తాంశ తారతమ్య పరిశీలనలో సమస్యలేర్పడును. అందువలన పునర్విచరణలో సాధ్యమైనంత వరకు గణాంక ప్రమాణాలు, వాడిన పదాల నిర్వచనాలు మార్చరాదు. ప్రారంభక విచారణతో పోల్చితే పునర్విచారణ సులువు. త్వరితంగా, తక్కువ వ్యయంతో విచారణ జరుపవచ్చు.

3. **ప్రత్యక్ష, పరోక్ష విచారణలు :-** పరిమాణాత్మక దత్తాంశము ప్రాతిపదికగా గణాంక విచారణ జరిపితే దానిని ప్రత్యక్ష విచారణ అంటాము. ఎందుకంటే పరిమాణాత్మక సమాచారం ప్రత్యక్షంగా కొలవవచ్చు. ఉదా॥ ఎత్తు, బరువు, ఆదాయం. దత్తాంశాన్ని ప్రత్యక్షంగా అంటే పరిమాణాత్మకంగా కొలవటానికి అవకాశం లేని గుణాత్మకమైన విషయాలను విచారణ జరిపే పద్ధతిని పరోక్ష విచారణ అంటాము. ఉదా॥ తెలివితేటలు, నిజాయితీ. వీటిని కొలవటానికి కొలమానాలు లేవు. అందుచేత కొన్ని ఇతర అంశాలను ప్రాతిపదికగా తీసుకొని విచారణ చేయడం జరుగుతుంది. పరోక్షంగా విచారణలో కొలవడానికి వీలుగల కొన్ని సహజ విషయాలు గైకొనవలెను. అవి : గుణాత్మకంగా ఉన్న విషయాలు ప్రతిబింబించవలెను. ఉదా॥ ఒక వర్గపు విద్యార్థుల తెలివితేటలు అనే గుణం పరోక్షంగా వారి పరీక్ష మార్కుల ఆధారంగా దత్తాంశ సేకరణ జరుపవచ్చును.

4. **బహిరంగ, రహస్య విచారణలు :** విచారణ ఫలితాలను ప్రజలకు వెల్లడిచేస్తే దానిని బహిరంగ విచారణ అంటారు. బహిరంగ విచారణ యందు విచారణా ఫలితాలు ప్రచురింపబడును. దేశంలోని ప్రజలకు అందజేయుదురు. ఫలితాలను గోప్యంగా ఉంచరు. ఉదా॥ ప్రభుత్వం, కొన్ని ప్రభుత్వ సంస్థలు యీ విచారణలు నిర్వహిస్తాయి. రహస్య విచారణలో ఫలితాలు బహిరంగ పరచకుండా, ప్రజలకు తెలియకుండా రహస్యంగా ఉంచెదరు. ప్రైవేటు ఉత్పత్తిదార్ల సంఘాలు, యాజమాన్య సంఘాలు మొదలైనవి ఈ విధమైన విచారణలు నిర్వహిస్తాయి. ప్రైవేటు సంస్థలు తమ స్వప్రయోజనాలను ఆశించి ఎక్కువగా రహస్య విచారణలు చేస్తూ వుంటాయి.

5. **విస్తృత, పరిమిత విచారణలు :** విచారణలో ఒక సమస్యకు సంబంధించిన అన్ని అంశాల పై దత్తాంశమును సేకరించడం విస్తృత విచారణ అందురు. ఉదా॥ జనాభా లెక్కలు. అంటే విచారణే విస్తృత స్థాయిలో కొనసాగుతుంది. ఇందుకు

భిన్నంగా విచారణలో ఒక సమస్యకు సంబంధించిన కొన్ని ముఖ్యాంశాల పైనే దత్తాంశాన్ని సేకరిస్తే, పరిమిత విచారణ అంటారు. ఉదా॥ ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల తెలివి తేటలు తెలుసుకొనుటకు కొన్ని అంశాల పైనే (మార్కులు) దత్తాంశము సేకరింతురు.

6. **క్రమ, తదర్థ విచారణలు :** ఒక నిర్ణీత కాలంలో, ఒక విషయాన్ని గురించి క్రమ పద్ధతిలో దఫాలుగా గణాంక విచారణ చేస్తే క్రమ విచారణ అంటారు. ఉదా॥ ప్రజల జీవన వ్యయ సూచిక తెలుసుకొనుటకు ప్రభుత్వం నిర్వహించు విచారణలు. ఈ విచారణలో అవసరమైన అన్ని అంశాల పై దత్తాంశ సేకరణ జరుగును.

ఒక విషయాన్ని గూర్చి విచారణను అవసరమైనపుడే చేసినట్లయితే తదర్థ విచారణ అందురు. ఈ విచారణ యందు కొన్ని అంశాల పై మాత్రమే దత్తాంశ సేకరణ జరుగును. ఒకసారి విచారణ జరిపిన తరువాత మళ్ళీ ఈ విధమైన విచారణ మళ్ళీ జరగవలసిన ఆవశ్యకత వుండదు. ఉదా॥ 2005 మార్చిలో బి.కాం విద్యార్థుల ఉత్తీర్ణత తెలుసుకోవడం. ఇది తాత్కాలికమైనది.

2.3.5 యదార్థతా పరిమితి (Degree of Accuracy): సంపూర్ణ యదార్థత ఎల్లప్పుడు అవసరం వుండదు. కొన్ని సందర్భాల్లో సంపూర్ణ యదార్థత అవసరం కూడా ఉండదు. గణాంక శోధకుడు దత్తాంశములో పరమ యదార్థత చేకూర్చడం సాధ్యము కాదు. అందువలన కావలసినంత లేక న్యాయంగా యుండవలసిన యదార్థత సాధించుటకు ప్రయత్నించవలెను. గణాంక సేకరణకు పూర్వము తగిన యదార్థతలు నిర్ణయించి, దానితోబాటు సంభావ్య దోషపు హద్దులను కూడా నిర్ణయించవలెను. యదార్థత సాధనలో గణాంక విచారణ వ్యయాన్ని కూడా పరిగణించవలెను.

2.4 దత్తాంశ సేకరణ (Collection of Data)

క్రమబద్ధమైన పద్ధతిలో గణాంక సేకరణ చేస్తే శ్రేష్ఠమైన గణాంకాలు లభించును. జనాభా పద్ధతిలో సమస్యకు సంబంధించిన చిన్న అంశాల పై గణాంకాలు సేకరించబడును. కాని ఇది క్లిష్టతరమైనది. ప్రతిచయన పద్ధతిలో ప్రాతినిధ్యత కల్గిన కొన్ని ముఖ్యాంశాల పైనే దత్తాంశం సేకరించడం జరుగుతుంది. గణాంక విచారణకు సేకరించే దత్తాంశాన్ని రెండు రకాలుగా అనగా ఆంతరంగిక, బహిరంగ దత్తాంశాలుగా చెప్పవచ్చు.

(ఎ) ఆంతరంగిక దత్తాంశము : ఒక వ్యాపార సంస్థ తన పుస్తకాల నుండి సేకరించే దత్తాంశము. ఈ దత్తాంశాన్ని ఆ సంస్థ తన యాజమాన్యానికే వినియోగించుకొనును. తన విక్రయం, ఎగుమతులు, ఉత్పత్తి కొనుగోళ్ళ సమాచారం ఆధారంగా వ్యాపారాభివృద్ధికి తగిన విధానాలు, చర్యలు రూపొందించుకొనును.

(బి) బహిరంగ దత్తాంశము : ఇతర సంస్థలు వ్రాసుకున్న కొన్ని పుస్తకాల నుండి గ్రహించిన దత్తాంశము. ఈ దత్తాంశం వినియోగించడం వలన సంస్థలు తమ ఉనికిని కోల్పోవును.

బహిరంగ దత్తాంశాన్ని రెండు రకాలుగా సేకరింపవచ్చు. 1. ప్రాథమిక దత్తాంశము, 2. ద్వితీయ దత్తాంశము. ఏదైనా విచారణ కోసం మొట్టమొదటిగా సేకరించిన దత్తాంశమును ప్రాథమిక దత్తాంశము అంటారు.

గతంలో ఇతరులు సేకరించి ఉపయోగించిన దత్తాంశాన్ని గణాంక విచారణలో స్వీకరించిన దానిని ద్వితీయ లేక గౌణ దత్తాంశమందురు.

2.4.1 ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు : ఒక వ్యక్తి లేదా సంస్థ లేదా ప్రభుత్వము ఏదైనా ఒక విచారణ కోసం మొట్టమొదటిగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాథమిక దత్తాంశం అంటారు. ఈ విధమైన సమాచారాన్ని బహుశా లోగడ సేకరించి ఉండరు. గణాంక

శోధకుడు తనకు తానే గణాంక విచారణ కోసం సంకల్పించినట్లయితే అతడు ప్రాథమిక దత్తాంశాం కోసం వెళ్ళాలి. గణాంక విచారణకు ప్రాథమిక దత్తాంశం చాలా ఉపయోగకరమైనది. కాని ముడి వస్తువులాంటిది. ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సేకరించేందుకు అనేక పద్ధతులు వున్నాయి. వాటిని గూర్చి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

1. **ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగత శోధన** (Direct Personal Investigation) :- గణాంక శోధకుడు స్వయంగా సమస్యను పరిశీలించి, ఓర్పుగా, జాగ్రత్తగా వివరాలను అందజేయు వారితో కలసి మెలసి తిరిగి ముఖాముఖిగా దత్తాంశమును సేకరించును. అందువలన యీ విచారణా పద్ధతి సంపూర్ణమైనదిగా యుండును. ఫలితాలు ఖచ్చితంగా ఉండును. వ్యక్తిగత శోధనలో గణాంక శోధకుడు ప్రాంతీయ వివరాలు సమాచారము, ఆచారాలతో పరిచయము కలిగి ఉంటే దత్తాంశము సేకరించడం సులభము.

ప్రయోజనాలు

1. ఈ పద్ధతి యందు అసలు దత్తాంశము గ్రహించే వీలు కలదు. 2. ఒక సమస్య పై వాస్తవికత ఏర్పడును. 3. ఖచ్చితమైన దత్తాంశము సేకరించ వీలుపడును. 4. సేకరణలో ఏకరూపకత యుండును. 5. గణాంక శోధకుడు స్వయంగా సేకరించడం వలన మానసిక తృప్తి పొందగలడు. 6. సంపూర్ణ శోధనలకు యిది మంచి పద్ధతి.

లోపములు

1. ఈ పద్ధతిలో సేకరింపబడిన దత్తాంశమునకు పరిమితమైన విలువ మాత్రమే యుండును. 2. దత్తాంశ సేకరణకు ఎక్కువ కాలము వృథా యగును. 3. దత్తాంశ సేకరణకు ధన వ్యయము కూడా అధికము. 4. విస్తృత విచారణకు యీ పద్ధతి వినియోగింపరు. 5. గణాంక శోధనకు పాక్షిక దృక్పథం ప్రదర్శిస్తే సరియైన ఫలితాలు సాధింపలేము.

2. **పరోక్ష మౌఖిక శోధన** (Indirect Oral Investigation) :- సమాచారము అందచేయు వారు తగిన వివరాలు తెల్పుటకు అంగీకరించకపోవడం, అయిష్టత ప్రదర్శించడం, గణాంక శోధన విస్తృతమైనదిగా యుండుట వల్ల ప్రత్యక్ష శోధన సాధ్యపడకపోవడం, సమాచారం లిఖించే మూలాలు లేకపోవడం, ఒకవేళ లభించినా అవి నమ్మకమైనవి కాకపోవడం తదితర కారణాల వలన పరోక్ష మౌఖిక శోధన నిర్వహించవలసిన పరిస్థితి యేర్పడును. ఉదా॥ పొగత్రాగడం, త్రాగుడు. జూదమాడటం మొదలగు అలవాట్లు గలవారి నుండి వాస్తవ సమాచారము సేకరించడం సాధ్యపడదు. పై అలవాట్లు గల వారి వ్యక్తిగత స్నేహితులు, బంధువులు, ఇరుగుపొరుగు వారి నుండి ప్రత్యక్షంగా లేక పరోక్షంగా సరియైన సమాచారము సేకరింపవచ్చును. వారిని సాక్షులు అందురు. ఈ పద్ధతిలో వివరాల సేకరణ ఎన్యూవరైటర్ల (సమాచార సంగ్రహము) ద్వారా నిర్వహింపవచ్చును. సమస్యకు సంబంధించిన చిన్న ప్రశ్నావళి రూపొందించి సమాచారం అందచేయు సాక్షులను అడిగి వారి జవాబులను నమోదు చేసుకొందురు. ప్రభుత్వం నియమించు ఎంక్వైరీ కమిటీలు, కమీషన్లు యీ పద్ధతిని వినియోగించును.

ప్రయోజనాలు : ఈ పద్ధతి వల్ల 1. ఎన్యూమరేటర్లు తమ తెలివితేటలు, శక్తియుక్తులు ఉపయోగించి సాక్షుల నుండి తగిన సమాచారమును రాబట్టుదురు. 2. ప్రత్యక్ష వ్యక్తిగత శోధన కంటే తక్కువ వ్యయము, తక్కువ కాలములో సమాచారము సేకరింపవచ్చును. 3. పరిశీలనలో గల సమస్య పై నిపుణుల సలహాలు గైకొని సార్ధకమైన, సమర్థవంతమైన సమాచార సేకరణ నిర్వహింపవచ్చును మొదలైన ప్రయోజనాలు కలవు.

లోపములు

1. సాక్షులతో వ్యక్తిగత సంబంధం లేకపోవడం, ప్రత్యక్ష పర్యవేక్షణ లేకపోవడం వలన శోధకుడు ఎన్యూమరేటర్లు సమర్పించే సమాచారము పైన ఆధారపడవలసి వచ్చును. ఎన్యూమరేటర్ల తెలివితేటలు, నైపుణ్యాలు, దూరదృష్టి, సమర్థత, నిజాయితీ, నిష్పక్షపాతాల పై యీ పద్ధతి యొక్క సార్థకత ఆధారపడును. అందువలన సుశిక్షితులు, తగిన వారిని మాత్రమే ఎన్యూమరేటర్లుగా గ్రహించవలె. తద్వారా లోపాలను పరిమితి చేయవచ్చును.

2. సేకరింపబడిన దత్తాంశము ఆధారముగా నిర్ణయాలు గైకొనబడడం వలన సాక్షులను ఎన్నుకొనునపుడు వారి లక్షణాలు, స్వభావము పరిశీలించి తగిన వారిని ఎన్నుకొనవలెను. వారు నమ్మకస్తులు, పక్షపాత రహితులుగా నుండవలెను. పరిసోధనలో ఎక్కువ మంది సాక్షుల నుండి సమాచారము రాబట్టవలెను. సాక్షులు పరిశోధనలో గల సమస్యకు సంబంధించిన పరిజ్ఞానము గలవారై యుండవలెను. వారి ఆశావాద, నిరాశావాద స్వభావానికి కొంత మినహాయింపు కల్పించవలెను.

3. **విలేఖరుల ద్వారా సమాచార సేకరణ :** గణాంక పరిశోధకుడు గణాంక విచారణ పై వివిధ ప్రాంతాల నుండి విలేఖరుల ద్వారా సమాచారము సేకరించును. వీరు వారి వారి పద్ధతులలో వివిధ ప్రాంతాల నుండి సమాచారము సేకరింతురు. గణాంక విచారణా పరిధి విస్తృతమై దత్తాంశములో పూర్తి ఖచ్చితత్వం అవసరం లేనపుడు ఈ పద్ధతి ఉపయోగింతురు. ఈ పద్ధతిలో స్థానిక విలేఖరులను కూడా నియమింతురు. తమను నియమించిన సంస్థకు భోగట్టా సరఫరా చేయుదురు.

ప్రయోజనము

ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశము, సులభంగా త్వరితంగా, తక్కువ ఖర్చుతో సేకరింపవచ్చును.

లోపాలు

ఈ పద్ధతి ద్వారా సేకరింపబడిన సమాచార ఫలితాలు స్థూల విలువలు గాను, ఉరమరగాను (రమారమి) ఉంటాయి. సమాచారం పక్షపాతంతో కూడి యుండవచ్చును. వార్తా పత్రికలు, మాస పత్రికలు దత్తాంశ సేకరణకు విలేఖరులను నియమించుదురు. ప్రభుత్వం కూడా స్థానిక ఉద్యోగుల ద్వారా వ్యవసాయ పంటల అంచనాలు సేకరించును. ప్రభుత్వం ఈ పద్ధతిని రిజిస్ట్రేషన్ విధానం ద్వారా జనన, మరణ, అనారోగ్య వివరాలు సేకరించుటకు గ్రామ సర్పంచ్, M.R.O., వైద్యశాలలను వినియోగించును.

4. **షెడ్యూళ్ళు** (Schedules): వ్యక్తులు, సంస్థలు, ప్రభుత్వము విచారణా సమస్యకు సంబంధించిన వివరాల సేకరణకు కొన్ని ప్రశ్నలు పొందుపరచిన ఒక నమూనా తయారు చేయుదురు. వీనిని షెడ్యూళ్ళు అందురు. దీనిని తరిఫీదు పొందిన గణకులు, సమాచారము యిచ్చే వారిని కలుసుకుని, ప్రశ్నించి వారిచ్చే సమాధానాలకు స్వయంగా షెడ్యూళ్ళతో పూరించెందరు. జనాభా గణనలో భారత ప్రభుత్వం ఈ పద్ధతిని వినియోగించెను.

ప్రయోజనాలు

ఈ పద్ధతి యందు గణకులు సమాచారము ఇచ్చేవారిని స్వయంగా కలసి సమాచారము సేకరించడము వల్ల ప్రతిస్పందన ప్రోత్సాహకంగా యుండును. గణకులు స్వయంగా సమాచారము రాబట్టడం వలన ఫలితాలకు ఖచ్చితత్వం ఉంటుంది. ఈ పద్ధతిలో నిరక్షరాసుల నుండి కూడ సమాచారము రాబట్టవచ్చును. షెడ్యూలులో ఉన్న ప్రశ్నలు మాత్రమే అడగవలెను. కనుక పక్షపాతముండదు. విచారణలో జవాబు రాకపోవడం అనే లోపం ఉండదు.

లోపాలు

ఈ పద్ధతి చాలా ధన వ్యయముతో కూడిన పని. సేకరణకు ఎక్కువ కాలం వెచ్చించవలసి యుండును. ఈ పద్ధతి ప్రయోజనం గణకుల నైపుణ్యము, తెలివితేటలు, విద్య, శిక్షణల పై ఆధారపడి యుండును. గణకులకు విచారణ

ముఖ్యోద్దేశము తెలిసి యుండవలెను. వారికి సమాచారము రాబట్ట గల ఇంటర్వ్యూ చేయగల నేర్పు, అనుభవము యుండవలెను. సోధకులు మంచి గణకులను ఎన్నుకొనవలెను. సాధారణంగా విస్తృత విచారణకు యీ పద్ధతి వినియోగింతురు.

5. **ప్రశ్నావళి :** గణాంక పరిశోధకుడు గణాంక విచారణలోని విషయానికి సంబంధించిన పూర్తి సమాచారమును రాబట్టుటకు అనువైన ప్రశ్నల జాబితాను రూపొందించును. దీనినే ప్రశ్నావళి లేదా షెడ్యూలని అందురు. ఈ రెండింటి మధ్య విషయపరంగా భేదము లేనప్పటికి వానిని నిండే విధానములో భేదముండును. గణకులు భోగట్టా యిచ్చే వారిని ముఖాముఖిగా ప్రశ్నించి సమాధానాలు రాబట్టి షెడ్యూళ్ళను నింపెదరు. కాని ప్రశ్నావళి భోగట్టా యిచ్చే వారికి పోస్టు ద్వారాగాని, మరొక విధంగా కాని పంపించి, వాటిని నింపి తిరిగి పంపవలసినదిగా అర్థిస్తారు. అందువలన ప్రశ్నావళిని భోగట్టా యిచ్చేవారే నింపెదరు. కొన్నిసార్లు ప్రశ్నావళి నింపడంలో సహాయపడుటకు గణకులను కూడ పంపడం జరుగవచ్చును.

ప్రశ్నావళిని భోగట్టా యిచ్చే వారికి పంపునపుడు విచారణోద్దేశాన్ని వారికి తెల్పుచు వారి సహకారాన్ని అర్థిస్తూ, నింపిన ప్రశ్నావళిని ఒక నిర్ణీత కాలంలో తిరిగి పంపవలసినదిగా ప్రార్థిస్తూ వారిచ్చిన భోగట్టా రహస్యంగా ఉంచుతామని హామీ యిస్తూ ఒక ఉత్తరం వ్రాసి ప్రశ్నావళికి జతపరచి పంపవలె. నింపిన ప్రశ్నావళి తిరిగి పంపుటకు తగినవన్ని తపాల బిళ్ళలంటించిన కవరును కూడ పంపడం మంచిది.

ప్రయోజనాలు

1. భోగట్టా యిచ్చేవారు సకాలంలో నింపిన ప్రశ్నావళిని తిరిగి పంపితే గణాంక సమాచార సేకరణలో కాలము, ద్రవ్యము, శ్రమ ఆదాయగును. 2. విస్తృత పరిధిలో గణాంక సేకరణకు ఉపయోగపడును. 3. సమాచారము యిచ్చే వ్యక్తులే ప్రశ్నావళిని నింపడం వలన గణాంక శోధకులు లేక గణకుల వలన యేర్పడే సాక్షికతకు విలువ వుండదు.

లోపములు

1. ప్రశ్నావళిని నింపేవారు విద్యావంతులు కానిచో సమాచారము రాబట్టడం సాధ్యపడదు. విద్యావంతులైన వారు నిర్లక్ష్యంగా, ఉదాసీనంగా నింపినా ఉపయోగముండదు. 2. ప్రశ్నావళి నింపే వారు వాస్తవాలు తెలుపకుండా తప్పుడు సమాచారము పంపే పరిస్థితి కలదు. 3. కొందరు తమ వ్యక్తిగత కారణాల వలన ఆదాయము, ఆస్తి, అలవాట్లు, స్వంత దస్తూరితో నింపుటకు సంసిద్ధత చూపరు. 4. ప్రశ్నావళి ద్వారా అనుబంధ ప్రశ్నలకు సమాచారము రాబట్టడం సాధ్యపడదు.

ప్రశ్నావళి పద్ధతిని మెరుగుపరచుటకు ప్రశ్నావళిలోని ప్రశ్నలు సూటిగ, తక్కువగనుండవలెను. ప్రశ్నావళిని త్రిప్పి పంపుటకు తగినన్ని తపాలా బిళ్ళలను కవరు కంటించిపంపవలెను. అవసరమనుకున్న దాని కంటే ఎక్కువ మందికి ప్రశ్నావళులను పంపవలెను. ప్రశ్నావళి జాగ్రత్తగా, యుక్తితో తయారు చేయవలెను. ప్రశ్నావళి తయారు చేయడంలో తొందరపాటు పనికిరాదు. ప్రశ్నలు తయారు చేయు వారికి విచారణ గురించి పూర్తి జ్ఞానముండవలెను. ప్రశ్నావళి తయారు చేయడం ఒక కళ. ప్రశ్నావళిని తొలి అధ్యయనానికి ఉపయోగిస్తారు. తరువాత దాని ఫలితాలు అనేక రకాలుగా ఉపయోగింతురు.

ప్రశ్నావళి తయారీలో గమనించవలసిన ముఖ్యాంశాలు

1. ప్రశ్నావళి విచారణను గురించిన పూర్తి పరిజ్ఞానంతో జాగ్రత్తగా తయారు చేయవలెను.
2. భోగట్టా యిచ్చే వారిపై ఎక్కువ శ్రమ, బాధ్యత ఉండకుండా చూడవలెను. (వారి ఓర్పును పరీక్షించరాదు) సందిగ్ధ ప్రశ్నలు వేయరాదు. గనుక ప్రశ్నావళి సంక్షిప్తంగా లేక చిన్నదిగా ఉండవలెను.
3. ప్రశ్నావళిలోవిచారణోద్దేశము, ధేయ్యము సమగ్రంగా ప్రతిబింబించవలెను.

4. ఉద్రిక్తమైన ప్రశ్నలు వేయరాదు.
5. సాధ్యమైనంత వరకు ప్రశ్నలకు జవాబులు అవును/కాదు అని చెప్పకలిగే విధంగా ఉండవలెను. సులభంగా బోధపడవలెను.
6. వేరువేరు భావాలకులోనైన ప్రశ్నలు వేరువేరుగా అడుగవలెను.
7. ప్రశ్నావలి సంక్షిప్తంగా, సమగ్రంగా, చూడముచ్చటగా యుండవలెను.
8. ప్రశ్నలకిచ్చిన జవాబులు సులభంగా పట్టికరించుటకు వీలుగా యుండవలెను.
9. ప్రశ్నలు స్పష్టంగా యుండవలెను.
10. ప్రశ్నలు తక్కువగా ఉండవలెను.
11. జవాబులిచ్చే వ్యక్తి యొక్క రహస్య భోగట్టాలు అడుగరాదు.
12. ప్రశ్నలు క్రమ పద్ధతిలో హేతుబద్ధంగా యుండవలెను.
13. జవాబులను సన్నిహితం చేసి సత్యాన్ని నిరూపించే విధంగా యుండవలెను.
14. జవాబులిచ్చే వారి సహకారాన్ని అర్థించవలెను.
15. జవాబులిచ్చుటకు ప్రత్యేక శిక్షణావస్యకత కల్పించరాదు.
16. బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నలు తయారు చేయవలెను.

ప్రశ్నావళి సంఖ్య - 1
వ్యాపార పరిపాలనా విభాగము
బిర్లా ఇన్స్టిట్యూట్ ఆఫ్ సైన్స్ అండ్ టెక్నాలజి

ప్రియమైన అమ్మా / అయ్యా !

ఢిల్లీ నగరంలోని సూపర్ బజార్లలో వస్తు కొనుగోలుకై వెళ్ళు మిమ్ము మీ అభిప్రాయం, సూపర్ బజార్లకు వెళ్ళే చాలా మంది అభిప్రాయం తెలుపుతుందని భావించి, యిష్టా యిష్టాలు తెలుసుకోవడంలో మీ సహాయాన్ని అర్థిస్తున్నాం. ఈ విచారణ, వినియోగదారులకు మరింత కొనుగోలు సౌకర్యాన్ని అందజేస్తుందని మా నమ్మకం. అందుకని దయచేసి మేము పంపే యీ ప్రశ్నావళిని పూరించి పోస్టు ద్వారా తిరిగి పంపగోరుచున్నాము. తపాలా బిళ్ళలంటించి, మా చిరునామా వ్రాసిన కవరు దీనితో జతపరచడమైనది.

మీరు యిచ్చే సమాచారం (భోగట్టా) రహస్యంగా ఉంచుతామని హామి యిస్తున్నాము.

కృతజ్ఞతలతో.............

విశ్వాసపాత్రుడు

....

సూపర్‌బజార్

ప్రశ్నావళి - వినియోగదారుల అభిప్రాయాలు

నోట్ - నిర్దేశించిన స్థలంలో గుర్తు (4) ఉంచాలి.

A. సాధారణ ప్రశ్నలు

పేరు :

చిరునామా :

వృత్తి : వయస్సు

సేవ ☐ స్త్రీ ☐ పురుషుడు ☐

వ్యాపారము ☐ వివాహ స్థితి ☐

ఇతరాలు ☐ వివాహితలు ☐ అవివాహితులు ☐

కుటుంబములోని సభ్యుల సంఖ్య — నెలసరి ఆదాయం

1 నుండి 3 ☐ — 100 నుండి 500 ☐

3 నుండి 6 ☐ — 500 నుండి 1000 ☐

6కు పైన ☐ — 1000 నుండి 2000 ☐

2000 పైన ☐

B. నెలకు ఎన్ని పర్యాయాలు సూపర్‌బజార్‌కు వెళ్తారు ?

1 - 5 ☐

5 - 10 ☐

10కి పైగా ☐

C. వస్తువులు కొనేందుకు ప్రత్యేకంగా వారంలో ఒకరోజు యిష్టపడతారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

అవును అన్నట్లైతే ఏ రోజు

ఆది ☐ సోమ ☐ మంగళ ☐ బుధ ☐ గురు ☐

శుక్ర ☐ శని ☐

D. మీరు రోజు కొనే వస్తువులు సూపర్‌బజార్ నుండే కొంటారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

E. సూపర్ బజార్ మిమ్ము నాకర్షించుటకు కారణం ?

1. సరసమైన ధరలు — అవును ☐ కాదు ☐

2. నమ్మకమైన ధరలు అవును ☐ కాదు ☐

3. బేరమాడే అవసరం లేకపోవడం అవును ☐ కాదు ☐

F. మీ అభిప్రాయంలో సూపర్‌బజార్ సరసమైన లాభాన్ని మాత్రమే తీసుకుంటుంది.

అవును ☐ కాదు ☐

G. సూపర్‌బజారు వెళ్ళుటకు కారణాలు

1. అన్ని వస్తువులు ఒకే చోటు దొరకడం అవును ☐ కాదు ☐

2. వస్తువు అక్కడ దొరుకుతుందని నమ్మకం అవును ☐ కాదు ☐

3. ఎంచుకునేందుకు చాలా వస్తువులు లభించును అవును ☐ కాదు ☐

4. వస్తు సప్లయి తగ్గినపుడు కూడా వస్తువు లభించును అవును ☐ కాదు ☐

5. నాణ్యత గల వస్తు లభ్యత అవును ☐ కాదు ☐

6. వస్తు నాణ్యతపై నమ్మకం అవును ☐ కాదు ☐

7. వస్తువుల కొనుగోలుపై వెచ్చించు కాలం అవును ☐ కాదు ☐

H. సూపర్‌బజారులో వస్తు అమ్మకందారులు ఏ విధంగా వున్నారని భావిస్తారు? ఒక్క జవాబుకు మాత్రమే (4) గుర్తు వుంచాలి.

ఎ) శ్రద్ధ గలవారు ☐ శ్రద్ధలేని వారు ☐

బి) అణుకువగలవారు ☐ అమర్యాదగా ప్రవర్తించువారు ☐

సి) సహకరించువారు ☐ సహకరించనివారు ☐

డి) సమర్థవంతులు ☐ అసమర్థులు ☐

H_1. సూపర్‌బజారుకు వెళ్ళినపుడు అల్పాహారశాలకు వెళ్తారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

H_2. అక్కడ వాహనాలు నిలిపే స్థలం వుండాలని భావిస్తారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

H_3. మీకు కావలసిన వస్తువు కొనడానికి ఏమైనా యిబ్బంది నెదుర్కొనుచున్నారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

I. మీరు సూపర్‌బజారుకు వెళ్ళుటకు కారణం

1. మీ యింటికి దగ్గర అవును ☐ కాదు ☐

2. మీ యింటికి వెళ్ళే దారిలో వున్నది అవును ☐ కాదు ☐

3. ఊరికి మధ్యలో వున్నది అవును ☐ కాదు ☐

J. సూపర్‌బజారులో మీరు వాటాదారులా ?

అవును ☐ కాదు ☐

J_1. వాటాదార్లకు తగ్గింపు మిమ్మునాకర్షిస్తుందా ?

అవును ☐ కాదు ☐

J_2. స్త్రీలను అమ్మకందారులుగా నియమించడం మీరు యిష్టపడతారా ?

అవును ☐ కాదు ☐

J_3. సూపర్‌బజార్‌లో వస్తువుల ప్యాకింగ్ సంతృప్తికరంగా వున్నదా ?

అవును ☐ కాదు ☐

J_4. సూపర్‌బజారుకు వెళ్ళుటకు యిష్టపడే కారణాలు వరుస క్రమంలో మొదటి మూడు పేర్కొనండి.

(జవాబులు నిర్ణయించిన స్థలంలో అంకెలు వేయండి).

నాణ్యత ☐

ఒకచోట అన్ని వస్తువులు దొరుకును ☐

ధర ☐

సేవ ☐

ప్రదేశం ☐

కాలం పొదుపు ☐

వాటాదారుడవడం వలన ☐

6. **టెలిఫోన్ విచారణలు :** ఒక వ్యాపార సంస్థ తన వస్తువులను గురించి సర్వే జరపతలచినపుడు, మొదట ఆ వస్తువుల వినియోగదారుల జాబితాను తయారుచేసి, దాని ప్రకారం టెలిఫోను ద్వారా ప్రతి వ్యక్తి నుండి సమాచారము సేకరింపవచ్చును. అమెరికన్ ప్రకటన, టెలివిజన్ సంస్థలు యీ పద్ధతిని విస్తృతంగా వినియోగించును. ఈ పద్ధతి భారి విచారణకు పనికిరాదు. తక్కువ ఆదాయ వర్గాలను కలుసుకోలేము. పూర్తి సమాచారము లభిస్తుందనే నమ్మకం లేదు. ఈ మధ్య కాలంలో ఎలక్ట్రానిక్ మీడియా విస్తరించిన నేపథ్యంలో గణాంక సమాచారాన్ని 'ఈ' మెయిల్, ఎస్‌యంఎస్ మొదలైన అనేక సాధనాల ద్వారా సేకరించే అవకాశం పెరిగింది.

2.4.2 ద్వితీయ లేక గౌణ దత్తాంశము - సేకరణ మూలాలు : ప్రభుత్వము, లేక వ్యక్తి, లేదా ప్రైవేటు సంస్థ లేదా ప్రభుత్వము యిది వరకే సేకరించి, విశ్లేషించిన దత్తాంశాన్ని, గణాంక విచారణలో ఉపయోగించిన దత్తాంశాన్ని మళ్ళీ గణాంక విచారణలో ఉపయోగిస్తే దానిని ద్వితీయ లేక గౌణ దత్తాంశమందురు.

ద్వితీయ దత్తాంశము సేకరింపబడిన మూలాలను ద్వితీయ మూలాలందురు. చాలా అధ్యయనాలలో, విచారణకు సంబంధించిన అనేక విషయాలను గూర్చిన సమాచారాన్ని మొదటిసారిగా సేకరించడం ఆచరణ సాధ్యము కాకపోవచ్చును. అట్టి పరిస్థితులలో అనేక మూలాల నుండి ద్వితీయ దత్తాంశమును స్వీకరింపవచ్చును.

ద్వితీయ దత్తాంశమూలాలు - వర్గీకరణ

ద్వితీయ లేదా గౌణ దత్తాంశం రెండు రకాలుగా లభ్యమవుతుంది. I. ముద్రితాలు, II. అముద్రితాలు. అచ్చు వేయబడిన దత్తాంశాన్ని ముద్రితాలని, వ్రాత పతుల్లో వున్న దత్తాంశాన్ని అముద్రితాలని అంటాము.

I **ముద్రితాలు :** ప్రభుత్వ, ప్రభుత్వేతర సంస్థలు, అంతర్జాతీయ సంస్థలు వ్యాపారము, వాణిజ్యము, శ్రామికులు, ధరలు, వినియోగము, ఉత్పత్తి, పరిశ్రమలు, వ్యవసాయము, ఆదాయము, ఆరోగ్యము, జనాభా, విదేశీ మారకము, సామాజిక - ఆర్థిక అంశాలకు సంబంధించిన దత్తాంశమును గణాంక రిపోర్టులుగా కాలవ్యవధులలో (నెల, త్రైమాసిక, వార్షిక) ప్రచురించుచుందురు.

యీ విధమైన ప్రచురణలు ప్రధానమైన ద్వితీయశ్రేణి దత్తాంశముగా తోడ్పడును.

(ఏ) అధికారిక ప్రచురణలు, రిపోర్టులు : అంతర్జాతీయ ద్రవ్య సంస్థ, అంతర్జాతీయ విత్త కార్పోరేషన్, ఐక్యరాజ్య సమితి, ప్రపంచబ్యాంకు, అంతర్జాతీయ కార్మిక సంస్థ మొదలగు వారి ప్రచురణలు. కేంద్ర, రాష్ట్ర, స్థానిక ప్రభుత్వాల అధికారిక ప్రచురణలు. ఉదా : మహలనోబిస్ కమిటీ రిపోర్టులు, రిజర్వుబ్యాంకు బులెటిన్ మొదలైనవి జాబితాలోకి వస్తాయి.

(బి) పాక్షిక ప్రభుత్వ సంస్థల ప్రచురణలు : స్థానిక సంస్థల, జిల్లా సంస్థల, మునిసిపాలిటీల ప్రచురణలు ఈ కోవలోకి వస్తాయి.

(సి) ప్రైవేటు ప్రచురణలు : (i) ఇండియన్ ఛాంబర్ ఆఫ్ కామర్స్, ఇనిస్టిట్యూట్ ఆఫ్ ఛార్టర్డ్ అకౌంటెన్సీ మొదలగు వ్యాపార, వృత్తి సంస్థల ప్రచురణలు (ii) కామర్స్, క్యాపిటల్, ఇండియన్ ఫైనాన్స్ వంటి వ్యాపార, వాణిజ్య, ఆర్థిక పత్రికలు (iii) జాయింట్ స్టాక్ పరిశ్రమల వార్షిక నివేదికలు, (iv) పరిశోధనా సంస్థల, పరిశోధనా మేధావుల, విశ్వవిద్యాలయాల ప్రచురణలు, ఈ ప్రచురణలు, నివేదికలు ఒక నిర్ణీత కాలానికి అంటే వారానికి, నెలకు, సంవత్సరానికి క్రమబద్ధమైనవి లేదా తదర్థమైనవి కావచ్చును.

II. అముద్రితాలు **(Unpublished Sources) :** సాంఘిక పరిశోధకులు, విద్యావేత్తలు, కొన్ని సంస్థలు సేకరించిన దత్తాంశము ధన భారము వలన ప్రచురణ కాకపోవచ్చును. అటువంటి దత్తాంశమును తయారుచేసిన వారి నుండి రాతప్రతిని అభ్యర్థన మీద గ్రహింపవచ్చును. గౌణ దత్తాంశము పరిశోధనకు గ్రహించునపుడు పరిశీలించవలసిన (లక్షణాలు) అంశాలు: (ఎ) గౌణాంకాలు నమ్మదగిన, ఆధారపడదగినవిగా వుండవలెను. (బి) గణాంకాలు సరియైన మూలాల నుండి, సరియైన పద్ధతుల ద్వారా, పాక్షికత లేకుండా సేకరించినవై యుండవలె. (సి) ఖచ్చితమైనది, విచారణోద్దేశానికనువైనవిగా యుండవలె. (డి) సేకరించిన దత్తాంశము చాలినంతగా యుండవలె. ప్రస్తుత విచారణకు, కాలానికి సంబంధించినదైయుండవలె. ద్విదత్తాంశము ఉద్దేశం, స్వభావం, పరిమితుల గురించి తెలుసుకొనకుండా, ద్వితీయ దత్తాంశంగా విచారణలో ఎప్పుడూ ఉపయోగించరాదు. గత విచారణ పరిధి, ప్రమాణము, ఉద్దేశము, యదార్థతాస్థితి మొదలైన విషయాలన్నింటిలో ఏరూపత ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించాలి. లేనిచో సత్ఫలితాలు రావు.

2.5 గణాంక విచారణ పద్ధతులు

గణాంక విచారణ జరిపే పద్ధతులు వివిధ రకాలని అందులో జనాభా పద్ధతి, ప్రతిచయన పద్ధతి గురించి సంక్షిప్తంగా తెలుసుకున్నాం. గణాంక విచారణకు సంబంధించిన అన్ని అంశాలపై ప్రాతిపదికగా దర్యాప్తు చేస్తే జనాభా పద్ధతి అని అంటాము. ఆ విధంగాకాక గణాంక విచారణకు సంబంధించిన అంశాల్లో ప్రాతినిధ్యం వహించే కొన్ని అంశాల ప్రాతిపదికగా గణాంక విచారణ కొనసాగిస్తే ప్రతిచయన లేదా ప్రతిరూప గ్రహణ పద్ధతి అంటాము. ఈ పద్ధతులను గురించి విపులంగా తెలుసుకుందాం.

A జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతి : విచారణకు సంబంధించిన అన్ని అంశాల ప్రాతిపదికగా తీసుకొని విచారణ జరిపిస్తే దీనిని జనాభా పద్ధతి లేదా పూర్తి సెన్సస్ పద్ధతి అంటాము. ఈ పద్ధతి ద్వారా గణాంకాలు సేకరిస్తే ఒక వర్గానికి సంబంధించి అన్ని విషయాలు పూర్తిగా తెలుస్తాయి.

ప్రయోజనాలు

ఈ పద్ధతి వల్ల (1) విచారణా ఫలితాలు సంపూర్ణంగా వుంటాయి. (2) వ్యక్తిగత పాక్షికతకు అవకాశము తక్కువ. (3) ఇందులో చేసిన నిర్ణయాలకు సంపూర్ణత వల్ల వచ్చే బలం చేకూరును.

లోపాలు

ఈ విచారణ వలన : (1) దత్తాంశము సేకరించుటకు ఎక్కువ కాలం పడుతుంది. (2) దత్తాంశము సేకరించడంలో అనేక కష్టాలకు గురి అవుతాము. (3) దత్తాంశ సేకరణ వ్యయం అధికము. (4) ఇందులో అనేకమంది వ్యక్తుల సేవలను పొందవలె. తుదకు ఫలితాలు కచ్చితంగా వుంటాయో లేదో చెప్పలేము. (5) ఈ పద్ధతి అన్ని వేళాల సాధ్యపడదు. (6) దత్తాంశ సేకరణలో తర్ఫీదు పొందిన గణకులు లభించడం కష్టము.

B. ప్రతిచయన విచారణ పద్ధతి **(Sampling) :** ఒక సమూహము లేదా వర్గములోని కొన్ని అంశాల గణాంక పరిశోధనకు ఎంపిక చేస్తే దానిని ప్రతిచయనము అందురు. ఇటువంటి అంశాల నుండి సేకరించిన దత్తాంశాన్ని ప్రాతినిధ్యపు దత్తాంశము అందురు. అంటే ప్రాతినిధ్యం వహించే అంశాలపై ఆధారపడి విశ్లేషణ జరిపి ఫలితాలను జనాభాకు వర్తింపజేయడం జరుగుతుంది. ఇక గణాంక విచారణ మొత్తం వర్గానికి చేయవలెనా? లేదా ఒక వర్గంలోని కొన్ని అంశాలను సేకరించి చేయవలెనా? అనే సమస్య యేర్పడును. మొత్తం వర్గాన్ని జనాభా అని, ఒక వర్గం నుండి సేకరించిన కొన్ని అంశాలను ప్రతిచయనాలని(Sampling) అందురు. ప్రతిచయన పద్ధతిలో విశ్వాసాన్నంతా పరిగణించిక కొన్ని యూనిట్లను మాత్రమే పరిశీలించి విశ్వాన్నంతటికి వర్తించే విధంగా నిర్ణయాలు చేయుదురు. జనాభాలో ఉపభాగం ప్రతిచయనము. డాక్టరు రక్తపరీక్ష కొంత రక్తం శాంపిల్‌గా గ్రహించును. ప్రతిచయన పద్ధతిలో మూడు అంశాలు యిమిడియుండును. (1) ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవడం. (2) సమాచారాన్ని సేకరించడం. (3) జనాభాకు వర్తించే విధంగా నిర్ణయాలు చేయడం. యివి ఒక దానితోనొకటి ముడిపడి ఒక దానినొకటి ప్రభావితం చేయును.

ప్రతిచయన పద్ధతి కచ్చితమైన, విశ్వాసనీయమైన ఫలితాలు యివ్వాలంటే దానిని శాస్త్రీయంగా రూపొందించి సక్రమంగా నిర్వహించవలెను. మంచి ప్రతిచయనము నెన్నుకోవలెను. మంచి ప్రతిచయనమునకు ఈ క్రింది లక్షణాలుండవలెను.

(1) ప్రతిచయనము ఏ జనాభా నుండి గ్రహించబడినదో ఆ జనాభాకు ప్రాతినిధ్యము వహించవలెను.

(2) జనాభాలోని అంశాలు స్వతంత్రంగా వుండి ప్రతి అంశము ప్రతిచయనంగా తీసుకునే అవకాశము కలిగియుండవలె.

(3) వ్యక్తిగత పక్షపాతానికి తావివ్వరాదు.

(4) ప్రతిచయనాలుగా గ్రహించబడే అంశాలు జనాభాలోని అన్ని అంశాలతో ఏకరూపకత కలిగియుండవలెను.

(5) ప్రతిచయనము తగినంత పెద్ద పరిమాణములో సేకరించవలెను. అప్పుడే ఫలితాలలో ఖచ్చితత్వం హెచ్చుస్థాయిలో సాధింపవచ్చును. ప్రతిచయన దోషాన్ని అంచనా వేయవచ్చును.

(6) సులభంగా సేకరించడానికి వీలయ్యే అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా తీసుకొనరాదు.

ప్రతిచయన పద్ధతి వల్ల ప్రయోజనాలు

(1) తక్కువ కాలవ్యవధి, తక్కువ ఖర్చు, తక్కువ శ్రమతో కొద్ది మంది గణకులతో ఎక్కువ దత్తాంశాన్ని సేకరింపవచ్చును.

(2) గణాంకశోధన, నిర్వహణ శాస్త్రీయ పద్ధతులలో జరుగును, కనుక ఫలితాలు కూడా కావలసిన మేరకు ఖచ్చితంగా వస్తాయి.

(3) సరియైన ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొన్నచో జనాభా పద్ధతికన్నా ప్రతిచయన పద్ధతే ఉపయోగంగా వుండును.

(4) అసలు కొన్ని విచారణలలో ప్రతిచయన పద్ధతి అనివార్యము.

ప్రతిచయన పద్ధతి వల్ల లోపాలు

జనాభాకు ప్రాతినిధ్యం వహించని అంశాలను ఎన్నుకోవడం, గణకులలో పాక్షికత స్వభావం, గణాంక శోధన నిర్వహణ అశాస్త్రీయంగా జరిగినచో ఖచ్చితమైన ఫలితాలు సాధింపలేము.

2.6 ప్రతిచయన పద్ధతులు (Methods of Sampling)

ప్రతిచయనాలయను ఎన్నుకునే పద్ధతులను స్థూలంగా రెండుగా చెప్పవచ్చు. అవి యాదృచ్ఛిక, అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతులు. అదృష్టం మీద ఆధారపడి ప్రతిచయనాలు తీసుకునే పద్ధతిని యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి అని, గణాంక శోధకుని ఇష్టంపై ఆధారపడి ప్రతిచయనాలు తీసుకునే పద్ధతిని అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి అంటారు.

I. **యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి (Random Sampling) :** ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛిక పద్ధతిలో ఎన్నుకొందురు. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని అదృష్ట ప్రతిచయనము (Chance sampling) అని సంభావ్యతా ప్రతిచయనము (Random sampling) అని కూడా వ్యవహరింతురు. జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయకంగా ఎన్నుకోబడేందుకు సమాన అవకాశమిస్తూ, యాదృచ్ఛికంగా యెన్నుకోబడిన ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనమందురు. ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనమయ్యే అవకాశముండును. అయితే యే అంశము ఎన్నుకోబడుతుంది అనేది కేవలము దైవికము. ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనాలను అదృష్టవశాత్తుగా ఎన్నుకొందురు. అనగా లాటరీ పద్ధతిలాగా ఎన్నుకొందురు. అదృష్టము మాత్రమే ఏ అంశము ప్రతిచయనంలో చేర్చాలో నిర్ణయించును. ఎన్నుకోబోయే ప్రతిచయనాలను గురించి గణాంక శోధకునకు ముందుగా తెలియదు.

ఏ యే అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా ఎన్నుకుంటారో చెప్పడం ఎవరికి సాధ్యం కాదు. అందువల్ల ప్రతి అంశానికి ప్రతిచయనం అయ్యే అవకాశముంది. అందువలన దీనిని అదృష్ట ప్రతిచయనం అంటారు.

ఈ అదృష్టపు ఎన్నిక పద్ధతి సంభావ్యత సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించుకొనుటకు వీలు కల్పించుచున్నది. ప్రతిచయన సిద్ధాంతానికి మూలాధారము సంభావ్యతా సిద్ధాంతము. సంభావ్యతా సిద్ధాంతము ప్రకారం ఒక సంఘటన జరగడానికి గాని, జరగకపోవడానికి గాని సమాన అవకాశాలున్నవి. కాబట్టి ఒక అంశము ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకొనబడడానికి, ఎన్నుకోబడక పోవడానికి సమాన అవకాశాలున్నవి. అందువలన యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని సంభావ్యతా ప్రతిచయనమని కూడా వ్యవహరింతురు.

ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు ప్రతినిధి. ప్రతిచయనాన్ని యాదృచ్ఛిక (At Random) ఎన్నుకొన్నట్లయితే, ప్రతిచయన పరిమాణము సరిపడినంత పెద్దదిగా వున్నట్లయితే అట్టి ప్రతిచయనము జనాభాలోని అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యము వహించును. అందువలన యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ప్రాతినిధ్యపు ప్రతిచయనము అని కూడా పిలుస్తారు. ప్రతిచయన ఎన్నికలలో యాదృచ్ఛికత లేకుంటే పాక్షికత చోటు చేసుకుని అది ఆ ప్రాతినిధ్యపు ప్రతిచయనముగా వచ్చును. ప్రతిచయనాలు తీసుకునే పరిమాణంపై ఆధారపడి యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలను రెండుగా అంటే 1. అపరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము (Unrestricted Random Sampling), 2. పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము (Restricted Random Sampling) ప్రతిచయనాలు వీలైనంత ఎక్కువ తీసుకుంటే అపరిమిత యాదృచ్ఛిక అని, పరిమితంగా తీసుకుంటే పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి అంటాము. అపరిమిత పద్ధతి జనాభా పద్ధతి వైపుకు వెళుతుంది. సాధారణంగా పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతియే బహుళ ఉపయోగంలో వుంది.

1. **యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన ఎంపిక:** ప్రతిచయన ఎంపిక పూర్తిగా యాదృచ్ఛికంగా జరుగును. ప్రతిచయన ఎంపికలో లాటరీ పద్ధతి లేదా యాదృచ్ఛిక సంఖ్యా పట్టీ ద్వారా ప్రతిచయనం ఎన్నుకోబడును.

   (ఎ) లాటరీ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో జనాభాలోని అన్ని అంశాల నంబర్లుగాని, పేర్లుగాని చిన్న చిన్న కాగితపు చిట్టీల మీదగాని లేదా చిన్న చిన్న అట్టముక్కల మీదగాని వ్రాస్తారు. కాగితపు చిట్టీలయితే వానిని మడవవలెను. తరువాత వానిని డబ్బాలో వేసి బాగా కలుపవలెను. వీటిని ఎప్పటికప్పుడు బాగా కలుపుతూ ప్రతిచయన పరిమాణానికి కావలసినన్ని చిట్టీలను లేదా కార్డులను కళ్ళకు గంతలు కట్టబడిన వ్యక్తి చేత తీయించవలెను. బయటకు తీసిన చిట్టీలలోని అంశాలు ప్రతిచయనాలు. ఉపయోగించబడిన కాగితపు చిట్టీలు లేక అట్టముక్కలు, పరిమాణము, ఆకారములలో

ఒకే విధంగా వుండవలెను. లేనిచో పాక్షికతకు అవకాశముండును. ఉదాహరణకు 3000 మంది విద్యార్థులకు సంబంధించిన ప్రతిచయనము 3000 చిట్టీలలో వారి పేర్లు లేక నంబర్లు వేసి దాని నుండి చిట్టీలను తీసి ప్రతిచయనము ఎన్నుకోవచ్చును.

(బి) యాదృచ్ఛిక సంఖ్యాపట్టీలు : జనాభా ఎక్కువగా నున్నప్పుడు లాటరీ పద్ధతికి ప్రత్యామ్నాయంగా యాదృచ్ఛిక సంఖ్యాపట్టీ పద్ధతిలో యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొనవచ్చును. ఇందులో 1. టిప్పెట్ అనే గ్రంథకర్త తయారుచేసిన యాదృచ్ఛిక సంఖ్యల పట్టి. 2. ఫిషర్, యెట్స్ సంఖ్యలు 3. కెండాల్, బాబింగ్‌టన్ సంఖ్యలు 4. ర్యాండ్ కార్పోరేషన్ సంఖ్యలు - మొదలైనవి కలవు. వీటిలో టిపెట్ సంఖ్యలు బాగా ప్రాచూర్యంలో వున్నవి.

టిపెట్, జనాభా లెక్కల నుండి తీసుకున్న 41,600 అంకెలను 10,400, నాలుగు అంకెలు చేసి పట్టీ తయారుచేసెను. ఈ క్రింది 40 అంశాలను ఉదాహరణకు యిచ్చితిమి.

2952	6641	3992	7972	7669	5911	3171	5624
4167	9524	1545	1356	7203	5356	1300	2693
2370	7483	0408	2762	3563	1089	6919	7691
0560	5246	1112	6107	6008	8126	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

ఈ సంఖ్యలు అస్తవ్యస్తంగా కనిపించినా, వాటి యాదృచ్ఛికత అనేక పరీక్షల ద్వారాను, ఆచారణ రూపంలోను నిరూపించబడింది. ఈ పట్టీని ఉపయోగించే పద్ధతిని ఉదాహరణ పూర్వకంగా తెలుసుకుందాం. లోగడ ఉదాహరణలో 3000 మంది విద్యార్థులలో 300 మందిని ఎన్నుకొనుటకు, మొదట ఈ అంశాలకు 0001 నుండి 3000 వరకు నంబర్లు వ్రాయవలెను. తరువాత టిపెట్ పట్టీలోని ఏదో ఒక పేజి చూచి అందులో 3000కు లోపున్న సంఖ్యల నుండి 300 సంఖ్యలు తీసుకొనవలె. ఈ సంఖ్యలే ప్రతిచయనాలు.

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము తీసుకునే పద్ధతులు (Restricted Random Sampling) : జనాభాలోని అన్ని వర్గాలకు ప్రాతినిధ్యం కల్పించుటకు యాదృచ్ఛికతను పరిమితం చేయవచ్చును. అన్ని వర్గాలకు ప్రాతినిధ్యం కల్పించే విధంగా జనాభాను అమర్చి, వివిధ వర్గాల నుండి యాదృచ్ఛికంగా ప్రతిచయనం ఎన్నుకొనవచ్చును. అందువలన ఎక్కువ ఖచ్చితత్వం సాధించే అవకాశం కలదు. ఈ విధమైన ప్రతిచయన ఎన్నికకు మూడు ప్రధాన పద్ధతులు కలవు.

1) స్థరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము (Stratified Random Sampling) **:** ఈ పద్ధతిలో మొత్తం జనాభాను ఒక లక్షణం లేక లక్షణాల ఆధారంగా కొన్ని వర్గాలు లేక గుంపులుగా విభజింతురు. జనాభాను సాధ్యమైనంత సజాతీయ వర్గాలుగా విభజింతురు. ప్రతి వర్గం నుంచి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకొందురు. ప్రతిచయనాన్ని వర్గాల పరిమాణాల నిష్పత్తిలో ఎన్నుకుంటే దానిని అనుపాతస్థరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం (Proportionate startified random sampled) అందురు. వర్గాల పరిమాణంతో నిమిత్తం లేకుండా అన్ని వర్గాల నుండి సమానంగా గాని, ఎక్కువ తక్కువగా కాని ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకుంటే దానిని అనుపాత సహితం కాని స్థరిత యాదృచ్ఛిక (Disproportionate stratified random sampling) ప్రతిచయనము అనవచ్చును.

ఉదా : ఒక కాలేజీలోని విద్యార్థులు 1000. వీరు తరగతుల వారీగా క్రింది విధంగా వున్నారు.

తరగతులు	B.A.	B.Com.	B.Sc.	మొత్తం
విద్యార్థులు	100	500	400	1000
అనుపాత ప్రతిచయనం 10%	10	50	40	100

ఈ పద్ధతిలో అన్ని వర్గాలకు ప్రాతినిధ్యం వుండడం వలన ఖచ్చితత్వం ఎక్కువగా వుండును. ఏకపక్ష సంభవనీయత తగ్గును.

2. **గుచ్ఛ యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం (Clustered Random Sampling) :** ఈ పద్ధతిలో జనాభాను కొన్ని గుంపులు లేదా గుచ్ఛాలుగా (Groups)గా విభజింతురు. విభిన్న లక్షణాలు గలిగిన అంశాలను గుచ్ఛం అంటారు. ప్రతి గుచ్ఛంలోని జనాభాలో విజాతీయత ఉండేటట్లు వర్గీకరించెదరు. గుచ్ఛాల మధ్య వ్యత్యాసం సాధ్యమైనంత తక్కువగా వుండవలె. అప్పుడు గుచ్ఛాలన్ని ఒకే విధంగా వుంటాయి. గుచ్ఛాలలో ఒకటిగాని లేక కొన్నిగాని యాదృచ్ఛిక పద్ధతిని ప్రతిచయనంగా తీసుకుని అధ్యయనం చేయుదురు. ఉదా : క్రికెట్ ఆటగాళ్ళు (జనాభా) జట్లుగా యేర్పరచి, అన్ని జట్లలో ఓపెనింగ్ బ్యాట్స్‌మన్, మిడిల్ ఆర్డర్, వివిధ రకాల బౌలర్లు, ఆల్‌రౌండర్లు ఏర్పరచి, వాని నుండి ఒకటి లేక ఎక్కువ జట్లు ప్రతిచయనాలుగా గైకొందురు. ఆచరణలో గుచ్ఛాలను కాలం ప్రాతిపదికగా, ప్రాంతాలవారీగా కూడా తీసుకొనవచ్చును. ప్రాంతీయ ప్రాతిపదికపై జరిగే గుచ్ఛ ప్రతిచయనాన్ని విస్తీర్ణ ప్రతిచయనమందురు. గుచ్ఛ ప్రతిచయనాలను అనేక దశల ద్వారా తీసుకున్న యెడల దానిని బహుళదశ ప్రతిచయనమందురు. ఈ పద్ధతిలో ఖర్చు తక్కువగా వుండును కాని ఖచ్చితత్వం కూడా తక్కువగా వుండును.

3. **క్రమ ప్రతిచయనం (**Systamatic Sampling**) :** ఈ పద్ధతిలో జనాభాను ఆకారాది క్రమంలోగాని, భౌగోళికక్రమంలోగాని అమర్చవలె. ప్రతిచయన కాల మధ్య అంతరము నిర్ణయించవలెను. ప్రతిచయన పరిమాణం పై ఆధారపడివుండును.

$$\text{ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరం} = \frac{\text{జనాభా పరిమాణం}}{\text{ప్రతిచయన పరిమాణం}}$$

ప్రతిచయనాల ఎంపిక మొదలు పెట్టడం, యాదృచ్ఛిక పద్ధతి ప్రకారం తెలుసుకోవలెను.

ఉదా : ఒక కాలేజీలోని 100 మంది వాణిజ్యశాస్త్ర విద్యార్థులలో 10 మందిని ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకొనవలెననుకొనిన మొదట వారి పేర్లను ఆకారాది క్రమంలోగాని, లేక తరగతి క్రమసంఖ్య క్రమంలోగాని మొత్తం 100 మంది జాబితాను తయారుచేయవలెను.

$$\text{ప్రతిచయనాల మధ్య దూరం} = \frac{100}{10} = 10$$

అనగా ప్రతి 10వ విద్యార్థిని ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకొనవలెను. కాని ఏ విద్యార్థి అనేది ఈ దశవరకు తెలియదు. ప్రతి విద్యార్థి ప్రతిచయనంలో చేరే అవకాశం వుంది. ఇప్పుడు ప్రతిచయన ఎన్నిక ఎక్కడ మొదలుపెట్టవలెనో నిర్ణయించవలెను.

ప్రతిచయనాల మధ్య అంతరం 10 కాబట్టి, మొదటి 10లోపల ఎక్కడైనా ప్రారంభించవచ్చును. కాని అది యాదృచ్ఛిక పద్ధతిపై జరగాలి. లాటరీ వేస్తే ఆరవ విద్యార్థి వచ్చాడనుకుందాము. అప్పుడు ఏ యే విద్యార్థి ఎన్నుకోబడ్డాడో తెలియును. అంటే 6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96... విద్యార్థులు ప్రతిచయనాలు. ఈ పద్ధతి సులువైనది. ఫలితాలు కూడా ఖచ్చితంగా వుంటాయి. కాని అమర్చేటపుడు జాగ్రత్త వహించాలి. నిష్పాక్షికత అవసరం.

యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి - ప్రయోజనాలు - పరిమితులు :

ఈ పద్ధతి వల్ల : 1. వ్యక్తిగత పాక్షికతకు తావులేదు, 2. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము మొత్తం జనాభాకు మంచి ప్రాతినిధ్యము వహించును. 3. గణాంక శోధకుడు తన అంచనాలలో గల యదార్థత నిర్ణయించుకొనగలడు.

దీని వల్ల పరిమితులు కూడా లేకపోలేదు. అవి :

1. ఈ పద్ధతిలో మొత్తం అన్ని అంశాలకు జాబితా తయారుచేయవలె. శోధకునకు అంశాలన్నీ తెలియకపోయినచో యీ పద్ధతి వినియోగించడం సాధ్యపడదు. 2. అన్ని అంశాలకు కాగితపు చిట్టీలు తయారుచేయడంతో కాల, ధన వ్యయాలతో కూడియుండును. 3. ప్రతిచయన పరిమాణం పరిమిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం కంటే పెద్దగా తీసుకొనవలె. లేని యెడల గణాంక విశ్వసనీయత తగ్గును. 4. ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనాలకు అనేకమంది ప్రజల నుండి సుదూర ప్రాంతాల నుండి సేకరించడం హెచ్చు వ్యయంతో కూడియుండును.

II. అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనము (Non-Random Sampling) : ఈ పద్ధతిని ఉద్దేశ పూర్వక ప్రతిచయనము (Purposive Sampling), బుద్ధిపూర్వక ప్రతిచయనము (Deliberate Sampling), నిర్ణయ ప్రతిచయనము (Judgement Sampling) అని కూడా వ్యవహరింతురు. ఈ పద్ధతిలో గణాంక శోధకుడు విచారణలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహించే పనిని ఎన్నుకొనును. ఇందు ప్రతిచయనాల ఎంపిక మూడు విధాలుగా జరుగును.

1. **నిర్ణయ ప్రతిచయనము (Judgement Sampling)** : ఇది బాగా తెలిసియున్న ప్రతిచయనాలన గణకుడు తీసుకునే పద్ధతి. తీసుకున్న ప్రతిచయనాలు జనాభాలోని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తాయో లేదో అని విచారణోద్దేశానికి, ధ్యేయానికి తగినట్టు వున్నాయో లేదో అని యుక్తా యుక్తవిచక్షణతో నిర్ణయించి సరిపోతాయి అని భావించిన తరువాత శోధకుడు వీటిని ఎంచుకొంటాడు. ప్రతిచయనాలుగా ఎంపిక చేసే అంశాలను గణాంకశోధకుడు తీసుకుంటాడు. కనుక ఈ పద్ధతిని నిర్ణయ ప్రతిచయనమని అంటారు. శోధకుని విచక్షణ ప్రతిచయన ఎన్నిక గురించి తుది నిర్ణయం చేయును.

2. **కోటా ప్రతిచయనము (Quota Sampling)** : ఈ పద్ధతిలో గణాంక శోధకుడు జనాభాను కొన్ని వర్గాలుగా విభజించి ఒక్కొక్క వర్గంలో ఎన్ని అంశాల నుండి సమాచారము సేకరింపవలెనో నిర్ణయించి, ఆ తరువాత - ఉపకోటాలను నిర్ణయింతురు. ఈ ఉపకోటాల మొత్తము మొత్తం కోటాకు అంటే మొత్తం ప్రతిచయన పరిమాణానికి సమానము. తనకిచ్చిన కోటాను పూర్తిచేయుటకు ఆయా వర్గాల క్రిందకు వచ్చే యే అంశాలనైనా ప్రతిచయనాలుగా తీసుకునే స్వేచ్ఛ శోధకునకు వుండును. ఈ పద్ధతిని మార్కెట్ సర్వే, ప్రజాభిప్రాయసేకరణ సర్వేలకు ఉపయోగింతురు.

ఉదా : ఆకాశవాణి కార్యక్రమాలపై 500 మంది నుండి అభిప్రాయసేకరణకు 5గురు శోధకులను నియమించి ఒక్కొక్కరు 100 మంది నుండి అభిప్రాయాలు సేకరించవలెనని కోటా నిర్ణయించవచ్చును. ప్రతిశోధకుని కోటాలో 50 మంది మగవారు, 50 మంది ఆడవారు వుండాలని, అందులో ఉద్యోగులు, నిరుద్యోగులు, అల్పాదాయ, మధ్యాదాయ, అధికాదాయ వర్గాల వారుండాలని, 15సం॥లలోపువారు, 15 - 50 సం॥ల మధ్య వయస్కులు, 50 సం॥లపై బడ్డవారు వుండాలని, ఒక్కొక్క ఉపవర్గానికి కోటా నిర్ణయించవచ్చును. ఉపవర్గాలకోటా శోధకుని మొత్తం కోటాకు సమానము. ఆయా వర్గాల కోటాకు మించకుండా శోధకుడు వ్యక్తులను ఎన్నుకొని అభిప్రాయాలను సేకరించవలెను.

3. సౌలభ్యప్రతిచయనము (Convinienice Sampling) : ఈ పద్ధతిలో శోధకుడు ఏ అంశాల నుండి సమాచారము తయారుగా అందుబాటులో వున్నదో ఆ అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా గ్రహించును. లేదా అతనికి వీలుగా, సౌలభ్యంగా వున్న అంశాలను ప్రతిచయనాలుగా తీసుకుని సమాచారాన్ని సేకరించును. కాని యిది అంత మంచి పద్ధతి కాదు.

అయాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి - ప్రయోజనాలు : ఈ పద్ధతి వల్ల వివిధ ప్రయోజనాలున్నాయి. అవి : 1. ఈ పద్ధతిలో ప్రాముఖ్యము గల అన్ని అంశాలను నిర్ణయించి ప్రతిచయనంగా తీసుకోవచ్చును. 2. జనాభాలో అన్ని అంశాలు తెలియనపుడు తెలిసిన అంశాలనే వివిధ వర్గాలుగా విభజించి అన్ని వర్గాలకు ప్రాతినిధ్యము కల్పిస్తూ ప్రతిచయనము ఎన్నుకొనవచ్చును. 3. ఈ పద్ధతిలో ద్రవ్యము, కాలము ఆదాయమగును.

లోపాలు : ఈ పద్ధతిలో 1. గణాంక శోధకుని వ్యక్తిగత పక్షపాత బుద్ధి ఎన్నుకున్న ప్రతిచయనాలపై ప్రభావం చూపును. 2. ఖచ్చితమైన ఫలితాలు రాబట్టలేము. గణాంక విచారణ పరిధి విస్తృతమైతే ఈ పద్ధతిలో ప్రతిచయనాన్ని ఎన్నుకోవడం కష్టము. 3. గణాంక శోధకుని సమర్థతపై, నిజాయితీపై, నిశిత పరిశీలనా బుద్ధిపై ఫలితాలు ఆధారపడును మొదలైన లోపాలున్నాయి.

ఏ పద్ధతి వినియోగించవలెననే విషయము, విచారణా స్వభావము అందుబాటులో గల వనరులు, కాలము, కావలసిన యదార్థత మొదలగు అంశాలపై ఆధారపడియుండును.

విస్తృత ప్రతిచయనము (Extensive Sampling) : ప్రతిచయనాలు వీలైనంత ఎక్కువ తీసుకున్నట్లయితే విస్తృత ప్రతిచయన పద్ధతి అంటారు. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని సాధ్యమైనంత ఎక్కువ అంశాల నుండి సేకరించవలెను. నిజానికి జనాభాలో అన్ని అంశాలు యిమిడియుండవు. అందువలన యిది కూడా ఒక ప్రతిచయన పద్ధతే. ఫలితాలలో యదార్థత హెచ్చుగానుండును.

2.7 ప్రతిచయన సూత్రాలు (Principles Sampling)

ప్రతిచయన పద్ధతులకు ప్రాతిపదికలైన సంభావ్యతా సూత్రము, గణాంక క్రమ సూత్రం, బృహత్ సంఖ్యా జడత్వ గణాంక సూత్రాలను గురించి సంక్షిప్తంగా తెలుసుకుందాం.

1. **సంభావ్యతా సూత్రము (Theory of Probability) :** యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి సంభావ్యతా సూత్రం ఆధారంగా ప్రతిపాదించబడింది. సంభావ్యత అనే భావన గణితశాస్త్ర భావన. అందువల్ల గణాంక సంభావ్యతా సూత్రము గణిత సంభావ్యతా సూత్రము నుండి గ్రహించబడినదని గుర్తింపవచ్చును.

   యాదృచ్ఛికంగా కొన్ని అంశాలను పెద్ద సమూహమునుండి ఎన్నుకుంటే, ఆ ఎన్నుకున్న అంశాలకు పెద్ద సమూహములోగల అంశాల తాలూకు లక్షణాలుంటాయని సంభావ్యత సూత్రము తెలియజేయుచున్నది (కింగ్). ఉదా : ఒక నాణాన్ని చాలాసార్లు ఎగురవేస్తే సగంసార్లు బొమ్మపడడానికి, సగంసార్లు బొరుసు పడడానికి అవకాశాలున్నాయి.

   ఒక సంఘటన 'a' సార్లు జరిగినపుడు, 'b' సార్లు జరగనపుడు

$$\left.\begin{array}{l} \text{జరిగే అవకాశాలు} = \dfrac{a}{a+b} \\ \text{జరగని అవకాశాలు} = \dfrac{b}{a+b} \end{array}\right\} \text{సూత్రాల ద్వారా లెక్కించవచ్చును}$$

   అందువల్ల సంభావ్యతా సూత్రరీత్యా, జనాభా నుండి సాధ్యమైనన్ని హెచ్చు అంశాలను యాదృచ్ఛికంగా తీసుకున్న అంశాలకు జనాభా మొత్తానికి వున్న లక్షణాలన్నీ వుండే అవకాశాలున్నాయి.

2. **గణాంక క్రమ సూత్రము (Law of Statistical Regularity) :** మొత్తం జనాభా నుండి చాలా అవసరమైనంత పెద్ద ప్రమాణము

గల ప్రతిచయనము తీసుకుంటే, సగటున ఆ ప్రతిచయనము తప్పక జనాభాలో గల అన్ని లక్షణాలను సూచించును. దీనినే గణాంక క్రమసూత్రమందురు. గణాంక క్రమసూత్రము సంభావ్యతా సూత్రమునకు ఉపసూత్రము. ఉదా॥ ఒక పెట్టెలో 500 తెల్ల బంతులు, 2000 ఎర్ర బంతులు వున్నాయనుకొందాము. ఆ సమూహము నుండి ఒక వ్యక్తి, 250 బంతులు (యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనంగా) తీసినాడని అనుకొనిన, బహుశా యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనంలో 50 తెల్లబంతులు, 200 ఎర్రబంతులు బయటకు వచ్చే అవకాశాలున్నాయి.

దీనిని విపర్యంగా (Converse) త్రిప్పి చెబితే 250 బంతులు, యాదృచ్ఛికంగా సమూహము నుండి బయటకు తీస్తే, 50 తెల్లబంతులు, 200 ఎర్రబంతులు బయటకు వస్తే సమూహంలోగల అంటే పెట్టెలో 2500 బంతులలో 50 తెల్లబంతులు, 200 ఎర్రబంతులు వుండి వుంటాయనుకొనవచ్చును. సంభావ్యతా సూత్రాన్ని త్రిప్పిచెబితే గణాంక క్రమసూత్రమగును.

గణాంక క్రమసూత్రము : పరిమితులు

(ఎ) మొత్తం జనాభా నుండి ఎన్నుకొనే అంశాలు యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకోవలెను.

(బి) ఎన్నుకొనే ప్రతిచయనాలు అవసరమైనంత ఎక్కువగా యుండవలెను. ఇలా చేయడం వలన సంభావ్యతా దోషాలు తొలగిపోవును.

3. **బృహత్ సంఖ్యా జడత్వ సూత్రము (Law of Inertia of Large Numbers) :** గణాంక క్రమసూత్రానికి యిది ఉపసూత్రము. ప్రతిచయనము పెద్దదైన కొద్దీ యదార్థత ఎక్కువగా వుండును. ఉదా॥కు ఒక నాణాన్ని 10 సార్లు ఎగురవేస్తే ఆరు సార్లు బొమ్మ, నాలుగుసార్లు బొరుసు పడవచ్చు. మరో 10 సార్లు ఎగురవస్తే, నాలుగుసార్లు బొమ్మ, ఆరుసార్లు బొరుసు పడవచ్చును.

ఇలాంటి ప్రయోగాలు ఎక్కువసార్లు చేస్తే ఒక అపక్రమం మరొకదానిని రద్దుచేస్తుంది. ఈ విధంగా పెద్ద అంకెల సముదాయానికి జడత్వం లేదా స్థిరత్వం ఎక్కువగా వుండును. పెద్ద అంకెలలో అధిక మార్పులుండవు. ఒకవేళ వున్నా క్రమానుగతంగా మెల్లగా జరుగును. స్వల్ప కాలంలో జరిగే క్రమరహితమైన మార్పులు దీర్ఘకాలంలో పెద్ద అంకెలు నిర్లక్ష్యం చేస్తాయి. అందువలన జనాభా నుండి గణాంక విచారణలో దత్తాంశ సేకరణ తరువాత మూడోదశ ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ, రెండోదశలో సేకరించిన దత్తాంశం, బృహత్ పరిమాణంలో జరిలంగా, అనేక దోషాలను కలిగి వుంటుంది. ఈ విధంగా వున్న దత్తాంశాన్ని సులువుగా అవగాహన అయ్యే విధంగా కుదించటం, అనవసర విషయాలను పరిహరించటం, లోపరహితంగా తీర్చిదిద్దే దశే ఈ మూడోదశ. ఈ దశలో చేపట్టే బాధ్యతలను గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

2.8 ఎడిటింగ్, యథార్థత, సమానీకరణ, దోషాలు

సేకరించిన సమాచారాన్ని విచారణకు అనుగుణంగా చేసేందుకుగాను ఎడిటింగ్, యదార్థాత, సమానీకరణ, దోషాలను పరిహరించడం వంటి చర్యలను తీసుకోవలసి వుంటుంది.

2.8.1 ఎడిటింగ్ (Editing) : మూడోదశలో మొదట దత్తాంశాన్ని దోషరహితంగా, యథార్థంగా, సంపూర్ణంగా ఎడిట్ (కూర్పు) చేయవలెను. సేకరించిన దత్తాంశాన్ని జాగ్రత్తగా పరిశీలించే పద్ధతినే ఎడిట్ చేయడమంటాము. ఎడిటింగ్ యొక్క ముఖ్యోద్దేశాలు పరిశీలించే పద్ధతినే ఎడిట్ చేయడమంటాము. ఎడిటింగ్ యొక్క ముఖ్యోద్దేశాలు (1) దత్తాంశంలో సంపూర్ణత చేకూర్చడం (Completeness). (2) దత్తాంశానికి కావలసినంత యథార్థత చేకూర్చడం. (3) దత్తాంశంలో అనుగుణ్యాత వుండేటట్లు చేయడం. దత్తాంశాన్ని విచారణకు తగినదిగా వుండేటట్లు చేయడం.

ఎడిటింగ్‌లో దత్తాంశంలోని అవసరమైన కొన్ని ముఖ్య విషయాలను ఆమోదించి (Accept) గ్రహించటం జరుగుతుంది. ఒకవేళ దత్తాంశంలోని పనికిరాని, సందర్భరహితమైన విషయాలను తీసుకోకుండా నిరాకరించ (Reject) వచ్చును. ముడి దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయకుండా ముందంజ వేస్తే తప్పు నిర్ణయాలు వచ్చే అవకాశాలున్నాయి. అందువల్ల ఎడిట్ చేయవలెను. సేకరించిన గణాంకాలలో సాధారణంగా అనేక అసందర్భమైనటువంటి (Unwarranted), అవసరమైనటువంటి (Unnecessary) అయిన దోషాలుంటాయి. దత్తాంశము సేకరించిన వారు గణాంకాలను అనేక తావుల నుంచి సేకరిస్తారు. గణాంకశోధనలో పూర్తి కచ్చితత్వము సాధించడం కష్టము. గణాంక శాస్త్రాధ్యయనంలో పూర్తి కచ్చితాన్ని సాధించలేకపోవడమనే లోటు సాధారణంగా వుంది. దత్తాంశము సేకరించేవారు సేకరించడంలో అనేక కష్టాలకు గురి అవుతారు. ప్రశ్నావళి నింపేటప్పుడు జాగ్రత్తగా నింపకపోవడం జరగవచ్చును. గణాంకశోధకులు పాక్షికబుద్ధితో మెలిగే అవకాశాలున్నాయి. అందువల్ల అతడు సేకరించిన దత్తాంశంలో అనేక దోషాలుండవచ్చును. అందువల్ల సేకరించిన దత్తాంశాన్ని జాగృత్తగా ఎడిట్ చేసి, విచారణకు సరిపడేటట్లు దత్తాంశాన్ని తగురీతిలో మార్చవలెను. అంతేగాని దత్తాంశాన్ని పూర్తిగా పాడుచేయరాదు. కొన్ని షెడ్యూళ్ళు తప్పుగా వుంటే వాటిని వదిలివేయవచ్చును. కాని ఈ వదలివేయడం కూడా జాగ్రత్తగా చేయవలెను. కొన్ని విచారణలలో కొన్ని షెడ్యూళ్ళను వదిలినా సాధారణ నిర్ణయాలు దెబ్బతినవు. కాని కొన్ని విచారణలలో అట్లా చేస్తే అసలు సమస్య తాలూకు స్వరూపము పూర్తిగా మారుతుంది. దత్తాంశంలో పూర్తి యథార్థత సాధించడం కష్టము, అంత అవసరం కూడా కాదేమో! దత్తాంశంలో యథార్థతను, సమానీకరణానికి దోషాలకు ఎంతవరకు తావివ్వడమనేది గణాంక విశ్లేషణలో ముఖ్యంగా పరిశీలించవలెను.

2.8.2 యథార్థత (Accuracy) : గణాంకశాస్త్రము, సంభావ్యతలను, అంచనాలను చదివే శాస్త్రము. గణితశాస్త్రంలో సంపాదించగల పూర్తి యథార్థత ఇందులో సంపాదించడానికి వీలుపడదు. ఖచ్చిత స్వభావం గల విజ్ఞాన శాస్త్రాలలో పూర్తి యథార్థత సాధించవచ్చును. కాని సాంఘిక శాస్త్రాలలోను, మానవుని చేష్టలను గురించి చదివే శాస్త్రాలలోను పూర్తి యథార్థత సాధించడం కష్టమవుతుంది. పరిశోధకునిలో గల కొన్ని గుణాలవల్లను, అతడు కొలతలకు వాడే పరికరాలలో గల దోషాల వల్లను సేకరించిన దత్తాంశపు యథార్థత దెబ్బతింటుంది. మానవుని చేష్టలు ఎప్పటికప్పుడు మారుతూ వుంటాయి. మానవుని చేష్టలకు సంబంధించిన విషయాలపై ప్రయోగాలు చేయడం, పరిశీలన చేయడం చాలా కష్టంగా వుంటుంది. విషయ సేకరణకు గణాంక శోధకుడు, ఆ విషయానికి సంబంధించిన మొత్తం జనాభాను గ్రణిస్తాడు. అప్పుడప్పుడు అంచనాల ద్వారా సేకరిస్తాడు. అందుచేత పూర్తి యథార్థత అసాధ్యమైనప్పటికి కావలసినంత యథార్థత (ఉండవలసినంత యథార్థత - Reasonable accuracy) ఆధునిక గణాంక పద్ధతుల ద్వారా సాధించవచ్చును. అందువల్ల సాధ్యమైనంత ఎక్కువ యథార్థత అనే పదమే సాపేక్షికమైనది. ఇది గణాంక విచారణ ఉద్దేశంపై ఆధారపడి వుంటుంది. నిజానికి చెప్పవలెననుకొంటే పూర్తి యథార్థత గణాంకశాస్త్రంలో జేసే భారీ విచారణలకు అక్కరలేదు. ఈ విషయాన్ని గురించి బౌలీ అన్న దేమిటంటే ప్రస్తుతము మనకున్న విజ్ఞాన పరిస్థితులలో, మనం గణన చేసే గణాంకపు కొలతల, నిర్ణయాలు, పూర్తి దత్తాంశము సాధ్యపడనందువల్ల సరిఅయిన లాఘవంతో (Precision) చేయలేము. గణాంకశాస్త్రంలోని కొలతలలో కొంతవరకు దోషాలకు తావివ్వవలెను. ఏ విషయాన్నైనా పూర్తి యథార్థతో వర్ణించడం కష్టము. నిజానికి గణాంకశాస్త్రము దోషాలు వుండి యథార్థంగా అసంపూర్ణంగా వుండే ప్రపంచంలోని విషయాలను తెలుసుకోవడానికి పనికివస్తుంది. ఏదైనా విషయం గురించి తెలుసుకోవడానికి పూర్తి యథార్థత అవసరం లేదని మనము గమనించినాము కదా, ఉదాహరణకు, భూమికి, చంద్రునికి గల దూరము సెంటీమీటర్లలో అంచనా వేయడంలో అర్థం లేదు. ఎందుకంటే ఈ దూరము అనేక లక్షల కిలోమీటర్లలో వుంటుంది. అట్లాగే బియ్యం వ్యాపారస్తుడు బియ్యం బరువును గ్రాములలో తూచడు. క్వింటాళ్ళలో తూచే వస్తువుల దగ్గర కిలోగ్రాముల బరువు తూస్తే చాలు. నిజానికి అనేక విషయాలలో కచ్చితమైన కొలత అవసరము. అసలు విలువను అంచనా వేస్తే చాలు. ఈ అంచనాలో సాధ్యమైనంత యథార్థత వుంటే మనము సంతృప్తి పడవచ్చును.

అయితే సాధ్యమైనంత యథార్థత అంటే ఏమిటి ? ఈ ప్రశ్నకు సరియైన సమాధానము చెప్పడం కష్టము. ఈ పదాన్ని

నిర్వచించడం కూడా కష్టము. అందువల్ల యథార్థత అనేది దత్తాంశం గుణంపైనా, గణాంక విచారణ ఉద్దేశంపైనా ఆధారపడుతుంది. కొన్ని విషయాలలో కచ్చితత్వపు సంప్రదాయిక ప్రమాణాలు (Conventional Standards of Accuracy) వుంటాయి. వీటిని గణాంక శోధకుడు ఆధారంగా తీసుకొని నిర్ణయాలు చేయవచ్చును. ఉదాహరణకు, హెచ్చుదూరాన్ని దగ్గర కిలోమీటర్లలో కొలిస్తే చాలు. అందువల్ల గణాంకశాస్త్రంలో పూర్తి యథార్థత అవసరం లేదు. సాపేక్ష యథార్థత వుంటే చాలు. సాపేక్ష యథార్థత (Relative accuracy) ఎట్లా సాధించినామో ఈ క్రింది ఉదాహరణ ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు. దత్తాంశ సమర్పణలో సాపేక్ష యథార్థతా పరిమితి ఎట్లా సాధించినామో పేర్కొనవలె. ఒక రాష్ట్రంలో పత్తి ఉత్పత్తి 45,000 టన్నులు (వెయ్యికి సవరించడం జరిగింది) అనుకొందాము. ఈ దత్తాంశంలోని యథార్థతా పరిమితిని కింద సవరించిన రీతులలో పేర్కొనవచ్చు. (ఎ) పత్తి ఉత్పత్తి 45,000 టన్నులు (వేలలో దగ్గరి పూర్ణాంకానికి సవరించడం జరిగింది) (బి) పత్తి ఉత్పత్తి 500 టన్నులు మించకుండా కలిపిగాని, తీసివేసిగాని 45,000 టన్నులు (45000 + 500) (సి) పత్తి ఉత్పత్తి 44,501 నుంచి 45,000 టన్నుల మధ్య వుంటుంది. (డి) పత్తి ఉత్పత్తి 45,000 టన్నులు (2 శాతానికి సరిపోతుంది).

2.8.3 సమానీకరణము (Approximation) : గణాంకశాస్త్రాన్ని నిర్వచించేటప్పుడు బోడింగ్‌టన్ "అంచనాలు కట్టి సంభావ్యతలను చదివే శాస్త్రమే గణాంకశాస్త్ర"మని చెప్పినాడు. అట్లాగే బౌలీ కూడా "గణాంక శాస్త్రము సరాసరి సత్యాలనే చెబుతుంది. ఈ సత్యాలను ఉండవలసిన యథార్థతా పరిమితిని బట్టి అంచనావేసి చెబుతారు'' అని చెప్పినాడు. ఈ రెండు నిర్వచనాలను బట్టి మనకు తెలిసిందేమిటంటే సేకరించిన దత్తాంశము వెంటనే ఉపయోగపడేస్థితిలో వుండదు. అటు వంటి దత్తాంశం నుంచి నిర్ణయాలు తీసుకోవడం మంచిది కాదు. అందువలన దత్తాంశగణాంకాలకు సమీకరణము అవసరము. సమీకరణము దత్తాంశ సేకరణ దశలో గాని, సమర్పణ దశలోగాని, దత్తాంశ విశ్లేషణ దశలోగాని చేయవచ్చును. ఏ పరిస్థితులలో కచ్చితమైన గణన సాధ్యపడదో ఆ పరిస్థితులలో సమీకరణము చాలా సహాయకారి. సమీకరణమంటే సేకరించిన అంకెలను దగ్గర పూర్ణాంకానికి సవరించడం (Round off) సేకరించిన పెద్ద పెద్ద అంకెలను సులభం చేసి ఉపయోగించడానికి, విశ్లేషించడానికి, కావలసినంత యథార్థత సంపాదించడానికి దగ్గర పూర్ణాంకానికి సవరిస్తే బాగుంటుంది. పెద్ద అంకెలు చూసిన వెంటనే తబ్బిబ్బు కల్గిస్తాయి. చూడటానికి, గ్రహించడానికి కూడా బాగుండవు. అప్పుడప్పుడు అసలు అంకెలు లభ్యమైనప్పటికీ వాటిని గణాంక విశ్లేషణ చేయడానికి వీలుగా దగ్గర పూర్ణాంకానికి సవరించడం మంచిది. కొన్ని కొన్ని విషయాలలో అసలు (Original) అంకెలు అనవసరము. అందువల్ల అంచనా వేసిన అంకెలు అంటే సమీకరణం చేసిన అంకెలు లక్ష్యసాధనకు సరిపడతాయి. ఉదాహరణకు, మనదేశంలో 1971లో జనాభా 54,73,68,926 అని అనుకొందాము. ఈ అంకెలు తబ్బిబ్బుగా వుంటాయి. గణాంక విశ్లేషణ కూడా సులభంగా వీలుపడవు. అటువంటప్పుడు జనాభా 55 కోట్లు అని దగ్గర పూర్ణాంకంలోనికి సవరించి చెబితే చాలు. లభ్యమైన దత్తాంశాన్ని సమీకరణం చేయడానికి రెండు ముఖ్యోద్దేశాలున్నాయి. (1) దత్తాంశాన్ని సరిగ్గా బోధపరచుకోవడానికి సమీకరణం చేసిన అంకెలు వీలుకలిగిస్తాయి. బోధపరచుకొనేటప్పుడు కలిగే తబ్బిబ్బు తొలగించవచ్చును. (2) సమానీకరణపు అంకెలు దత్తాంశాన్ని తారతమ్య వివేచన చేయడానికి వీలుకలిగిస్తాయి. బోధన పరచుకొనేటప్పుడు కలిగే తబ్బిబ్బు తొలగించవచ్చు. (3) సమానీకరణపు అంకెలు దత్తాంశాన్ని తారతమ్య వివేచన చేయడానికి వీలుకలిగిస్తాయి.

సమానీకరణ పద్ధతులు : అంకెలను సమానీకరణం చేసే ముందు ఎంతవరకు యథార్థత కావాలనే విషయాన్ని ఏ స్థానమునకు (ఉదా : వందలు, వేలు) సవరించవలెనో గుర్తించవలెను. వాడుకలో వున్నటువంటి, అందరూ అంగీకరించినటువంటి కొన్ని సమీకరణ పద్ధతులు కింద ఇచ్చినాము. వాటిని పరిశీలిద్దాము.

1. **కొన్ని చివర అంకెలను తొలగించి దగ్గర పూర్ణాంకానికి సవరించడం :** ఈ పద్ధతిలో సమీకరణం చేస్తున్న భాగాన్ని పూర్తిగా వదలివేయడం జరుగుతుంది. ఉదాహరణకు 98,421 అనే సంఖ్యను వేలకు సమానీకరణం చేస్తే 98,000 అవుతుంది. అట్లాగే 69,965 అనే సంఖ్య 69,000 అవుతుంది. ఈ పద్ధతిలో సమానీకరణము చేసిన విలువ అసలు అంకె విలువ కంటే తక్కువగా వుంటుంది. ఈ సూత్రాన్ననుసరిస్తే 2185 అనే సంఖ్య పూర్ణాంశానికి సరిపెట్టితే 21 అవుతుంది. 16.01 అనే సంఖ్య 16 అవుతుంది.

ఈ క్రింద ఇచ్చిన ఉదాహరణ పరిశీలిద్దాము. 76,250 అనే సంఖ్య కూడా 76,000గాను, 76922 అనే సంఖ్య 76000గాను గణన చేయవచ్చు. కాని ఆ రెండు సంఖ్యల విలువలు ఒకటి కావు. వాటి విలువలలో చాలా తేడా వుంది. ఇటువంటి తేడాలు ఈ పద్ధతిలో వదలివేయడం జరుగుతుంది. ఈ పద్ధతి వల్ల దత్తాంశానికి అధోభినతి (Downward Bias) ఏర్పడుతుంది. అంటే దత్తాంశ విలువలు అసలు విలువలకన్నా తగ్గుతాయి.

2. **అసలు అంకెను తరువాత హెచ్చు అంకెకు సవరించడం (Round Off) :** ఉదాహరణకు, 76,250 అనే సంఖ్య 77,000గాను, 76,922 అనే సంఖ్య కూడా 77,000గాను సమానీకరణం చేస్తారు. ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశానికి ఊర్ధ్వాభినతి (Upward Bias) అనే లోపము ఏర్పడుతుంది. అంటే దత్తాంశం విలువలు అసలు విలువల కన్నా హెచ్చవుతాయి. ఈ సూత్రాన్ని అనుసరించి 21.85 అనే సంఖ్య 22గాను, 16.01 అనే సంఖ్య 17గాను మారతాయి.

3. **అసలు అంకెకు దగ్గరగా వున్న అంకెతో సమానీకరణం చేయడం :** ఈ పద్ధతిలో అసలు అంకె స్థానంలో దగ్గరి పూర్ణాంకం వ్రాస్తారు. ఈ పద్ధతిలో 76,250 అనే సంఖ్య 76,000గాను, 76,922 అనే సంఖ్య 77,000గాను తీసుకుంటాము. ఈ పద్ధతి చాలా హెచ్చువాడుకలో వున్నది. ఈ పద్ధతిలో నిష్పాక్షికమైన అంచనాలు వస్తాయి. అందువల్ల దీనినే వాడతారు. ఈ సూత్రాన్ని అనుసరించి 21.85 అనే సంఖ్య 22గాను 16.01 అనే సంఖ్య 16గాను మారతాయి. ఈ సూత్రాన్నే శాతాలకు, నిష్పత్తులకు ఉపయోగించవచ్చు. ఉదాహరణకు, 63.9% అనేదానిని 64%గాను, 62.2% అనేదానిని 62%గాను పరిగణించవచ్చు. అట్లాగే $\frac{3}{4}$ అనే భిన్నము 1గాను, $1\frac{1}{4}$ అనేది కూడా 1 గాను, చెప్పవచ్చు.

ఈ పద్ధతిలో సూత్రమేమంటే సవరిస్తున్న భాగము పూర్ణాంకంలో (ఉదా : దగ్గరి వెయ్యికి సవరిస్తున్నప్పుడు 1000 పూర్ణాంకము) సగంకంటే ఎక్కువ వున్నట్లయితే విడిచిపెడుతున్న భాగానికి ముందున్న అంకెకు ఒకటి కలుపవలె. 76,992ను ఈ పద్ధతిలో సమానీకరణ చేస్తే 77,000 అవుతుంది. సమానీకరణ చేస్తున్న భాగము పూర్ణాంకంలో సగం కంటే తక్కువ వున్నట్లయితే ఆ భాగాన్ని విడిచిపెట్టవలె (ignore it) ఉదా : 76,250 అనే సంఖ్య 76,000 అవుతుంది. ఒకవేళ సమానీకరణ చేస్తున్న సంఖ్య పూర్ణాంకంలో సగానికి సరిగ్గా సమానమైతే, అట్లాంటప్పుడు విడిచిపెడుతున్న అంకెకు ముందున్న అంకెకు ఒకటి కలపవలె లేదా ఆ భాగాన్ని వ్రాయకుండా విడిచిపెట్టవలె. కాని అట్లాంటి అంకెలు చాలా ఉన్నప్పుడు సగం సందర్భాలలో ఆ భాగాన్ని విడిచిపెట్టి ఊరుకోవడం చేయవచ్చు. ఇట్లాంటి సందర్భాలలో ఆ భాగాన్ని విడిచిపెట్టి ఊరుకోవడం చేయవచ్చు. ఇట్లాంటి సందర్భాలలో ఆచరణీయమైన పద్ధతి ఏమిటంటే, సమానీకరణ చేస్తే సరి సంఖ్య (Even number) వచ్చేటట్లయితే వదలివేస్తున్న భాగానికి ముందున్న అంకెకు ఒకటి కలుపవలె లేదా సమీకరణ చేస్తే బేసి సంఖ్య (Odd number) వచ్చేటట్లయితే, సమనీకరణ చేస్తున్న భాగాన్ని విడిచిపెట్టవలె. ఉదాహరణకు 5.5ను సమానీకరణ చేస్తే 6 (సరిసంఖ్య) వస్తుంది. కాబట్టి సవరించవలె. 4.5ను సమానీకరణ చేస్తే 5(బేసి సంఖ్య) వస్తుంది. కాబట్టి సవరించకుండా ఆ భాగాన్ని విడిచిపెట్టవలెను. అంటే అది 4 (సరిసంఖ్య) అవుతుంది. ఇందులోని కిటుకు ఏమంటే సమీకరణ వల్ల సరిసంఖ్యలు రావాలి. మరొక ఉదాహరణ : 235ను సమానీకరణ చేస్తే 240 అవుతుంది. 325ను సవరిస్తే 320 అవుతుంది.

4. **అంకెలను ఒక దశాంశ స్థానానికి గాని, రెండు దశాంశ స్థానాలకుగాని, సమానీకరణం చేస్తే సరి అయిన నిష్పాక్షికమైన అంచనాలు వస్తాయి.**

ఉదాహరణ - (1) ఒక దశాంశ స్థానానికి సవరించడం.

అసలు సంఖ్య	సవరించిన సంఖ్య
105.876	105.9
104.218	104.2

(2) అసలు సంఖ్య	సవరించిన సంఖ్య
105.876	105.88
104.218	104.22

గమనిక :

(1) అంకెలను కలపడంలోగాని, తీసివేయడంలోగాని సమానీకరణ చేయవలెనంటే అసలు అంకెలను సమానీకరణము చేయకూడదు. కలిపిన తరువాత వచ్చిన మొత్తం సంఖ్యను, తీసిన తరువాత వచ్చిన సంఖ్యను సమానీకరణం చేయవలె.

(2) సమానీకరణం చేసిన అంకెను, అది అసలు సంఖ్య కాదని, సమానీకరణ చేసిన తర్వాత వచ్చిన సంఖ్య అని తెలిసేటట్టు వ్రాయవలె. ఉదా : కచ్చితమైన అసలు విలువ 8 అయితే దానిని 8గా వ్రాయవచ్చు. కాని 8కి అటు ఇటుగా వున్న సంఖ్యలను 8కి సవరించి వున్నట్లయితే అప్పుడు దానిని 8.0 అని వ్రాయవలె. కాబట్టి సమానీకరణం చేసిన సంఖ్య తరువాత సున్నా వున్నట్టయితే దానిని తప్పకుండా వ్రాయాలి.

(3) సమానీకరణం చేసిన అంకెలు వ్రాస్తున్నప్పుడు సమానీకరణం చేసిన పద్ధతిని, ఎంతవరకు సవరించినది - ఉదా : పదుల వరకా, వందల వరకా, లేదా వేల వరకా, - కూడా వ్రాయాలి.

2.8.4 దోషాలు (Errors) : గణాంక శాస్త్రంలో దోషము (Error), తప్పు (Mistake) అనే రెండు పదాలకు అర్థంలో తేడా గ్రహించవలె. సాధారణంగా నిత్యం వాడుకలో దోషము, తప్పు అనే రెండు పదాలు ఒకే అర్థంలో వాడుతున్నారు. కాని, గణాంకశాస్త్రంలో దోషమంటే తప్పన్న భావాము కాదు. గణితంలో గణనలు చేసేటప్పుడు వస్తాయి తప్పులు. దోషమంటే ఒక విషయం తాలూకు అసలు విలువలకు, అంచనా చేసిన విలువకు వుండే భేదము. గణాంకశాస్త్రంలో పూర్తి యథార్థత వీలుపడదని, అందువల్ల కావలసినంత యథార్థత చాలునని లోగడ ఈ అధ్యాయంలోనే చదివి వున్నాము. కావలసినంత యథార్థత కోసం సమానీకరణం చేసిన విలువలనే వాడతాము. ఈ సమానీకరణం చేసిన విలువకు అసలు విలువకు గల భేదము దోషమనిపించుకుంటుంది. ఉదాహరణకు, ఒక క్లాసులోని బాలుర వయస్సు సగటు గణన చేసినప్పుడు ఒక బాలుని వయస్సు 14 సంవత్సరాలకు బదులు 41 అని పొరపాటున వ్రాసి, గణించి వుండవచ్చు. ఈ పొరపాటునే తప్పు అంటాము. ఇంకో విచారణలో అనకాపల్లి కాలేజి ఉపాధ్యాయుల సరాసరి నెలసరి కుటుంబ ఖర్చు తెలుసుకోదలచినామనకొందాము. ఈ ఉపాధ్యాయుల జీతాలలో చాలా హెచ్చు వ్యత్యాసాలనుకుందాము. అటువంటప్పుడు యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిని ఉపయోగించి సరాసరి కడితే దోషము సంభవిస్తుంది. ఎందుకంటే ఈ విచారణలో స్తరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతిని వాడితే సరైన ఫలితము వస్తుంది. కాబట్టి ఒక ప్రతిచయన పద్ధతికి బదులు ఇంకో ప్రతి చయనపద్ధతి వాడితే దోషాలు వస్తాయి. ఇటువంటి దోషాలను గూర్చే గణాంకశాస్త్రంలో ఇప్పుడు ఇక్కడ అధ్యయనం చేస్తాము. దోషాలు అనేక కారణాల వల్ల వస్తాయి. ఉదాహరణకు ఎత్తు, బరువు, దూరము మొదలైన చలరాశులను (Variables) కొలవడంలో, అంకగణితపు కచ్చితము సాధ్యపడదు. కొలతకు ఉపయోగించే పరికరాలు కూడా పూర్తి కచి&చతాన్ని చెప్పలేవు. ఉదాహరణకు ఒక వ్యక్తి ఎత్తు సెంటీమీటర్లలో కొలుస్తాము. సాధారణంగా మిల్లీ మీటర్లలో కొలవడం జరగదు. కొలత పరికరంలో కూడా మిల్లీమీటర్లు గుర్తించి ఉండకపోవచ్చు. కాబట్టి తీసుకున్న కొలతకు, అసలు కొలతకు కొంత తేడా వుండకతప్పదు. దీనినే దోషమంటారు. గణాంకశాస్త్రంలో వచ్చే దోషాల మూలాలు (Sources of Errors) పరిశీలిద్దాము. దోషాలు అనేక కారణాల వల్ల సంభవిస్తాయి. ఈ కింద కొన్ని ముఖ్యమైనవి ఇవ్వడం జరిగింది.

(a) మూలగత దోషాలు (Errors of Origin) : ఒక వ్యక్తి ఎత్తు కొలవలేని దోషము ఇటువంటిదే. షెడ్యూళ్ళను, ప్రశ్నావళులను నింపేటప్పుడు భోగట్టా తెలిసిన వారు ఏదో కారణం వల్ల సరైన జవాబులు ఇవ్వకపోవచ్చు. గణాంకశోధకుని

అప్రయోజకత్వము (Incompetence) వల్లనూ, తగని గణాంక ప్రమాణము ఎన్నుకోవడంలోనూ ఇటువంటి దోషాలు వస్తాయి.

(b) **అపర్యాప్త దోషాలు (Erros of Inadequacy) :** ఈ దోషాలు ప్రతిచయనం తక్కువ పరిమాణంలో తీసుకోవడం వల్ల సంభవిస్తాయి. వీటిని ప్రతిచయన దోషాలంటారు. ఒక ప్రతిచయన విచారణ చేసేటప్పుడు ప్రతిచయనం వల్ల కలిగే ఫలితాలు మొత్తం జనాభాకు ప్రాతినిధ్యము వహించవలెనంటే తీసుకొన్న ప్రతిచయనం తగినంత పరిమాణంలో వుండవలె. చాలా తక్కువ ప్రమాణం గల ప్రతిచయనము ఎన్నుకుంటే ఫలితాలలో దోషాలుంటాయి.

(c) **అభిసంధాన దోషాలు (Errors of Manipulation) :** ఈ దోషాలు, గణనలు చేయడంలోను, లెక్కించడంలోను, అంశాలను కొలవడంలోను, వర్ణించడంలోను, అంశాలను వర్గీకృతం చేయడంలోను, దత్తాంశము సమానీకరణం చేయడంలోను, గణకులు చేసిన తప్పుల వల్లను సంభవిస్తాయి. ఇటువంటి దోషాలు తెలియకుండానే దొర్లుతాయి.

పైన వివరించిన మూడు దోషాల మూలాల నుంచి దోషాలకు గల కారణాలెన్నో చెప్పవచ్చు.

(a) **దత్తాంశ తారతమ్యత :** తారతమ్యతకు వీలుపడని దత్తాంశాన్ని తారతమ్యము చేస్తే దోషాలు వస్తాయి. లేదా సరైన తారతమ్యత చేయకపోయినా దోషాలు వస్తాయి. విజాతీయ దత్తాంశం నుంచి గ్రహించిన నిర్ణయాలు ఎప్పుడు వికృతార్థాలిస్తాయి. ఉదాహరణకు, దేశంలో చదువుకొనేవారి సంఖ్య హెచ్చవుతున్నది. ఆసుపత్రులలో పిచ్చి వారి సంఖ్య పెరుగుతున్నది. ఈ రెండు దత్తాంశాలలో సజాతీయత లేదు. ఇటువంటి విజాతీయ దత్తాంశము తీసుకొని ఎట్లాంటి నిర్ణయము చేసినా బాగుండదు. బెర్ టిలియాన్ మహాశయుడు, "ఏ కారణాల వల్ల సంభవించిన ఫలితాలను ఆ కారణాలతోనే పోల్చవలె"నని చెప్పినాడు (Always compare effects to the causes producing them).

(b) **ప్రాతినిధ్యము వహించని దత్తాంశము :** గ్రహించిన దత్తాంశ మొత్తము సమిష్టి జనాభాకు ప్రాతినిధ్యము వహించవలె. అసంపూర్ణ దత్తాంశము ఎప్పుడూ తప్పు నిర్ణయాలకు దారి తీస్తుంది.

(c) **పాక్షికత :** అన్నిటికంటే ఈ పాక్షికత దృష్టి వల్ల హేత్వాభాస నిర్ణయాలు వస్తాయి. వ్యక్తిగత పాక్షిక బుద్ధి మొత్తం విచారణ అంతటినీ భంగపరుస్తుంది. ఉదాహరణకు, ఆడవారు వారి వయస్సును ఎప్పుడూ అసలు వయస్సుకంటే తక్కువగానే చెబుతారు. అట్లాగే బట్టల వర్తకుడు బట్టను కొలవడంలో మీటరు స్కేలునుపయోగించి, చాకచక్యంగా మీటరుకంటే కొద్ది తక్కువ బట్టనే కొలుస్తాడు. ఇటువంటి విషయాలను గణాంక శోధకుడు గుర్తించకపోతే దోషాలు వస్తాయి. గణాంక శోధకుడు కూడా నిష్పాక్షికంగా వుండవలెను.

(d) **నిర్వచనంలో మార్పులు :** గణాంక దత్తాంశ సేకరణలో కొన్ని భావనల (concepts) పదాలను జాగ్రత్తగా ప్రయోగించవలెను. గణాంక ప్రమాణాన్ని జాగ్రత్తగా నిర్వచించవలె. ఆ నిర్వచనమే విచారణ దశలన్నిటిలో వాడవలె. నిర్వచనంలో ఏ మాత్రం చిన్న మార్పు జరిగినా అనేక దోషాలు వస్తాయి. ఉదాహరణకు, 'ధర' అనే పదాన్ని విచారణ ఉద్దేశం ప్రకారం నిర్వచించవలెను. టోకు ధర, చిల్లర ధర, ఉత్పత్తి ధర అని నిర్ణయించవలెను.

(e) **విపులీకరణ దోషాలు :** దత్తాంశాన్ని విపులీకరించడంలో దోషాలు సంభవిస్తాయి. ఈ దోషాలనే గణాంక హేత్వాభాసాలంటారని రెండో అధ్యాయంలో గమనించినాము. ఇక్కడ ఉదాహరణకు పూర్వకంగా మరికొన్ని హేత్వాభాస దోషాలు గమనిద్దాము : (1) గణిత శాస్త్రము పరీక్ష బాగా వ్రాసిన విద్యార్థి గణాంకశాస్త్ర పరీక్షలో కూడా బాగా వ్రాస్తాడు అని అనుకోవడం తప్పు. తప్పు నిర్ణయాలు, తద్వారా దోషాలు సాదృశ్యాల వల్ల, సాహచర్య ధర్మాల వల్ల సంభవిస్తాయి. (2) శాతాలు, సగటులను వాడటంలో దోషాలు దొర్లుతాయి. ఒక కళాశాలలో పది మంది విద్యార్థులున్న ఒక వర్గాన్ని తీసుకుందాము. ఈ వర్గంలో ఒక చదరంగపు ఆటగాడున్నాడనుకొందాము. దీనిని బట్టి కళాశాలలో 10% విద్యార్థులు

చదరంగపు ఆటగాళ్ళని చెప్పడం దోషము. (3) తర్క విరుద్ధ తర్క దోషాలు - ఉదాహరణకు, 90% జనాభా తాగుడు వల్ల 100 సంవత్సరాల వయస్సు రాకుండా చనిపోతున్నారు. అందువల్ల తాగుడు మంచిది కాదు. దాని వల్ల ఆయుఃప్రమాణము తగ్గుతుంది. ఈ తర్కము సరియైనది కాదేమో. ఎందుకంటే తాగినవారు కూడా, తాగకుండా పాలు, ఫలాలు తీసుకొన్నవారితోపాటు చనిపోతున్నారు. 100 సంవత్సరాల వయస్సు రాకుండా సాధారణంగా చాలా మంది చనిపోతారు. 100 సంవత్సరాల ఆయుఃప్రమాణము చాలా దీర్ఘమైనది. (4) కొన్ని విషయాలు గమనించకపోవడం - ఉదాహరణకు, విద్యార్థులు ఎక్కువ మంది మధ్యాహ్నపు సినిమా (మ్యాట్నీ) చూస్తారన్నా నిర్ణయము చేసినారనుకొందాము. ఇది హేత్వాభాస నిర్ణయమే. దీనికిగల కారణాలనేకాలుంటాయి. బహుశా ముఖ్య కారణం ఏమిటంటే రాత్రి సినిమా చూస్తే తల్లిదండ్రులు దెబ్బలాడతారు. కాబట్టి తల్లిదండ్రులకు తెలియకుండా మధ్యాహ్న సమయంలో (బడి వేళలలో) మ్యాటినీలు విద్యార్థులు చూడవచ్చును. కాబట్టి కారణాలు తెలియకుండా చేసిన నిర్ణయాలకు దోషాలవుతాయి. (5) పూర్తి దత్తాంశము లేనప్పుడు చేసిన నిర్ణయాలు దోషాలు, ఉదాహరణకు, సాధారణ మానవుడు రోజుకు ఒక సిగరెట్టు పెట్టెలో గల 10 సిగరెట్లు కాలుస్తాడనుకొందాము. ఒక పట్టణ జనాభా 50,000, అందువల్ల ఆ పట్టణంలో రోజుకు 5,00,000 సిగరెట్లు చెల్లుబడి అవుతున్నాయన్నా నిర్ణయము దోషము. ఎందుకంటే - సాధారణ మానవుని నిర్వచించి నిర్ణయించడం కష్టము. అదీకాక మొత్తం 50,000 జనాభాలో స్త్రీలు, పిల్లలు సిగరెట్లు కాల్చనివారు కొంత మంది వుంటారు కదా.

(f) ఇతర కారణాలు : సేకరించిన దత్తాంశము విచారణకు తగినప్పుడు తప్పయిన కొలతలు వాడినప్పుడు తప్పుడు నిర్ణయాలు వస్తాయి. ఇవీ గణాంక దోషాలే. సేకరించిన దత్తాంశ విస్తరణ సమంగా లేనప్పుడు, తప్పుదారిని పట్టించే చిత్రపటాలు, రేఖాచిత్రాలు ఉపయోగించడం వల్ల, ఇంకా ఇటువంటి తదితర కారణాల వల్ల సాంకేతిక దోషాలు సంభవిస్తాయి. ఈ దోషాలు తప్పుడు నమ్మకాలకు దారితీస్తాయి. తరువాత అనేక కారణాల వల్ల వచ్చే ఫలితాలను ప్రత్యేకించవలెను. ఫలితాలను వేరుచేయకుండా నిర్ణయాలు పొరపాటున చేస్తే దోషాలు వస్తాయి.

దోషాలలో రకాలు : గణాంకశాస్త్రంలోని దోషాలను రెండు భాగాలుగా విభజించవచ్చు (1). ప్రతిచయన దోషాలు (Sampling Errors), (2) అప్రతిచయన దోషాలు (Non-Sampling Errors).

1) ప్రతిచయన దోషాలు : కొన్ని అంశాల (ప్రతిచయనము) పరిశీలన ఆధారంగా, పూర్తి జనాభాకు సంబంధించిన నిర్ణయాలు తీసుకోవడం మూలంగా తలఎత్తే దోషాలను ప్రతిచయన దోషాలంటారు. జనాభా దర్యాప్తు విచారణలో అన్నీ అంశాలను పరిశీలిస్తాము కాబట్టి అట్లాంటి విచారణలో ప్రతిచయన దోషాలుండవు. అయినప్పటికీ, జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతిలో దోషాలుండవని కాదు. వుంటాయి. వాటిని ప్రతిచయన దోషాలుంటారు. దత్తాంశ సేకరణ, ప్రోసెసింగ్ (అంటే కోడింగ్ (Coding)). వర్గీకరణ, పట్టీకరణ, దశలలో తల ఎత్తే దోషాలను అప్రతిచయన దోషాలంటారు. ప్రతిచయన దర్యాప్తు పద్ధతి ద్వారా దత్తాంశాన్ని సేకరించినా తర్వాత ప్రోసెసింగ్ దశలు ఒకటే కాబట్టి ఈ దత్తాంశంలో, ప్రతిచయన, అప్రతిచయన దోషాలు రెండూ వున్నాయి. పూర్తి జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతిలో ప్రతిచయనం ప్రసక్తి లేదు కాబట్టి, అందులో అప్రతిచయన దోషాలుంటాయి. ప్రతిచయన దోషాలు ప్రతిచయన విధానంలో వస్తాయి. కాని అప్రతిచయన దోషాలు యోజనదశ మొదలుకొని ఏ దశలోనైనా రావచ్చు. భారీ విచారణలు చేసేటప్పుడు ప్రతిచయన పద్ధతులను వాడతాము. అంటే మొత్తం జనాభాలో కొన్ని అంశాలనే ప్రతినిధులుగా తీసుకొని వాటిపై దత్తాంశము సేకరిస్తాము. అంటే ప్రతిచయన పద్ధతిలో అన్ని అంశాలు తీసుకోము. కాబట్టి ప్రతిచయనము తీసుకోవడమే ఒక దోషము. సరైన ప్రతిచయనము తీసుకోకపోతే ఈ దోషము మరింత హెచ్చుతుంది. గణాంకశోధనలో ప్రతిచయన దోషాలు, పాక్షిక దోషాలు, తప్పులు అని మూడు రకాలైన దోషాలు కన్పిస్తాయి. అందులో పాక్షిక దోషాలు తప్పులు అనేవి వుండకూడదు. వాటిని రాకుండా అరికట్టవలె. కాని ప్రతిచయన దోషాలన్నవి ప్రతిచయన పద్ధతి నవలంభించడంతోనే మొదలవుతాయి. ప్రతిచయన పద్ధతిలో దోషాలు

తప్పక వుంటాయి. కాబట్టి ప్రతిచయన పద్ధతిపై వచ్చిన ఫలితాలను విపులీకరణ చేసేటప్పుడు ఈ దోషాలను గుర్తించవలె.

ప్రతిచయనము చాలా జాగ్రత్తగా నిర్ణయించి ఎన్నుకొన్నప్పటికీ ఆ ప్రతిచయనం నుంచి వచ్చిన ఫలితాలు ఏ వర్గం నుంచి ప్రతిచయనం చేసి తీసుకొన్నామో ఆ వర్గానికి ప్రాతినిధ్యం వహించకపోవచ్చు. ప్రతిచయనాలు సాధారణంగా ఖచ్చితంగా వుండకపోవచ్చు. దీనివల్ల ప్రతిచయన దోషాలు వస్తాయి. ఈ దోషాలను రెండు రకాలుగా చెప్తారు.

(a) పాక్షిక దోషాలు (Biased Errors) - ప్రతిచయనము ఎన్నుకోవడంలో, అంచనాలు కట్టడంలోను గల పాక్షికత్వం వల్ల సంభవించే దోషాలను పాక్షిక దోషాలంటారు. ఉదాహరణకు, ఒక గణాంక విచారణలో యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి వాడవలసినచోట బుద్ధి పూర్వక ప్రతిచయన పద్ధతి వాడితే వచ్చిన ఫలితాలలో కొంత పాక్షికదోషము వుంటుంది.

(b) నిష్పాక్షిక దోషాలు (Unbiased Errors) - ఒక గణాంక విచారణలో మొత్తం జనాభాలో ప్రతిచయనంగా ఎన్నుకొన్న అంశానికి తేడాలుండవచ్చు. అటువంటి ప్రతిచయన విచారణలో దోషాలుండవచ్చు. ఇట్లాంటి దోషాలను నిష్పాక్షిక దోషాలంటారు.

ప్రతిచయన దోషము పాక్షికతవల్లనూ, యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనపు ఎన్నికలవల్లనూ సంభవిస్తుంది. పాక్షిక దోషము జనాభా నుంచి హెచ్చు ప్రతిచయనాలు తీసుకొన్నప్పటికీ తగ్గదు సరికదా మరింత హెచ్చుతుంది. అందువల్ల పాక్షిక దోషాన్ని సంచిత దోషము (Cumulative Error) లేదా సరిపెట్టడానికి వీలులేని దోషము (Non compensating error) అంటారు. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన దోషమంటే నిష్పాక్షిక దోషము, ఎక్కువ ప్రతిచయనాలు తీసుకోవడంలో తగ్గుతుంది. ఇటువంటి దోషాన్ని అసంచిత దోషము (Non-Cumulative Error) లేదా సరిపెట్టడానికి వీలుకలిగే దోషము (Compensating error) అంటారు.

గణాంక విచారణలో సంభవించే పాక్షికత్వానికి కొన్ని కారణాలున్నాయి. అవి ఏమిటంటే (ఎ) ప్రతిచయనము ఎన్నుకొనే పద్ధతి సరైనది కాకపోవడం. (బి) విషయ సేకరణ లోపము వుండటం. (సి) తుది గణాంక విశ్లేషణ చేయడంలో లోపముండడం.

(ఎ) ప్రతిచయనం తప్పుగా ఎన్నుకోవడం వల్ల పాక్షికత్వము అనేక రకాలుగా సంభవిస్తుంది. (1) మొత్తం జనాభా నుంచి ప్రాతినిధ్యం వహించే ప్రతిచయనాన్ని బుద్ధిపూర్వకంగా ఎన్నుకోవడం. (2) తెలిసి కాని, తెలియకగాని యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన రూపంలో ఎన్నుకోవడం పాక్షికత్వం. (3) యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనంలోని అంశాలను ప్రతిస్థాపితం (Substitute) చేయడం వల్ల సంభవించే పాక్షికత్వము. ఉదాహరణకు ఒక విచారణలో ఒక గ్రామంలో గల ప్రతి 20వ ఇంటి యజమానిని ప్రతిచయనాలుగా తీసుకుందామని నిర్ణయించి 20వ ఇంటి యజమానిని ఎన్నుకొంటే వస్తాయి. ఎందుకంటే 20వ ఇంటి యజమానికి 21వ ఇంటి యజమానికి తేడాలుంటాయి. అంటే ప్రతిచయనాలుగా ఎన్నుకొనే అంశాలను నిర్ణయించిన తరువాత మార్పులు జరగకూడదు. (4) ప్రతిచయనంలో చేర్చవలసిన అంశాలన్నిటిని తీసుకోనప్పుడు అంశాలను ప్రతిస్థాపన చేయదలచుకోనప్పటికి పాక్షికత్వము సంభవిస్తుంది. ఇటువంటి లోపం పోస్టుద్వారా పంపిన ప్రశ్నావళి విషయంలో జరుగుతుంది. ఎందుకంటే కొన్ని ప్రశ్నావళులను పూర్తిగా నింపకుండానే కొందరు పంపుతారు. అదే కాకుండా భోగట్టా తెలిసినవారు ఇచ్చిన భోగట్టాలలో పాక్షికత్వముండవచ్చును. (5) వ్యక్తికత్వము సంభవించవచ్చును. ఉదాహరణకు నీవు మంచి విద్యార్థివా అనే ప్రశ్నకు ప్రతి విద్యార్థి తాను మంచి విద్యార్థిననే చెబుతాడు.

(బి) దత్తాంశ సేకరణలో పాక్షికత్వము : అంశాల కొలతలలో (జనాభా దర్యాప్తు పద్ధతిలోగాని, ప్రతిచయన పద్ధతిలోగాని) స్థిరంగా వచ్చే దోషం వల్ల పాక్షికత్వము ఏర్పడుతుంది. ఈ దోషము ప్రతిచయన విచారణలో మరింత ఎక్కువ. జనాభాను తప్పుగా నిర్వహించడంలోను, తగినంత విషయము సేకరించకపోవడంలోను, జనాభాను తప్పుగా నిర్ణయం

చేయడంలోను పాక్షికత్వము ఏర్పడే అవకాశాలున్నాయి. అసంపూర్ణ ప్రశ్నావళి తర్ఫీదు లేని గణకుడు జవాబులిచ్చేవాని జ్ఞాపకంలో వైఫల్యం మొదలైనవాటి వల్ల పాక్షిక పరిశీలన సంభవిస్తాయి. దత్తాంశ సేకరణలోని పాక్షికత సేకరణా విధానంలో లోపాల వల్ల, జవాబులు తప్పుగా ఎడిట్ చేయడం వల్ల, జవాబులను తప్పుగా అనువాదం చేయడం వల్ల సంభవిస్తుంది.

(సి) గణాంక విశ్లేషణలో పాక్షికత్వము : సేకరించిన దత్తాంశాన్ని తప్పు విశ్లేషణ పద్ధతుల ద్వారా పరిశీలిస్తే దోషాలు వస్తాయి. పాక్షిక అంచనాల దోషము సరైన విశ్లేషణ నవలంభిస్తే తగ్గుతాయి.

పాక్షికత్వము సంభవించే అవకాశాలున్నప్పుడు సరైన నిర్ణయాలు తీసుకోలేము. అందువల్ల ఎటువంటి విచారణ చేసినా పాక్షికత్వము సంభవించే మూలాలను తొలగించవలెను. అందుకు కావలసినది, ప్రతిచయనము ఎన్నుకొనే పద్ధతిలో పాక్షికత్వానికి తావులేకపోవడం. అంటే, ప్రతిచయనాలను తెలియకుండా పూర్తి యాదృచ్ఛిక పద్ధతిపై ఎన్నుకోవలెను. అప్పుడప్పుడు క్రమపద్ధతిన కూడా, పాక్షికత్వము సంభవించకుండా ప్రతిచయనాలు తీసుకోవచ్చును.

1. **ప్రతిచయన దోషాలు తగ్గించే విధానాలు :** పాక్షిక దోషము తగ్గించిన తరువాత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన దోషాలు తగ్గించడం గురించి ఆలోచన జరగవలెను. ప్రతిచయన దోషాలు సాధ్యమైనంత తక్కువగా వుంటే కావలసిన యథార్థత చేకూరుతుంది. ప్రతిచయన యథార్థతను హెచ్చు చేయడానికి ప్రతిచయనపు పరిమాణాన్ని హెచ్చించవలెను. యథార్థత ప్రతిచయనంలో తీసుకున్న గణాంక ప్రమాణాల మీద ఆధారపడుతుంది. అదేకాకుండా ప్రతిచయన దోషానికి దోహదం చేసే ప్రమాణాల మీద ఆధారపడుతుంది. అదేకాకుండా ప్రతిచయన దోషానికి దోహదం చేసే ప్రమాణ చలనత్వపు రేటు (Variability per unit) మీద కూడా ఆ యథార్థత ఆధారపడుతుంది. అందువల్ల స్తరిత యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన దోషాలు తగ్గి, కావలసినంత యథార్థత చేకూరుతుంది.

2. **అప్రతిచయన దోషాలు :** ప్రతిచయన దోషాలు కానివన్నీ అప్రతిచయన దోషాలంటారు. ఈ దోషాలు అన్ని రకాలయిన పరిగణనల (Enumerations)లోను వస్తాయి. (ఎ) పాక్షికత్వము(Inherent). (బి) విచారణకు తగిన గణాంక ప్రాణము వాడడం. (సి) అంశాలను కొలిచే పనిముట్టులలో లోపము. (డి) తర్ఫీదు పొందిన శోధకులు, గణకులు విచారణలు చేయడం (ఇ) సేకరించిన దత్తాంశపు గణాంకాలను సమానీకరణం చేయడం. ఈ దోషాలన్నీ ప్రతిచయన పద్ధతి నెన్నుకోకుండా, జరిపిన విచారణలోని దోషాలు. సాధ్యమైనంత వరకు ఈ దోషాలు జరగకుండా చూడవలె.

దోషమానము (Measurement of Error) : దోషాలను కొలిస్తే అవి రెండు రకాలుగా వుంటాయి.

1. **పరమ దోషము (Absolute Error) :** అసలు విలువకు, అంచనా విలువకు వున్న భేదాన్ని పరమ దోషమంటారు.

Absolute Error = Actual Value - Estimated Value.

Absolute Error = పరమదోషము, Actual Value = అసలు విలువ, Estimated Value = అంచనా విలువ

సాంకేతికంగా A.E. = A - E.

ఉదాహరణకు, ఒక రోజు ఒక కాలేజీలో 2,500 విద్యార్థులు హాజరయినారు. కాని 2,400 విద్యార్థులు వచ్చినారని అంచనా వేయడం జరిగింది. అప్పుడు, A.E. = 2500 - 2,400 = + 100

కాని అంచనా వేసిన సంఖ్య 2,600 అయితే, A.E. = 2,500 - 2,600 = - 100

పరమ దోషము ధనాత్మకం (Positive)గాను, లేదా ఋణాత్మకం (Negative)గాను ఉండవచ్చు. E కంటే A పెద్ద సంఖ్య అయితే ($A > E$) దోషము ధనాత్మక పరమదోష (Positive Absolute Error)మవుతుంది. E కంటే A చిన్న సంఖ్య అయితే ($A < E$), దోషము ఋణాత్మక పరమదోష (Negative Absolute Error) మవుతుంది.

2. **సాపేక్ష దోషము (Relative Error) :** రెండు దత్తాంశాల మధ్య గల తారతమ్యాన్ని తెలుసుకోవడానికి పరమదోషము పనికిరాదు. తారతమ్యాలను తెలుసుకోవడానికి సాపేక్ష దోషాన్ని సంగణన (Compute) చేయవలె. పరమదోషానికి అంచనా విలువకు గల నిష్పత్తిని సాపేక్ష దోషమంటారు.

$$\text{Relative Error} = \frac{\text{Actual value} - \text{Estimated value}}{\text{Estimated value}}$$

Relative Error = సాపేక్ష దోషము, Actual Value = అసలు విలువ, Estimated Value = అంచనా విలువ.

సాంకేతికంగా $\text{R.E.} = \dfrac{A - E}{E}$

పరమదోషము ధనాత్మకంగాను, ఋణాత్మకంగాను వున్నట్లే సాపేక్ష దోషం కూడా ధనాత్మకంగా ఋణాత్మకంగాను వుంటుంది. పై ఉదాహరణననుసరించి -

(a) $\text{R.E.} = \dfrac{2500-2400}{2400} = \dfrac{100}{2400} = \dfrac{1}{24} = +0.042$

ఇది ధనాత్మక సాపేక్ష దోషము (Positive Relative Error)

(b) $\text{R.E.} = \dfrac{2500-2600}{2600} = \dfrac{-100}{2600} = -\dfrac{1}{26} = -0.038$

ఇది ఋణాత్మక సాపేక్ష దోషము (Negative Relative Error).

సాపేక్ష దోషాన్ని శాతంలో చెబితే శాతపుదోషము (Percentage Error) అవుతుంది. దీని ప్రకారంపై (a), (b)ల విలువలు శాతంలోకి మార్చవలెను.

(a) $+0.042 \times 100 = +4.2\%$ దోషము

(b) $-0.038 \times 100 = -3.8\%$ దోషము.

2.9 సారాంశం

సత్యాన్వేషణ కోసం శాస్త్రీయ పద్ధతిలో జరిపే శోధన లేదా పరిశోధనను గణాంక విచారణ అంటారు. గణాంక విచారణ ఐదు దశల్లో జరుగుతుంది. మొదటి దశ అయిన యోజనలో విచారణ ఉద్దేశం, పరిధి, దత్తాంశ మూలాలు, గణాంక విచారణ పద్ధతులు, గణాంక ప్రమాణము, యదార్థతా పరిమితిని నిర్ణయించుకోవలసి వుంటుంది. రెండో దశను దత్తాంశ సేకరణ అంటారు. దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు రెండు రకాలు. అవి జనాభా పద్ధతి, ప్రతిచయన పద్ధతి. విచారణలోని అన్ని అంశాలను ప్రాతిపదికగా చేసుకొని గణాంక విచారణ జరిపితే జనాభా పద్ధతిని, ప్రాతినిధ్యం వహించే కొన్ని అంశాలపై ఆధారపడి గణాంక విచారణ జరపడాన్ని ప్రతిచయన పద్ధతి అంటాము. సేకరించే దత్తాంశం రెండు రకాలుగా వుంటుంది. అవి : అంతరంగిక, బహిరంగ దత్తాంశాలు.

బహిరంగ దత్తాంశం రెండు విధాలు. అంటే ప్రాథమిక, ద్వితీయ దత్తాంశాలుగా వుంటుంది. ప్రాథమిక దత్తాంశం అంటే మొట్టమొదటగా సేకరించిన దత్తాంశం. ద్వితీయ లేదా గౌణ దత్తాంశం అంటే ఒకసారి ఉపయోగించిన దత్తాంశాన్ని మరలా ఉపయోగించడం. ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించేటప్పుడు తగు జాగ్రత్తలను తీసుకోవలసి వుంటుంది. ఈ విధంగా సేకరించిన దత్తాంశాన్ని మూడోదశలో ఎడిటింగ్, యదార్థత, సమానీకరణ చేయవలసి వుంటుంది. ఆ తరువాత నాల్గో దశలోనికి వెళ్ళవలసి వుంటుంది. ఈ దశలో వర్గీకరణ, శ్రేణీకరించిన దత్తాంశాన్ని పట్టికల ద్వారా, రేఖా చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పణ చేయవలసి వుంటుంది.

2.10 ముఖ్యపదాలు

1. ప్రాథమిక దత్తాంశం. మొట్టమొదటిగా సేకరించిన దత్తాంశం.
2. ప్రతి రూపగ్రహణ పద్ధతి : ప్రతిచయన పద్ధతినే ప్రతి రూపగ్రహణ పద్ధతి అంటారు. జనాభాకు ప్రాతినిధ్యం వహించే కొన్ని అంశాలను విచారించటం.
3. ప్రశ్నావళి : గణాంక సమాచారాన్ని సేకరించేందుకు ఉపయోగించే ప్రశ్నల సముదాయం. దీనిని ఎవరైనా సరే నింపవచ్చును.
4. యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనాలు : లాటరీ పద్ధతిపై సేకరించే లేదా అదృష్ట ప్రతిచయనాలు.
5. షెడ్యూళ్ళు : షెడ్యూలు కూడా ప్రశ్నల సముదాయమే కాని ఈ ప్రశ్నలకు సమాధానం నింపేందుకు కొంత శిక్షణ అవసరం. సాధారణ వ్యక్తులు ఈ ప్రశ్నావళిని నింపలేరు. అందుకే వీటిని శిక్షణ పొందిన గణకులు నింపుతారు.

2.11 నమూనా ప్రశ్నలు

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. గణాంక విచారణ అనగానేమి ? అందులోని వివిధ దశలను వివరింపుము.
2. ప్రాథమిక ద్వితీయ దత్తాంశాల మధ్య తేడాలు తెల్పుము.
3. ప్రాథమిక దత్తాంశ సేకరణ పద్ధతులు వివరించండి.
4. ద్వితీయ దత్తాంశమనగానేమి ? మూలాలను తెల్పుము.
5. గణాంక ప్రమాణాలనగానేమి ? వానికుండవలసిన లక్షణాలను తెల్పుము.
6. షెడ్యూలనగానేమి ? దానిని ఎలా పూరించవలె?
7. ప్రశ్నావళి అనగానేమి ? మంచి ప్రశ్నావళికుండవలసిన లక్షణాలెవ్వి ?
8. సూపర్‌బజార్‌కు సంబంధించి వివరాల సేకరణకు ప్రశ్నావళి నమూనా ప్రతిపాదింపుము.
9. జనాభా, ప్రతిచయన పద్ధతుల మధ్య విచక్షణ చేయండి? వివిధ ప్రతిచయన పద్ధతులను తెల్పుము.
10. ఎడిటింగ్, సమానీకరణ, యదార్థతను గూర్చి ఒక వ్యాసం వ్రాయుము.
11. గణాంక విచారణలో సంభవించే దోషాలను పేర్కొనండి ? ఆ దోషాలు సంభవించే కారణాలు తెల్పండి.

II. సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

12. జనాభా పద్ధతి, ప్రతిచయన పద్ధతి
13. ప్రశ్నావళి, షెడ్యూలు
14. మంచి ప్రతిచయన లక్షణాలు
15. ప్రత్య, పరోక్ష విచారణలు
16. గణాంక ప్రమాణ లక్షణాలు
17. పరమ, సాపేక్ష దోషాలు
18. ద్వితీయ దత్తాంశ సేకరణలో తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలు
19. గణాంక క్రమసూత్రం
20. బృహత్ సంఖ్యా జడత్వ సూత్రం

2.12 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. B.N. Elhance	:	Fundamental of Statistics
2. S.P. Gupta	:	Statistical Methods
3. C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
4. S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics
5. M.C. Shukla & S.S. Gulshan	:	Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 3

వర్గీకరణ - శ్రేణీకరణ

పాఠ్యాంశ నిర్మాణ క్రమం

3.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యాంశం పూర్తయ్యేసరికి మీరు క్రింది విషయాలు అవగాహన చేసుకుంటారు.

* వర్గీకరణ అంటే ఏమిటీ ? వర్గీకరణ ఉద్దేశాలు మరియు వర్గీకరించేటప్పుడు గమనించవలసిన నియమాలు.
* వర్గీకరణలోని రకాలు
* శ్రేణీకరణ అంటే ఏమిటీ ? వివిధ రకాలైన శ్రేణీకరణలు

3.1 విషయపరిచయం

గణాంక శోధనలో సేకరింపబడిన గణాంకాలను లేదా అంకెలలో సమాచారాన్ని ముడి దత్తాంశముగా వ్యవహరిస్తారు. ఈ దత్తాంశం అధిక పరిమాణంలో వుండి, అర్థం చేసుకొనుటకు అనుకూలంగా వుండదు. ఈ విధమైన సమాచారాన్ని అవగాహన అయ్యేట్లు చేయటానికి వివిధ చర్యలను తీసుకోవలసి వుంటుంది. సేకరించిన దత్తాంశ లక్షణాలను గ్రహించి, సరిపోల్చుటకనువుగా రూపొందించి, ఫలితాలను సాధించుటకు, గణాంక విశ్లేషణ కొనసాగించుటకనువుగా సమాచారాన్ని రూపొందించవలసి వుంటుంది. ఆ తరువాత దత్తాంశాన్ని సమర్పణ చేయవలసి వుంటుంది. దత్తాంశమును సమర్పించే పద్ధతులను స్థూలంగా రెండు రకాలుగా వర్గీకరింపవచ్చును.

(1) పట్టీకరణ (Tabulation)

(2) రేఖా చిత్రపటాలు (Diagramatic and Graphic Presentation)

ఈ విధంగా సమర్పణ చేసే ముందుగా దత్తాంశాన్ని వర్గీకరణ, శ్రేణీకరణ జరపవలసి వుంటుంది.

3.2 వర్గీకరణ (Classification)

దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించి, విశ్లేషణకనువుగా రూపొందించుటకు వర్గీకరణ అవసరము. పట్టీకరణ చేసే ప్రక్రియలో మొదటి దశ వర్గీకరణ. వర్గీకరణ అనగా దత్తాంశములో గల అంశాలను వాటి గుణగణాలను బట్టి వివిధ తరగతులుగా అమర్చడం. గుణగణాలు ఆధారంగా ఒక లక్షణం కలవారిని ఒక తరగతిగాను, అందుకు భిన్నమైన వారు వేరొక వర్గంగాను ఏర్పరిచెదరు.

F.C. Mills అనే శాస్త్రవేత్త వర్గీకరణను ఈ విధంగా వివరించాడు. "గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడు ప్రప్రథమంగా చేయవలసిన పని ఏమనగా అసంఖ్యాకమైన అంకెలను, వాటి ప్రాముఖ్యం కోల్పోకుండా, ముందుగా నిర్ణయించిన ఉద్దేశానికనుగుణంగా, సారూప్య దత్తాంశాలను పోల్చుటకు వీలుగా, తరువాత గణాంక పరిగణనకు ఉపయోగపడే మాదిరిగా దత్తాంశాన్ని వ్యవస్థీకరించడం" వర్గీకరణ సార్టింగ్ లాంటిది. సార్టర్ వివిధ ప్రదేశాలకు చేరవలసిన ఉత్తరాలను వివిధ అరల్లో వేసిన విధంగా వివిధ లక్షణాలను బట్టి వివిధ తరగతులుగా విభజించటమే వర్గీకరణ.

3.2.1 వర్గీకరణ - ఉద్దేశాలు

(1) పెద్ద పరిమాణములో గల దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తం చేయడం, పోలిక వున్న అంశాలను వర్గాలుగా యేర్పరచడం.

(2) దత్తాంశానికి గల సంక్లిష్ట గుణము తొలగించి, బోధపరచుకోవడానికి సులభం చేయడం.

(3) అనవసరమైన వివరాలను పరిహరించడం

(4) సమరూపాలను, అసమరూపాలను వాటికి గల గుణగణాలను బట్టి వేరు చేయడం

(5) దత్తాంశాన్ని చూసి అవగతం చేసుకోవడానికి వీలు కలిగించడం

(6) వాస్తవాలను గుర్తించుటకు, సరిపోల్చుటకు వీలు కల్పించడం

(7) చలరాసుల మధ్య సంబంధాన్ని యేర్పరచడం

(8) దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించుటకు వీలు కల్పించడం

(9) దత్తాంశములో గల చాలా ముఖ్య విషయాలను ప్రత్యేకంగా గుర్తించుటకు వీలు కల్పించడం.

3.2.2 వర్గీకరణ - లక్షణాలు : వర్గీకరణ కింది లక్షణాలను కలిగి వున్నట్లయితే విశ్లేషణకు ఎంతో ఉపకరించడం జరుగుతుంది.

(1) **సమగ్రంగా వుండడం :** దత్తాంశములోని అన్ని అంశాలను, దేనిని వదలిపెట్టకుండా వర్గీకృతం చేయవలె. సమగ్రంగా, సంపూర్ణంగా చేసిన వర్గీకరణలో సందిగ్ధతకు తావు వుండదు.

(2) **పరస్పరం ప్రత్యేకంగా వుండడం :** ఒకే అంశాన్ని ఒకే తరగతిలో అమర్చవలెను. ఏర్పరచిన తరగతులు కూడా పరస్పరాతిక్రమము (overlap) కారాదు. తరగతులు నిర్దిష్టంగా వుండవలెను.

(3) **నిశ్చలత :** వర్గీకరణ ఒక సూత్రాన్ని ఆధారంగా చేయవలెను. అదే సూత్రాన్ని చివరి వరకు పాటించవలెను. వర్గీకరణలో నిశ్చలత చాలా అవసరము.

(4) **అనుగుణ్యత :** మారుతూ వుండే పరిస్థితులకు అనుగుణంగా వుండేట్లు వర్గీకరణ విధానం వుండవలెను. వర్గీకరణ పద్ధతులు దత్తాంశములో క్రమానుగతంగా కలిగే మార్పులకు, పరిస్థితులకు, షరతులకు, అనుగుణ్యతకు తగిన విధంగా వుండాలి.

3.2.3 వర్గీకరణ - రకాలు (Types of Classification) : వర్గీకరణ కింది వాటి ప్రాతిపదికగా తయారుచేయడం జరుగుతుంది. అవి: (i) ప్రాంతము (ii) కాలము (iii) గుణము (iv) లక్షణాలు / పరిమాణం. వీటిపై ఆధారపడి రూపొందించే వర్గీకరణను కూడా నాలుగు రకాలుగా చెప్పవచ్చు. అవి : (i) భౌగోళిక వర్గీకరణ, (ii) కాలక్రమ వర్గీకరణ (iii) గుణాలను బట్టి వర్గీకరణ (iv) పరిమాణాత్మక వర్గీకరణ. వీటిని గూర్చి సంక్షిప్తంగా తెలుసుకుందాం.

(i) **భౌగోళిక వర్గీకరణ :** భౌగోళిక ప్రాంతాల ఆధారంగా ఉదా॥ నగరాలు, ప్రాంతాలు, రాష్ట్రాలు, దేశాలు, మొదలైన వాటిపై ఆధారపడి దత్తాంశాన్ని వివిధ తరగతులు లేదా వర్గాలుగా విభజిస్తే దానిని భౌగోళిక వర్గీకరణ అంటారు.

వివిధ రాష్ట్రాల్లో ధాన్య ఉత్పత్తి

రాష్ట్రం పేరు	పండిన ధాన్యము (లక్షల టన్నులలో)
ఆంధ్రప్రదేశ్	1000
ఉత్తరప్రదేశ్	600
బీహార్	300
తమిళనాడు	400
మొత్తం	**2300**

భౌగోళిక వర్గీకరణ అక్షర క్రమంలోగాని, పరిమాణం ఆధారంగా గాని రూపొందించవచ్చు.

(ii) **కాలక్రమ వర్గీకరణ :** వివిధ కాలాల (వారాలు, నెలలు, సం॥లు వగైరా) ప్రాతిపదికగా జరిపే వర్గీకరణను కాలక్రమ వర్గీకరణ అంటారు. ఉదా॥ ఒక పారిశ్రామిక సంస్థ వివిధ కాలాలలో సాధించిన ఉత్పత్తి. వ్యాపార సంస్థ లాభాలు, ఒక దేశంలో వివిధ కాలాలలో గల జనాభా మొదలైనవి.

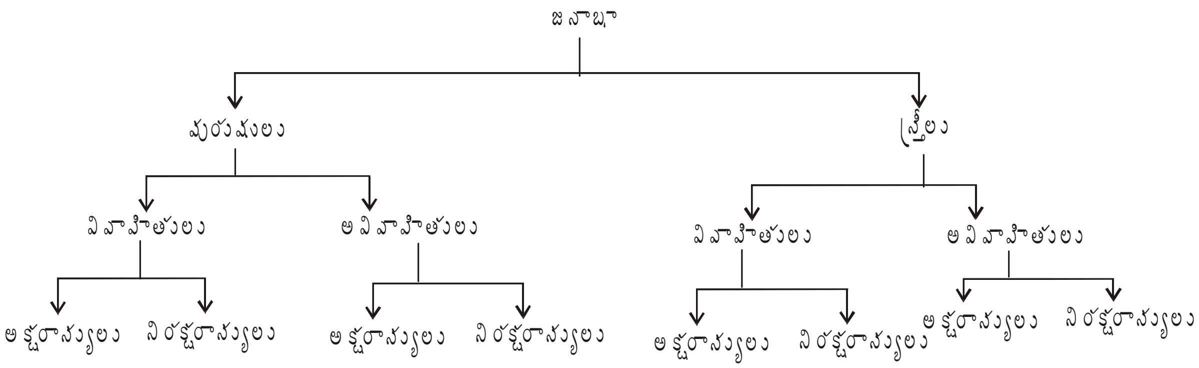
1978-83 సం॥లలో *x* దేశంలో వ్యవసాయ ఉత్పత్తులు (లక్షల టన్నుల్లో)

సంవత్సరములు	ఉత్పత్తి లక్షల (టన్నుల్లో)
1978	120
1979	118
1980	128
1981	150
1982	142
1983	200

(iii) గుణాలను బట్టి వర్గీకరణ : భౌతిక లేక స్వాభావిక లక్షణాలను లేక గుణాలను బట్టి జరిపే వర్గీకణను గుణాత్మక వర్గీకరణ అంటారు. ఈ వర్గీకరణలో సరిపోలిన గుణాలు, సరిపోలని గుణాలతో వేరు చేయడం జరుగును. ఒకే లక్షణం గల అంశాలను ఒక తరగతి లేదా ఒక వర్గంగా పొందుపరుస్తారు. ఉదా : దత్తాంశాన్ని లింగబేధము, అక్షరాస్యత, మతము మొ॥ గుణాల ద్వారా వర్గీకరించటం. గుణాత్మక వర్గీకరణ రెండు రకాలు : (ఎ) సాధారణ వర్గీకరణ, (బి) బహుళ వర్గీకరణ

(ఎ) సాధారణ వర్గీకరణ (Simple Classification) : ఈ వర్గీకరణలో ఒకే గుణాన్ని గూర్చి అధ్యయనము చేయుదురు. ఉదాహరణకు లింగబేధము లేక అక్షరాస్యత అనే ఒకే గుణం అధ్యయనం చేయడం వల్ల దత్తాంశము రెండు వర్గాలుగా యేర్పడును. ఒకటి ఆ గుణము కలది కాగా రెండోది ఆ గుణము లేనిదిగాను విభజింపబడును (స్త్రీ/పురుషుడు). కనుక దీనిని ద్వివిధ వర్గీకరణ (Dichotomous classification) అని కూడా అంటారు.

(బి) బహుళ వర్గీకరణ (Manifold Classification) : ఇందులో ఒక ముఖ్యగుణం, దాని ఉపగుణాలను బట్టి అనేక తరగతులు, ఉపతరగతులుగా యేర్పాటు చేస్తారు. ఉదాహరణకు : లింగబేధమును బట్టి జనాభాను, స్త్రీలు, పురుషులని రెండు వర్గాలు. వివాహ స్థితి బట్టి వివాహితులు, అవివాహితులని **4** వర్గాలు అక్షరాస్యతను బట్టి అక్షరాస్యులు, నిరక్షరాస్యులని **8** వర్గాలుగా విభజింపబడును. ఈ విభజనను కింది విధంగా ఉంటుంది.



(iv). పరిమాణాత్మక వర్గీకరణ (Classification According to Class Intervals) : ఏ దత్తాంశాన్ని సూటిగా అంకెలలో వివరించి, వర్ణించి చెప్పడానికి సాధ్యమవుతుందో అటువంటి దత్తాంశాన్ని పరిమాణాత్మక దత్తాంశం అంటారు. ఈ సమాచారాన్ని వివిధ తరగతులుగా వర్గీకరిస్తే పరిమాణాత్మక వర్గీకరణ అందురు. ఎత్తు, బరువు, ఉత్పత్తి, ఎగుమతులు, లాభాలు మొదలగు అంశాలకు సంబంధించిన దత్తాంశం సంఖ్య రూపములో వుండును. వాటి విలువలను ఖచ్చితమైన సంఖ్యా రూపంలో చెబుతారు. పరిమాణాత్మక సమాచారాన్ని తరగతి అంతరాలుగా వర్గీకరించడం జరుగుతుంది. కావున దీనిని పరిమాణాత్మక లేదా తరగతి అంతరాల ద్వారా వర్గీకరణ అని కూడా అంటారు.

ఉదాహరణ : నాగార్జున విశ్వవిద్యాలయంలో యమ్.కామ్ (M.Com.) విద్యార్థుల వయస్సు వివరాలు.

వయస్సు(సం॥లలో) (తరగతి అంతరము)	విద్యార్థులు (పౌనఃపున్యము)
21 - 23	20
23 - 25	45
25 - 27	20
27 - 29	12
29 - 31	3
మొత్తము	100

పై వర్గీకరణ పట్టీ నుండి రెండు విషయాలు తెలుసుకోవలెను. (1) చలరాశి (vairable) వయస్సు, (2) పౌనఃపున్యము (frequency) ఒక్కొక్క తరగతిలో లభ్యమయ్యే విద్యార్థుల సంఖ్య లేదా ఒక్కొక్క తరగతి అంతరంలో లభ్యమయ్యే అంశాలు ఆ తరగతి పౌనఃపున్యమును సూచించును. ఒక్కొక్క తరగతిలో ఎంత మంది వున్నారో చూపించే పట్టికను పౌనఃపున్య విభాజనపు పట్టి (frequency distribution table) అందురు. పై పట్టీలో తక్కువ వయస్సు 21 సంవత్సరాలు, ఎక్కువ వయస్సు 31 సంవత్సరాలు, తరగతులు ఐదు. ఒక్కొక్క తరగతిలో ప్రారంభ విలువలు 21, 23, 25, 27, 29. వీటిని ఆ తరగతి తాలూకు దిగువ అవధులు అందురు.

ఒక్కొక్క తరగతిలో యిచ్చిన చివరి విలువలు 23, 25, 27, 29, 31. అవి ఆయా తరగతుల తాలూకు ఎగువ అవధులు (upper limits) అందురు. ప్రతి తరగతి అంతరంలో ఎగువ అవధికి, దిగువ అవధికి వున్న బేధాన్ని తరగతి పరిమాణము (Magnitude of the class interval) అంటారు.

ఈ ఉదాహరణలో తరగతి అవధి పరిమాణము 2(23-21). ఈ పరిమాణము అన్ని తరగతి అంతరాలలో సమానంగా వుంటే సమాన తరగతి అంతరాలు అంటారు. సమాన తరగతి పరిమాణము గల పౌనఃపున్య విభాజనములో తరగతుల నిర్ణయానికి దిగువ సూత్రం తోడ్పడును.

$$\text{తరగతులు} = \frac{\text{అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ}}{\text{తరగతి పరిమాణము}} = \frac{31-21}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

సంచిత పౌనఃపున్యము (Cummulative Frequency) : ఒక్కొక్క తరగతి అంతరములోని పౌనఃపున్యాన్ని మరో తరగతి పౌనఃపున్యముతో సంచితము చేస్తే అట్లాంటి పౌనఃపున్యాన్ని సంచిత పౌనఃపున్యమంటారు. సంచితం అంటే కలుపగా వచ్చేది అని అర్థం. పౌనఃపున్యాలను పై నుంచి సంచితం చేస్తే దానిని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యమని, క్రింద నుంచి చేస్తే అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యమని అంటారు. కింది ఉదాహరణ సంచిత పౌనఃపున్యాలను తెలుపుతుంది.

ఉదా :

వయస్సు (సం॥లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము ఆరోహణ (cf)	సంచిత పౌనఃపున్యము అవరోహణ (cf)
21 - 23	20	20	100
23 - 25	45	65	80
25 - 27	20	85	35

27 - 29	12	97	15
29 - 31	3	100	3
మొత్తం	100		

తరగతి అంతరాలుగా వర్గీకరణ - గుర్తించవలసిన అంశాలు

(1) తరగతుల నిర్ణయము : శ్రేణులలోని అంశాల సంఖ్య, దత్తాంశపు గుణము, దత్తాంశ విభాజన స్వరూపము, ఆశించిన కచ్చితత్వము. ఉపయోగించే గణాంక పద్ధతులు దృష్టియందుంచుకొని దత్తాంశాన్ని ఎన్ని తరగతులుగా విభజింపవలెననేది మొదట నిర్ణయించుకొనవలెను. శ్రేణులలో అంశాలు ఎక్కువగా వుంటే ఎక్కువ తరగతులుగా విభజింపవచ్చు. ఒక్కొక్క తరగతిలో ఎక్కువ పౌనఃపున్యాలు వుంటే, ఆ తరగతులలో పౌనఃపున్యాలు గుమికూడినట్లగును. అంతేకాక కావలసిన పూర్తి సమాచారము పొందలేము. శ్రేణులలో అంశాలు తక్కువగా వుంటే ఎక్కువ తరగతులుగా విభజింపరాదు. అలా చేస్తే కొన్ని తరగతులలో పౌనఃపున్యము వుండకపోవచ్చును. మరికొన్ని తరగతులలో మరీ తక్కువ పౌనఃపున్యం వుండవచ్చును. అందువలన శ్రేణులలోని అంశాలను బట్టి తరగతులను నిర్ణయించాలి. క్రాక్సటన్ అండ్ క్రౌడన్ మహాశయులు చెప్పినట్లు సాధారణంగా 6 తరగతులకు తక్కువ లేకుండా 16 తరగతులకు ఎక్కువ కాకుండా తరగతులను నిర్ణయించుకుంటే బాగుంటుంది.

(2) తరగతి పరిమాణ నిర్ణయం : తరగతి అంతర నిర్ణయము శ్రేణిలో గల అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల భేదం, శ్రేణిని ఎన్ని తరగతులుగా విభజించాలనే నిర్ణయంపై ఆధారపడును. తరగతి పరిమాణ నిర్ణయంలో దత్తాంశం తాలూకు ముఖ్య లక్షణాలను అలక్ష్యం చేయరాదు. సాధారణంగా తరగతి అంతరం సరిసంఖ్యలో వుంటే 2, 4, 6, 8... బాగుంటుంది. తరగతుల అంతరం అన్ని తరగతులకు సమానంగా వుండడం మంచిది. తరగతి అంతర నిర్ణయానికి దిగువ సూత్రం ఉపయోగించవచ్చును.

$$\text{తరగతి అంతరం} = \frac{\text{వ్యాప్తి}}{\text{తరగతుల సంఖ్య}}$$

వ్యాప్తి = దత్తాంశములోని అత్యధిక విలువ - అత్యల్ప విలువ

తరగతి అంతర పరిమాణ నిర్ణయానికి (Stranges) స్టర్జస్ దిగువ సూత్రాన్ని ప్రతిపాదించెను. ఈ సూత్రము తరగతుల సంఖ్య ఉజ్జాయింపుగా నిర్ణయించుటకు మాత్రమే ఉపయోగపడును.

$$\text{తరగతి అంతర పరిమాణము (c)} = \frac{\text{వ్యాప్తి}}{1+3.222\log N} = \frac{H-L}{1+3.222\log N}$$

వ్యాప్తి = $H-L$ $H =$ అత్యధిక విలువ, $L =$ అత్యల్ప విలువ

(3) తరగతి అంతరాల రూపం : తరగతి అంతరాలు వివిధ రూపాలలో వుంటాయి. కొన్ని సందర్భాలలో పౌనఃపున్య విభాజన రూపం కూడా భిన్నంగా వుండవచ్చు. ఈ వివిధ రూపాల్లో వున్న తరగతి అంతరాలను లేదా పౌనఃపున్య విభాజనాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

(ఎ) మినహాయింపు రూపం లేదా సమగ్ర రూపము : ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ అవధిగా వుండును. ఈ రూపంలో ప్రతి తరగతిలోనూ ఎగువ అవధి ఆ తరగతిలో వుండదు. దిగువ తరగతిలో వుంటుంది. అంటే కింది ఉదాహరణలో 20 అనే విలువ 15-20లో వుండదు. 20-25లో వుంటుంది. ప్రతి తరగతిలోనూ ఆ తరగతి ఎగువ అవధి మినహాయించబడుతుంది. కావున దీనిని మినహాయింపు రూపం అంటారు.

మార్కులు(C.I.)	విద్యార్థులు (f)
15 - 20	8
20 - 25	12
25 - 30	20
30 - 35	5
35 - 40	5
మొత్తం	50

(బి) విలీమ రూపం లేదా అసమగ్రరూపం : ఈ రూపంలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి తరువాత తరగతి దిగువ అవధిగా వుండదు. ఈ రెండింటికి ఖచ్చితమైన వ్యత్యాసం వుంటుంది. ప్రతి తరగతిలోని ఎగువ, దిగువ అవధులు ఆ తరగతిలోనే విలీనమై వుంటాయి. కావున దీనిని విలీన రూపం అంటారు.

మార్కులు (CI)	విద్యార్థులు (f)
15 - 19	8
20 - 24	12
25 - 29	20
30 - 34	5
35 - 39	5
మొత్తం	**50**

సి) కంటే ఎక్కువ రూపము : తరగతి అవధులలో దిగువ అవధిని ప్రాతిపదికగా తీసుకొని విభాజనాన్ని అందుకు అనుగుణంగా వ్రాస్తే 'కంటే ఎక్కువ' రూపములో వస్తుంది. కంటే ఎక్కువ రూపంలో తరగతి అంతరాలను మార్చితే దానికి అనురూపంగా సంచిత పౌనఃపున్యము (అవరోహణ) వ్రాయవలసి వస్తుంది. ఈ రూపంలో సంచిత పౌనఃపున్యం క్రమక్రమంగా తగ్గుతూపోతుంది.

ఉదాహరణ :

రోజువారీ వేతనం (రూ॥లలో)	కార్మికుల సంఖ్య (అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము)
50 కంటే ఎక్కువ	100
75 కంటే ఎక్కువ	80
100 కంటే ఎక్కువ	65
125 కంటే ఎక్కువ	35
150 కంటే ఎక్కువ	20
175 కంటే ఎక్కువ	5

డి) కంటే తక్కువ రూపము : తరగతి అవధులలో ఎగువ అవధిని ప్రాతిపదికగా తీసుకుని ఉపయోగించి విభాజనాన్ని

అందుకు అనుగుణంగా మార్చి వ్రాస్తే "కంటే తక్కువ" రూపము వస్తుంది. ఈ విధంగా మార్చినందున వచ్చే సంచిత పౌనఃపున్యం క్రమక్రమంగా పెరుగుతుంది. కావున దీనిని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అంటారు.

రోజువారి వేతనం (రూ॥లలో)	కార్మికుల సంఖ్య (అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యము)
75 కంటే తక్కువ	20
100 కంటే తక్కువ	35
125 కంటే తక్కువ	65
150 కంటే తక్కువ	80
175 కంటే తక్కువ	95
200 కంటే తక్కువ	100

(ఇ) మధ్య విలువలు ఆధారంగా : కొన్ని సందర్భాల్లో పౌనఃపున్య విభాజనంలో తరగతి అంతరాల స్థానే మధ్య విలువలను తీసుకొనే విభాజనాన్ని రూపొందించవచ్చు. ఇలాంటి విభాజనం కింది విధంగా వుంటుంది.

మధ్యవిలువలు	పౌనఃపున్యము
5	20
15	15
25	30
35	15
45	15
55	5
మొత్తం	**100**

పై పట్టికను బట్టి గమనిస్తే మధ్య విలువలుగా మార్చక పూర్వము ఆ తరగతులు 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60గా వుండి వుంటాయి.

(యఫ్) వివృత అవధులున్న తరగతి అంతరాలు : కొన్ని తరగతులలో, వివృతాంతము (open end) తరగతి అంతరాలు లేదా వివృత అవధులున్న తరగతి అంతరాల రూపంలో కొన్నిసార్లు యివ్వబడును. అంటే ప్రారంభ తరగతికి దిగువ అవధి, చివరి తరగతికి ఎగువ అవధులు వుండవు.

తరగతి అంతరము (CI)	పౌనఃపున్యము (f)
75 లోపు	20
75 - 100	15
100 - 125	30
125 - 150	15

150 - 175	15
175 పైన	5
మొత్తం	**100**

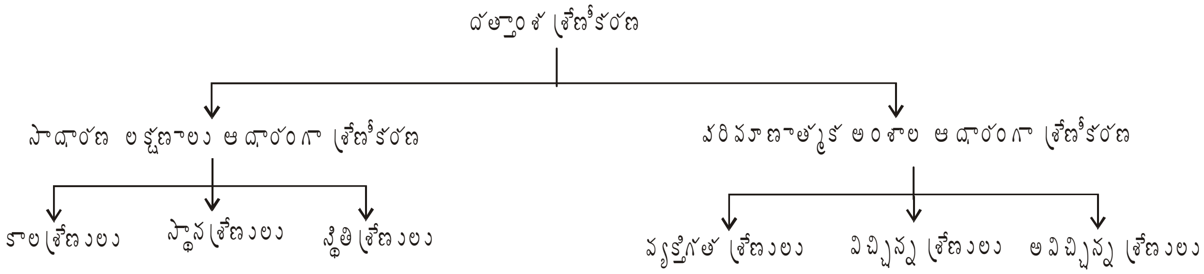
పై విధంగా వ్రాయడం వల్ల 75కి లోపు అంటే 50 నుండి 75 అని 175 ఆ పైన 175-200 అని స్పష్టంగా చెప్పలేము.

(జి) అసమాన తరగతి అంతరాలు : అప్పుడప్పుడు అసమాన తరగతి అంతరాలలో దత్తాంశము యివ్వబడును. అవి సమగ్రలో వుండవచ్చు, అసమగ్రలో వుండవచ్చు. వివృత అవధుల్లోనైనా వుండవచ్చు, సమగ్రలో వున్న ఒక విభాజనాన్ని కింద ఇవ్వడం జరిగింది.

తరగతి అంతరము (CI)	పౌనఃపున్యము
0 - 20	10
20 - 35	15
35 - 45	30
45 - 60	10
60 - 80	5
80 - 90	3
90 - 100	2
మొత్తం	**75**

3.4.3 శ్రేణీకరణ (Seriation) : వర్గీకరించిన దత్తాంశాన్ని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చటాన్నే శ్రేణీకరణ అంటారు. హొరేస్ సెక్రిస్ట్ ప్రకారం కోనార్ శ్రేణీకరణ అంటే "అంశాలను లేక అంశాలకు సంబంధించిన లక్షణాలను ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చడం''. కోనార్ మహాశయుని ప్రకారం "ఒక చలరాశిలోని అంశాలను కొలవలగలిగిన వ్యత్యాసాన్ని, దానికి అనుబంధంగా వున్న మరొక చలరాశిలోని అంశాలను కొలవలగలిగిన వ్యత్యాసాన్ని ఒకదాని ప్రక్కన ఒకటి అమర్చితే వచ్చే రూపమే శ్రేణీకరణ''.

కాలము, స్థానము, స్థితులను బట్టి దత్తాంశ శ్రేణీకరణ జరిగినట్లయితే దానిని సాధారణ లక్షణాల ఆధారంగా శ్రేణీకరణ అంటారు. పరిమాణాత్మక లేదా అంకెలలో ఉన్న సమాచారాన్ని వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులని శ్రేణీకరించడం జరుగుతుంది.



3.3.1 సాధారణ లక్షణాల ఆధారంగా శ్రేణీకరణ : దత్తాంశము యొక్క సాధారణ లక్షణాలపై ఆధారపడి శ్రేణులను మూడు రకాలుగా వివరించవచ్చు. అవి : 1. కాలశ్రేణులు, 2. స్థాన శ్రేణులు, 3. స్థితి శ్రేణులు. ఈ మూడు విధాలైన శ్రేణీకరణలను గురించి తెలుసుకుందాం.

1. కాలశ్రేణులు : దత్తాంశాన్ని కాలక్రమ వరుసతో ఏర్పాటు చేయడం లేదా అమర్చడాన్ని కాలశ్రేణులు అంటారు. ఈ కాల ప్రమాణం ఒక సంవత్సరం లేదా ఒక నెల లేదా ఒక వారం మొదలైన విధంగా వుండవచ్చు. కాలానుగుణంగా అమర్చడం ఆరోహణలో లేదా అవరోహణ చేయవచ్చు. ఉదా : ఒక సంస్థలో 1994 నుండి 2003 వరకు ఉత్పత్తి ఏ విధంగా వున్నదో ఈ శ్రేణీకరణ సూచిస్తుంది.

సం॥రము	ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నులలో)
1994	22
1995	27
1996	34
1997	42
1998	53
1999	40
2000	56
2001	62
2002	71
2003	79

ఈ విధంగా దత్తాంశాన్ని కాలానుగుణంగా ఏర్పాటు చేయడం వల్ల గడచిన కాలంలోని దత్తాంశ చలనాన్ని(ఉత్పత్తి ప్రవృత్తిని) అర్థం చేసుకోవచ్చు. వివిధ కాలాల మధ్య తులనాత్మక అధ్యయనానికి వీలు కలుగుతుంది.

2. స్థాన శ్రేణులు : సేకరించిన సమాచారాన్ని భౌగోళిక స్థలాల లేదా స్థానాల ప్రాతిపదికగా అమర్చటాన్నే భౌగోళిక శ్రేణులు లేదా స్థాన శ్రేణులు అంటారు. ఈ శ్రేణులలో దత్తాంశాన్ని పరిమాణ క్రమంలోగాని, అక్షరాది క్రమములోగాని, ఏర్పాటు చేస్తారు. ఉదా : 1991లో కొన్ని పట్టణాలలో జనాభా ఈ క్రింది విధంగా వున్నది.

పట్టణం	జనాభా (కోట్లలో)
A	234
B	721
C	745
D	827
E	1309

3. స్థితి శ్రేణులు : ఏదో ఒక షరతును లేదా స్థితిని ఆధారంగా తీసుకుని దత్తాంశాన్ని ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చితే దానిని స్థితి శ్రేణులు అంటారు. ఇక్కడ స్థితి అనగా ఒక నిర్ణీత చలాంకము. అవి ఉత్పత్తి గాని, మార్కులు గాని, బరువు, ఎత్తు మొదలైనది ఏదైనా కావచ్చు. స్థితి శ్రేణులను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో శ్రేణీకరించడం జరుగుతుంది.

ఉదా : 1990, 91లో ఆంధ్రప్రదేశ్‌లోని పంటల ఉత్పత్తి.

పంట	ఉత్పత్తి (టన్నులలో)
వరి	7011
జొన్న	1082
చెరకు	1042
మొక్కజొన్న	725

3.3.2 పరిమాణాత్మక అంశాల ఆధారంగా శ్రేణీకరణ : సేకరించి, వర్గీకరించిన పరిమాణాత్మక లేదా అంకెలలో వున్న వ్యక్తిగతంగా కాని, సమూహాలుగా కాని, వాటి అనురూప సంఖ్యను పక్క పక్కనే చూపడం జరుగుతుంది. అంకెలలో వున్న సమాచారాన్ని మూడు విధాలుగా శ్రేణీకరించడం జరుగుతుంది. అవి ఏమనగా : 1. వ్యక్తిగత శ్రేణులు, 2. విచ్ఛిన్న శ్రేణులు, 3. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు. వీటిని గూరించి ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం. సమూహాలుగా లేదా వర్గాలుగా విభజించి చూపే గణాంక పట్టికను పౌనఃపున్య విభాజనం లేదా పౌనఃపున్య పట్టిక అంటారు. విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య పట్టీ రూపాలే. పౌనఃపున్య విభాజనకు ఈ లక్షణాలు వుంటాయి. 1. ఇది ఒక గణాంక పట్టిక, 2. ఈ పట్టికలో వివిధ చలరాశుల సమితులను చూపుతారు, 3. ఆ విలువల సమితులను వాటి అవసరతను బట్టి బట్టి ఏర్పాటు చేస్తారు, 4. ఇవి వ్యక్తిగత విలువలుగా గాని, సమూహాలుగా (తరగతి అంతరాలు) గాని ఏర్పాటు చేస్తారు.

1. వ్యక్తిగత శ్రేణులు : ఈ శ్రేణులలో వ్యక్తిగత అంశాలను ఒకదాని తరువాత ఒకటి జాబితాలో అమర్చడం జరుగుతుంది. అంశాలను వరుస క్రమంలో లేదా పేర్లకనుగుణంగా కాని అమర్చటం జరుగుతుంది.

ఉదాహరణ : ఒక తరగతిలో గల 30 మంది విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులు

66	80	90	70	60	64	78	93	98	71	68	72	62	83	61
94	96	97	81	86	44	35	79	77	85	59	50	89	57	55

పైన సూచించిన విలువలను ఆరోహణ క్రమములోగాని, అవరోహణ క్రమములోగాని ఏర్పరచవచ్చు. ఆరోహణ క్రమములో అతి తక్కువ విలువగల అంశాన్ని ముందుగాను తరువాత ఎక్కువ విలువ గలిగిన అంశాలను వరుసగా అమరుస్తూ ఒక క్రమములో రాస్తారు. అవరోహణ క్రమములో అతి ఎక్కువ విలువగల అంశాన్ని ముందుగా రాసి దాని కంటే తక్కువ విలువగల అంశాలను వరుసగా ఏర్పరుస్తారు.

ఆరోహణ క్రమంలో అమరిక :

35	44	50	55	57	59	60	61	62	64	66	68	70	71	72
77	78	79	80	81	83	85	86	89	90	93	94	96	97	98

ఆవరోహణ క్రమంలో అమరిక :

98	97	96	94	93	90	89	86	85	83	81	80	79	78	77
72	71	70	68	66	64	62	61	60	59	57	55	50	44	35

ఈ శ్రేణులలో దత్తాంశాన్ని ఏర్పాటు చేయడం చాలా సులభం. కాని ఇది దత్తాంశ వివరణకు అంతగా తోడ్పడదు. దీని ప్రయోజనం పరిమితంగా వుంటుంది. అయితే వర్గీకరణ ముఖ్య సూత్రాలైన తారతమ్యత సూక్ష్మీకరణకు ఇది పనికిరాదు.

2. విచ్ఛిన్న శ్రేణులు : దీనిలో ఒక చలరాశిలోని వివిధ విలువలను, ఆ విలువలు ఎన్నిసార్లు లభ్యమయ్యాయో చూపడం జరుగుతుంది. వివిధ వర్గాల చలరాశుల విలువల మధ్య నిర్దిష్టమైన తేడా వుంటుంది. అంశాల లభ్యతను పౌనఃపున్యం అంటారు. ప్రొఫెసర్ ఆచార్య బోడింగ్‌టన్ అభిప్రాయంలో దత్తాంశాన్ని అమర్చడంలో అంశాలకి మధ్య ఖచ్చితమైన ఖాళీ వుండేటట్టు ఏర్పరచితే దానిని విచ్ఛిన్న శ్రేణులు అంటారు. దీనిలోని అంశాలను ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చి దానికి ఎదురుగా ఆయా అంశాలకు సంబంధించిన పౌనఃపున్యాలను రాస్తారు.

ఉదాహరణకు :

కుటుంబములోని పిల్లల సంఖ్య (చలరాశి)	కుటుంబాల సంఖ్య(పౌనఃపున్యం)
0	10
1	20
2	60
3	30
4	08
5	02

కొన్ని సమాచారాలను విచ్ఛిన్న రూపంలో చూపటం. ఉదా॥ పిల్లల కుటుంబ సభ్యులు etc. అనివార్యం అవుతుంది.

3. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : దీనిలో అంశాల విలువ రెండు అవధుల మధ్య వుంటుంది. అంశాలను తరగతి అంతరాలుగా లేదా వర్గాలుగా విభజించి అమర్చడం జరుగుతోంది. ఈ శ్రేణులలో చలరాశి విలువలు రెండు అవధుల మధ్య సూచించడం జరుగుతుంది. దీనిని తరగతి అంతరము అంటారు. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతి అంతరాలు విభాజనంలో ప్రారంభ విలువల నుండి చివరి విలువ వరకు కొనసాగుతాయి. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులకు ఒక ఉదాహరణను గమనిద్దాం.

మార్కులు (CI)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)
0 - 20	10
20 - 40	25
40 - 60	30
60 - 80	15
80 - 100	07

3.4 సారాంశం

సత్యాన్వేషణ కోసం ఒక శాస్త్రీయ పద్ధతిలో జరిపే శోధన లేదా పరిశోధనయే గణాంక విచారణ అంటారు. గణాంక విచారణ నాల్గవ దశలో జరిగే ప్రక్రియలలో మొదటిది వర్గీకరణ. సేకరించిన సమాచారాన్ని ఎడిటింగ్, సమానీకరణ, దోషరహితంగా చేసిన తరువాత వర్గీకరణ చేయడం జరుగుతుంది. సమ, అసమ లక్షణాలపై ఆధారపడి దత్తాంశాన్ని కొన్ని తరగతులుగా లేదా వర్గాలుగా విభజించటాన్నే వర్గీకరణ అంటారు. వర్గీకరణ నాలుగు రకాలుగా అంటే భౌగోళిక వర్గీకరణ, కాలక్రమ వర్గీకరణ, గుణాత్మక వర్గీకరణ మరియు పరిమాణాత్మక వర్గీకరణలుగా చెప్పవచ్చు. వర్గీకరించిన దత్తాంశాన్ని ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చడాన్నే శ్రేణీకరణ అంటారు. ఒక విధంగా శ్రేణీకరణను కాలశ్రేణులు, స్థాన శ్రేణులు, స్థితి శ్రేణులుగా చెప్పవచ్చు. మరో విధంగా వ్యక్తిగత శ్రేణులు,

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులుగా చెప్పవచ్చు. గణాంక విశ్లేషణలో వర్గీకరణ - శ్రేణీకరణ చేసేటప్పుడు తీసుకునే జాగ్రత్తల వల్ల మంచి ఫలితాలు వస్తాయి. తరువాత పాఠంలో మనం పట్టీకరణను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

3.5 ముఖ్యపదాలు

1. వర్గీకరణ : తుల్యాంశాలపై ఆధారపడి దత్తాంశాన్ని వివిధ తరగతులుగా అమర్చడం.
2. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అంశాల విలువ అవిచ్ఛిన్నంగా లేదా రెండు అవధుల మధ్య వుండేటట్లు అమర్చిన శ్రేణులు.
3. సమగ్రరూపం : తరగతి అంతరాల్లో పై తరగతి ఎగువ అవధి, కింది తరగతి యొక్క దిగువ అవధి సమానంగా వుండేటట్లు రూపొందించిన తరగతి అంతరాల రూపాన్నే సమగ్రరూపం అంటారు.

3.6 నమూనా ప్రశ్నలు

1. వర్గీకరణ ఉద్దేశ్యాలు ఏమి ? వివిధ వర్గీకరణ పద్ధతులు వివరించండి.
2. శ్రేణీకరణను నిర్వచించి వివిధ రకాల శ్రేణులను గూర్చి తెలపండి.
3. మినహాయింపు విలీన పద్ధతులలో తరగతి అవధులు ఏ విధంగా వుంటాయి.

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

4. గుణాత్మక వర్గీకరణ
5. తరగతి అంతరాలు
6. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

3.12 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. B.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
2. S.P. Gupta	:	Statistical Methods
3. C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
4. S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics.
5. M.C. Shukla and S.S. Gulshan	:	Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 4

పట్టీకరణ - పౌనఃపున్య పట్టీ

పాఠ్యంశ నిర్మాణక్రమం

4.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలు తెలుసుకోగలరు.

* పట్టీకరణ అంటే ఏమిటి - పట్టీకరణలో పాటించవలసిన సూత్రాలు
* పట్టీకరణలో రకాలు
* వివిధ రకాలైన పట్టికలు రూపొందించే విధానం
* పౌనఃపున్య పట్టీ రూపొందించే విధానం

4.1 విషయ పరిచయం

గణాంక విచారణ ఐదు దశల్లో జరుగుతుందని, అందులో మొదటి మూడు దశలను గూర్చి గత పాఠాలలో మనం తెలుసుకున్నాం. నాలుగో దశలోకి వర్గీకరణ, శ్రేణీకరణ, పట్టీకరణ, రేఖాచిత్ర పటాల ద్వారా సమర్పణలు వస్తాయి. గత పాఠంలో వర్గీకరణ, శ్రేణీకరణలను గూర్చి చదువుకున్నాం. సమర్పణ అంటే దత్తాంశాన్ని ప్రజలకు వెల్లడి చేయడం, దత్తాంశాన్ని సమర్పించే పద్ధతులను, అందులో పట్టీకరణను గూర్చి ఈ పాఠంలో మనం తెలుసుకోబోతున్నాం.

4.2 దత్తాంశ సమర్పణ(Presentation of Data)

సేకరించిన దత్తాంశాన్ని వర్గీకరించిన తరువాత తారతమ్య వివేచనకు, తరువాత చేయవలసిన విశ్లేషణలకు సరిపోయే విధంగా దానిని సమర్పించవలసిన అవసరముంది. సాధారణంగా దత్తాంశాన్ని క్రింది పద్ధతులలో సమర్పిస్తారు.

1. పాఠ్యరూపము (Textual Statement Form)
2. పట్టీల రూపము (Tabular Form)
3. చిత్ర పటాలు, రేఖా చిత్రాల రూపము (Diagramatic and Graphic form)

1. పాఠ్యరూపము : ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని పేరాల రూపములో (Paragraph) సమర్పిస్తారు. ఉదాహరణకు భారతదేశ జనాభా లెక్కల దత్తాంశాన్ని పాఠ్యరూపములో సమర్పిస్తే...

"1951 సం॥ జనాభా లెక్కల ప్రకారం భారతదేశ జనాభా 35.7 కోట్లు. వారిలో వ్యవసాయ రంగంలో 24.9 కోట్లు, మిగిలిన వ్యవసాయేతర రంగంలో నిమగ్నులైయున్నారు. మొత్తం జనాభాలో 29.5 కోట్లు గ్రామీణ భారతంలోను 6.2 కోట్లు పట్టణ ప్రాంతాలలో నివసిస్తున్నారు'' అనే విధంగా సమర్పణ చేయడం జరుగుతుంది.

ఈ పద్ధతి సంఖ్యా దత్తాంశాన్ని సమర్పించుటకు అంత అనువైనది కాదు. సంఖ్యల అర్థాన్ని ప్రాముఖ్యాన్ని గ్రహించుటకు పాఠ్యభాగాన్ని పదే పదే పఠించవలసి వుంటుంది. తారతమ్య పరిశీలన శ్రమతో కూడిన పని విపులీకరణ ఎక్కువయ్యేకొద్దీ, ఆసక్తి కూడా తగ్గును. ఎక్కువ విషయాలపై తారతమ్య పరిశీలన చేయవలసి వచ్చినపుడు ఈ పద్ధతి అంతగా ఉపయోగపడదు. పేరాల వారీగా విషయాన్ని చర్చిస్తున్నప్పుడు పట్టికనుగాని, చిత్రపటాన్ని గాని, రేఖా చిత్రాన్ని గాని సందర్భానుసారంగా వినియోగించు కొనవచ్చును. అవసరాన్ని బట్టి ఏ ఒక్క పద్ధతిని గాని లేదా అన్ని పద్ధతులనైనా ఉపయోగించుకోవచ్చును.

4.3 పట్టీకరణ (Tabulation)

వర్గీకరణ చేసిన దత్తాంశాన్ని నిలువు గళ్ళలోను (columns), అడ్డగళ్ళలోను (Rows) సరియైన పద్ధతిలో అమర్చితే దానిని పట్టీకరణ అందురు. పట్టీలోని అడ్డుగళ్ళను క్షితిజ పంక్తులు (Horizontal lines), నిలువు గళ్ళను ఊర్ధ్వ పంక్తులు (Vertical lines) అందురు. దత్తాంశ పౌనఃపున్య విభాజన అమరికలను పౌనఃపున్య పట్టీలందురు. దత్తాంశ సేకరణకు, సరియైన ఫలితాలు వెలిబుచ్చుటకు మధ్య జరిగే ప్రక్రియయే పట్టీకరణ అని బౌలి అంటారు. ఒక సమస్యకు సంబంధించిన పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని క్రమరూపంలో జాబితా వ్రాసి, దత్తాంశంలోని గణాంకాలను, ఊర్ధ్వ క్షితిజ పంక్తులలో అమర్చి, తగిన శీర్షిక పెట్టి, దత్తాంశమూలం చెప్పి, బోధపడేటట్లు వ్రాస్తే, గణాంక పట్టీకరణ అంటారని బెటర్ చెప్పాడు.

పట్టీ అంటే అసలు దత్తాంశాన్ని సంగ్రము చేసిన సంక్షిప్తి (Summary) అని అర్థము. పట్టీకరణలో సాధ్యమైనంతవరకు ఎక్కువ భోగట్టా యివ్వడం, ప్రాముఖ్యము లేని అంకెలు, పనికిరాని అంశాలు వదలడం జరుగుతుంది.

4.3.1 వర్గీకరణ - పట్టీకరణ మధ్య తేడాలు : వర్గీకరణ, పట్టీకరణ వేరు వేరు పద్ధతులు కావు. ఈ రెండు ప్రక్రియలు ఒకదాని తరువాత ఒకటి జరుగుతాయి. పట్టీకరణకు ప్రథమ సోపానము వర్గీకరణ. వర్గీకరణ చేసిన దత్తాంశాన్ని పట్టీకరణ చేయటం జరుగుతుంది లేదా వర్గీకరించిన దత్తాంశానికి శాశ్వత రూపాన్నివ్వటమే పట్టీకరణగా చెప్పవచ్చు.

వర్గీకరణలో దత్తాంశాన్ని సాదృశ్యం, సాదృశ్యం లేని అంశాలుగా విభజించి, వివిధ తరగతులుగా, ఉపతరగతులుగా యేర్పాటు చేయటం జరుగుతుంది. తరువాత నిలువుగళ్ళు, అడ్డగళ్ళలో అమర్చడం జరుగుతుంది. అందువల్ల పట్టీకరణ అనేది వర్గీకరణకు యాంత్రిక విధిగా పరిగణింపవచ్చు (Mechanical function). అంటే వర్గీకరణ గణాంక విశ్లేషణకు ఉపయోగపడే విధానము అయితే పట్టీకరణ ఆ దత్తాంశాన్ని సముచిత రూపంలో సమర్పించే విధానము.

4.3.2 పట్టీకరణ - ముఖ్యోద్దేశాలు

1. **క్లిష్ట దత్తాంశాన్ని సులభం చేయడం :** దత్తాంశానికి సంబంధించి ఉత్పన్నమయ్యే ప్రశ్నలన్నింటికి సమాధానాలు స్థూలంగా చూపడమే పట్టీకరణ ముఖ్యోద్దేశము. దత్తాంశాన్ని పట్టీకరణ చేయడం ద్వారా పనికిరాని విషయాలు తొలగిపోతాయి. దత్తాంశాన్ని సరియైన పద్ధతిలో నిలువుగళ్ళు, అడ్డగళ్ళలో చూపడం వలన అధ్యయనం చేసే వారికి పట్టికలో గల అంశాలన్నీ సులభంగా అతి స్వల్ప సమయంలో అవగాహన అవుతాయి.

2. **తారతమ్యతను సులభంగా ఎత్తిచూపడం :** పట్టీ అనేక అంశాలను అడ్డంగా, నిలువుగా వున్న గళ్ళలో చూపటం వల్ల వాటి మధ్య బాంధవ్యం, తారతమ్యం సులభంగా అధ్యయనం చేయడానికి వీలవుతుంది.

3. **దత్తాంశానికి సవిస్తారమైన సమానత చేకూర్చడం :** ఒక పట్టీకి నంబరు, శీర్షిక యివ్వడం వల్ల పట్టీని సులభంగా గుర్తింపవచ్చును. ఒక నంబరు గల పట్టీలోని దత్తాంశాన్ని ద్వితీయ దత్తాంశంగా సేకరించడానికి, విపులీకరించడానికి ఉపయోగింపవచ్చు.

4. **అమరికలు తెల్పడం :** పట్టీకరణ వల్ల చలరాసుల మధ్య సంబంధము, నడవడిక ప్రవృత్తిని గుణించి విశ్లేషణ చేయవచ్చును. వివిధ దత్తాంశములలో వున్న అమరికలను వాక్య రూపములో కంటే పట్టీల నుండి సులభంగా గ్రహించవచ్చును. పట్టీలు దత్తాంశ వాస్తవ లక్షణాలు వెల్లడి చేసి వాటి ప్రాముఖ్యతను తెల్పుతాయి.

5. **గణాంక ప్రక్రియలకు వీలు కల్పించడం :** పట్టీకరించిన దత్తాంశము నుండి గణాంక పద్ధతులైన సగటులు, విస్తరణ, వైషమ్యము, సహసంబంధము, ప్రతిగమనము, ప్రవృత్తి గణన మొదలైన వాటిని గణన చేయుటకు వీలుపడును. విలువలను పోల్చడం, తారతమ్యాలు తేల్చడమే గాక సరియైన అనుమతులను (inference) పొందవచ్చును.

4.3.3 పట్టీకరణ-దశలు

దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించడం ముఖ్యంగా మూడు దశల్లో కొనసాగుతుంది. ఈ దశలలో

1. షెడ్యూళ్ళ నుండి అంశాలను సేకరించి కాగితపుముక్కలు (slips) లేదా క్రియాత్మక పత్రాలు (working sheets) మీద ఎక్కిస్తారు. ఈ భోగట్టా అనుకరణ చేయడానికి కార్డులు లేదా గణపత్రాలు (Tally sheets) ఉపయోగిస్తారు. ఈ పనిని యంత్ర సహాయంతో గూడా చేయవచ్చు.

2. తరువాత దశలో క్రియాత్మక పత్రాలను పూర్తి చేసి ఉపయోగిస్తున్న ఫారాలపై ఫలితాలను ఎక్కిస్తారు.

3. ఆఖరి దశలో తుది పట్టికలను తయారు చేయుదురు. ఈ దశలలో దత్తాంశంలో పనికిరాని, అవసరం లేని అంకెలను వదలివేయడం జరుగుతుంది.

పై పట్టీలో గణ చిహ్నాలు నాలుగు గీతల చొప్పున గీసి ఆ నాల్గింటిని కలుపుతూ కర్ణంగా ఐదవ గీత గీయడం జరిగినది. ఈ పద్ధతిని ఐదు గీతలు గీయడం అని గాని, నాలుగు గీతలు గీసి ఐదవ గీత గీయడం అని గాని అంటారు. పౌనఃపున్యాలు పెద్దవైతే 10 గీతలు గీయవచ్చు. అంశాలను లెక్కించుటకు చుక్కలను కూడా గణచిహ్నాలుగా వాడతారు. చుక్కలతో తయారు చేసిన పట్టీని చుక్కల చిత్రము (spot diagram) అంటారు.

4.3.4 పట్టీలోని భాగాలు : పట్టీలో ఎన్ని భాగాలుండవలెననే సమస్య దత్తాంశాన్ని బట్టి నిర్ణయింపబడును. కాని మంచి పట్టీకి ఈ క్రింద యిచ్చిన ముఖ్యాంశములుండవలెను.

(ఎ) **పట్టీ నంబరు :** ప్రతి పట్టీకి ఒక నంబరు కేటాయించవలెను. నంబరును బట్టి పట్టీని సులభంగా గుర్తింపవచ్చును. పట్టీ నంబరు గుర్తించుటకు అనేక రకాల పద్ధతులు వాడుకలో కలవు. పై భాగములో మధ్యగా శీర్షికల మీదను, లేదా పై భాగములో శీర్షిక పక్కన లేక పట్టీ దిగువ ఎడమ చేతి ప్రక్కన పట్టీ నంబరు గుర్తిస్తారు. కాని పై భాగములో మధ్యగా శీర్షిక మీద పట్టీ నంబరు యివ్వడం మంచి పద్ధతి.

(బి) **పట్టీ పేరు :** ప్రతి పట్టీకి సరియైన పేరు యివ్వవలెను. పట్టీ పేరు, పట్టీలో గల విషయాలను క్లుప్తంగా వర్ణించేటట్లు ఉండవలె. పట్టీ పేరు సాధ్యమైనంతవరకు యీ క్రింది విషయాలను వివరించవలెను.

(1) ఎటువంటి దత్తాంశము పట్టీలో చూపబడినది ?

(2) దత్తాంశము ఏ కాలానికి చెందినది ?

(3) దత్తాంశము ఎక్కడ నుంచి గ్రహించబడినది ?

పట్టీ పేరు స్పష్టంగాను, క్లుప్తంగాను, వెంటనే బోధపడే విధంగాను ఉండవలెను. పట్టీకి దీర్ఘమైన పేరు పెట్టరాదు. కాని స్పష్టంగా యుండడానికి అప్పుడప్పుడు దీర్ఘమైన పేర్లు వాడవచ్చు. పేరులోని ప్రతి పదానికి ఒకే అర్థము వుండవలెను. పేరు వాక్య రూపములో కాక వివిధ పదాలలో దత్తాంశాన్ని వ్యక్త పరచేటట్లుంటే బాగుంటుంది. పేరు ప్రాముఖ్యంగా వుండవలెను. ప్రాముఖ్యానికి వివిధ రంగులు వాడవచ్చు. పేరు పెద్ద అక్షరములతో ముద్రిస్తే (Bold print) పట్టీలో గల యితర అక్షరాలతో వేరు చేయవచ్చును.

(సి) **శీర్షిక (Caption) :** పట్టీకి కుడివైపున నిలువు గీతలపై వ్రాసిన పదాలను (Captions) శీర్షికలంటారు. నిలువుగీత గడిలో ఏమున్నదీ దాని శీర్షిక చెబుతుంది. ఒక పట్టీలో ఒకటి గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని ఉపశీర్షికలుండవచ్చును. శీర్షిక పదాన్ని స్పష్టంగా నిర్వచించి నిలువుగీత గడి మధ్యలో వ్రాసి చూపవలె. వివిధ నిలువుగీతల గళ్ళలో గల గణాంక ప్రమాణాలు వేరు వేరుగా వుంటే ఆ గణాంక ప్రమాణాలను కూడా శీర్షికలలో చూపవలె. పట్టీ పేరు కంటే శీర్షికలు చిన్నవిగా వుండవలెను. శీర్షికను ఆంగ్లములో బాక్స్ హెడ్ (Box head) అంటారు.

(డి) **స్టబ్స్ (Stubs) :** పట్టీకి ఎడమవైపున వ్రాసిన పదాలను స్టబ్స్ అంటారు. స్టబ్స్ క్షితిజ రేఖల గళ్ళలో గల పదాలను వర్ణిస్తాయి. స్టబ్స్ వరుసలను సూచిస్తాయి. క్షితిజ రేఖల మధ్యలో గల గణాంకాల గురించి చెబుతాయి. స్టబ్స్ సాధారణంగా శీర్షికల కంటే పెద్దవైనను (దీర్ఘమైనవి) సాధ్యమైనంత వరకు చిన్నవి(Narrow) చేసి వ్రాయాలి.

(ఇ) **అంశాల భోగట్టా యిచ్చే భాగము (Body) :** ఈ భాగములో పూర్తి సంఖ్యా దత్తాంశముండును. ఇది పట్టికలోని ముఖ్య భాగము. దత్తాంశాన్ని వాటి ప్రాముఖ్యత తెల్పే విధంగా వ్రాయవలెను. ఈ క్రింద తెల్పినట్లు దత్తాంశాన్ని అమర్చవచ్చును. (1) అక్షర క్రమం (2) భౌగోళిక క్రమం (3) కాలాత్మక క్రమం (4) సాంప్రదాయిక క్రమం (5) వర్ధమాన క్రమం (6) ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమం. ఇందులో సమర్పణ చేసిన దత్తాంశాన్ని శీర్షికలు, స్టబ్స్, గళ్ళలో అమర్చెదరు.

(ఎఫ్) ముఖ్య గమనిక **(Head Note) :** ఇది పట్టికలో గల అన్ని విభాగాలను గురించి బోధపరిచే వాక్యము. పట్టీలో గల విషయాలను సంగ్రహంగా సూచిస్తుంది. సాధారణంగా పట్టీ పేరు క్రింద, కుండలీకరణాలలో వుంటుంది. పట్టీ పేరులో గాని, శీర్షికలోగాని, స్టబ్స్‌లో గాని చెప్పని విషయాలు యిందులో వుంటాయి. ఉదాహరణకు గణన ప్రమాణాన్ని ముఖ్య గమనికలో "వేలలో", "లక్షలలో" అని లేదా టన్నులో, రూపాయలలో అని వివరిస్తాయి.

(జి) పాదసూచిక **(Foot Note) :** ఇది ఒక పదంలోగాని, చిన్న వాక్యరూపంలోగాని వుంటుంది. పట్టీలో ఒక నిర్ణీత విషయాన్ని గురించిగాని, లేదా పట్టీలో మినహాయించిన విషయాలను గూర్చిగాని చెబుతుంది. దీనిని పట్టీ దిగువ భాగంలో వ్రాస్తారు. పాద సూచికను దిగువతెల్పిన సందర్భాలలో వ్రాస్తారు.

(1) దత్తాంశములో అస్థిరత్వమున్నప్పుడు

(2) దత్తాంశములో సంధిగ్దత వున్నప్పుడు

(3) ప్రత్యేక పరిస్థితుల వల్ల దత్తాంశము ప్రభావితమైనప్పుడు. ఉదా॥ కార్మిక సమ్మె కాలము, ఫ్యాక్టరీ మూసివేత కాలము, అగ్ని ప్రమాదాలు మొదలైనవి.

(హెచ్) దత్తాంశమూలము (Source) : పట్టీలో చూపిన దత్తాంశము ఏ మూలాధారాల నుండి సేకరించారో తెలియచేయాలి. దత్తాంశమూలం పూర్తి వివరణ యిందులో యివ్వాలి. పట్టీలో చూపే దత్తాంశం ద్వితీయ దత్తాంశ కోవకు చెందినదైతే దానినెక్కడ నుండి గ్రహించారో, మూలం పేజి, నంబరు, గ్రంథకర్తపేరు, సంవత్సరము, సంపుటి సంఖ్య, సంచిక సంఖ్య మొదలైన వానిని తెలుపవలెను. అట్లా చెప్పడం వలన ద్వితీయ దత్తాంశాన్ని వాడే వ్యక్తి అవసరమైతే ప్రాథమిక దత్తాంశాన్ని సులభంగా కనుక్కోగలడు.

(ఐ) **పట్టీ తయారుచేసే వారు :** పట్టీని ఎవరు తయారు చేశారో వారి వివరాలు కూడా పట్టీ కింద తెల్పాలి.

నమూనా పట్టీ

పట్టీ నంబరు (Table Number) | పట్టీ పేరు | ముఖ్య గమనికలు (Head Notes)

<table>
<tr><td rowspan="2">స్టబ్స్ వివరాలు అర
Stub Box</td><td colspan="4">శీర్షికలు (Captions)</td></tr>
<tr><td colspan="2">X శీర్షిక</td><td colspan="2">Y శీర్షిక</td></tr>
<tr><td>స్టబ్స్ వివరాలు</td><td>1</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
<tr><td>స్టబ్ A</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>స్టబ్ B</td><td></td><td colspan="2" rowspan="2">అంశాలనిచ్చే భోగట్టా
Body</td><td></td></tr>
<tr><td>స్టబ్ C</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>స్టబ్ D</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>మొత్తము</td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

పాద సూచిక (Foot Note) | మూలము (Source) | పట్టీ తయారు చేసినవారి సంతకం

4.3.5 పట్టీకరణ సూత్రాలు : దత్తాంశాన్ని పట్టీకరణ చేయడానికి నిర్దుష్టమైన సూత్రాలంటూ ఏమీ లేవు. దత్తాంశ స్వభావము, గణాంక విచారణ పరిధి ముఖ్యోద్దేశాన్ని దృష్టి యందుంచుకొని పట్టీలను తయారుచేయవలెను. మంచి పట్టీ తయారు చేయడమనేది ఒక కళ. పట్టీని తయారుచేయడానికి ప్రయోగాత్మక అనుభవం, తెలివితేటలు అవసరం. పట్టీకరణలో సాధారణ తెలివి తేటలకు తోడు అనుభవము ప్రధాన ఉపాధ్యాయుడు లాంటిది అని బౌలి చెప్పినాడు.

పట్టీకరించేటప్పుడు కింద సూచించిన సూత్రాలను పాటించినట్లయితే పట్టిక ద్వారా మంచి ఫలితాలు లభ్యమవుతాయి. చూడటానికి ఇంపుగా, ఆకర్షణీయంగా కూడా వుంటుంది.

1) పేజి పరిమాణానికి సరిపోయేటట్లు పట్టీ వ్రాయవలెను. పట్టీకి సరియైన అమరిక యివ్వడానికి ఒక్కొక్కప్పుడు పట్టీ రూపాన్ని మార్చావలసిన అవసరం కలుగవచ్చు. అందువలన ముందొక చిత్తు పట్టీ తయారుచేయవలెను. తరువాత ఎటువంటి పట్టీ తయారు చేయవలెనో తుది నిర్ణయము చేయవలెను. పాదసూచికలు వ్రాయడానికి తగినంత స్థలం కూడా వుంచవలెను.

2) పట్టీలో శీర్షికలను, స్టబ్స్‌ను సరియైన పద్ధతిలో అమర్చవలెను. అలా చేయడం వలన పట్టీలో గల ముఖ్య విషయాలు సులభంగా గమనింపవచ్చు. అయితే పట్టీలో అంశాలను ఎలా పేర్చవలెననే విషయము దత్తాంశ గుణముపై ఆధారపడియుండును. దత్తాంశాన్ని పట్టీలో అమర్చడానికి వాడుకలో వున్న కొన్ని పద్ధతులు ఈ క్రింద యివ్వబడినవి.

   ఎ) **అక్షరాది క్రమము :** ఇందులో దత్తాంశాన్ని అక్షర క్రమంలో అమరుస్తారు. ఈ పద్ధతి చాలా సాధారణంగా వాడుకలో యున్నది. రిఫరెన్స్ పట్టీ తయారు చేయునపుడు అక్షరాది క్రమపద్ధతి వాడతారు.

   బి) **కాలక్రమానుసార పద్ధతి :** ఇందులో దత్తాంశాన్ని కాలరీత్యా అమరుస్తారు. చారిత్రాత్మక దత్తాంశాన్ని ఈ పద్ధతిలో సమర్పిస్తారు.

   సి) **భౌగోళిక పద్ధతి :** ఇందులో దత్తాంశాన్ని ప్రదేశరీత్యా పట్టీలలో అమరుస్తారు. దేశాలు, రాష్ట్రాలు, నగరాలు మొదలైన భౌగోళిక స్థలాలకు ప్రాముఖ్యాన్నిచ్చి దత్తాంశాన్ని అమరుస్తారు.

   డి) **గుణాత్మక పద్ధతి :** గుణాత్మక దత్తాంశ అమరికలో సాంప్రదాయికంగా పురుషులు, స్త్రీలని, హిందువులు, ముస్లీములు, క్రైస్తవులని కొన్ని గుణాలను తీసుకొని దత్తాంశము వేరుచేసి పట్టీలలో వ్రాస్తారు.

   ఇ) **పరిమాణాత్మక పద్ధతి :** అంశం తాలూకు పరిమాణాన్ని బట్టి దత్తాంశాన్ని అమర్చడం. ఎక్కువ సంఖ్యలో గల దత్తాంశాన్ని ముందు అమర్చి తరువాత తక్కువ సంఖ్యలో గల దత్తాంశాన్ని అమరుస్తారు(అవరోహణ పద్ధతిలో) లేదా తక్కువ సంఖ్య గల దత్తాంశాన్ని ముందు అమర్చి తరువాత ఎక్కువ సంఖ్యలో గల దత్తాంశాన్ని అమరుస్తారు (ఆరోహణ పద్ధతి).

3) దత్తాంశ గణన ప్రమాణము స్పష్టంగా నిర్వచించి పట్టీలో పేర్కొనవలెను. ఉదా : వ్యక్తిగత రాబడులు రూపాయలలో బరువు కిలోగ్రాములలోను యివ్వవలెను.

4) అంకెలను దగ్గర సున్నాకు సవరించవలె. అలా చేయడం వలన పనికిరాని విషయాలు, తబ్బిబ్బు కలిగించే అంకెలు వదలివేయవచ్చు. కాని అంకెలను దగ్గర సున్నాకు సవరించిన విషయాన్ని పాదసూచికలో చెప్పవలెను. ఉదాహరణకు ఒక విచారణలోని దత్తాంశ సంఖ్యలను దగ్గర రూపాయలలో యిచ్చి పైసలను వదలివేయవలెను. ఇట్లా చేస్తే గణనలు కూడా సులభమగును.

5) కొన్ని అంకెలను గురించి నొక్కి చెప్పవలెనంటే ఆ అంకెలను పెట్టే ఆకారంలో గాని, వృత్తాకారంలోగాని, దట్టమైన పంక్తుల మధ్యగాని వ్రాయవలెను.

6) పట్టీని మరీ ఎక్కువ విషయాలతో నింపకూడదు. ఒక్కొక్కప్పుడు దత్తాంశములో ఎక్కువ విషయాలుంటే ఒక్కొక్క విషయానికి ఒక్కొక్క పట్టీ తయారుచేస్తే బాగుంటుంది.

7) దత్తాంశం వర్గీకరణ చేసిన తరువాత అవసరమైతే ఒక చిల్లర వరుస (Miscellaneous column) కూడా కల్పించవలె.

8) పట్టీలో అమర్చిన విషయాలు క్రమ రూపంలో వుండవలెను. దగ్గర సంబంధమున్న అంశాలను ఒకే శీర్షికలోగాని, స్టబ్‌లో గాని లేదా దగ్గర దగ్గరలోగాని అమర్చవలెను. ఉత్పన్నము చేసిన అంకెలను, అంటే మొత్తాలు, సగటుల శాతాలను వాటికి సంబంధించిన మూల అంకెల దగ్గరగా అమర్చవలెను. ఉత్పన్నాలను రాబట్టడం అవసరము.

9) ఊర్ధ్వ పంక్తులను, క్షితిజ పంక్తులను (నిలువు గీతలు, అడ్డగీతలు) గుర్తు పట్టడానికి నంబర్లు యివ్వవలె. సాధారణంగా ఊర్ధ్వ పంక్తులకు శీర్షికలతోబాటు నంబర్లు కూడా యిస్తే గుర్తించడం సులభము.

10) కొన్ని అంశాలను గురించి దత్తాంశము సేకరించలేనపుడు లేదా అంచనా వేసిన దత్తాంశము యిచ్చినపుడు, ఆ విషయము పాద సూచికలో వ్రాయవలెను.

11) పట్టీలను వ్రాయడానికి ఒక గీత రూలింగ్‌ను (Single line ruling) ఉపయోగిస్తారు. అప్పుడప్పుడు రెండు గీతల రూలింగ్ (Double line ruling) కూడా వాడతారు. ముఖ్యమైన భాగాలను విడదీసి చూపడానికి దట్టమైన గీతలు ఉపయోగిస్తారు. పట్టీ ప్రక్కల ఖాళీ స్థలం వుంచుతారు. అంటే పట్టీలను మూసివేయరు.

12) దత్తాంశములోని ప్రతి అంశము పట్టీలో ఖచ్చితంగా మరువకుండా వ్రాయవలెను. మొత్తాలను, గణనలను, జాగ్రత్తగా, తప్పులేకుండా చేయవలెను. యదార్థత దెబ్బతినకుండా పట్టీలపై పర్యవేక్షణయుండవలె.

13) పట్టీకరణకు హెచ్చు వ్యయం కాకూడదు. పట్టీలోని అంశాలన్ని ఒక్కసారి చూచేసరికి పూర్తిగా కనుపించేటట్లు పట్టీ పరిమాణము వుండవలెను.

14) అంకెలు లేని చోట (-) ద్వారా గాని (లేదు) అని గాని సూచించాలి.

15) మొదలైనవి, వగైరా, అనే సంక్షిప్త పదాలు వాడరాదు. డిటో లేదా దానికి సంబంధించిన గుర్తులు (॥) వాడడం మంచిది కాదు. అంకెలు, మాటలు ఎన్నిసార్లు వచ్చినా వ్రాయడం మంచిది.

16) ప్రతి పట్టీకి తగిన పేరు వ్రాయాలి. పట్టిక పేరులోను శీర్షికలోను సంకేతాలను వాడరాదు. సంవత్సరానికి (సం) రూపాయలకు (రూ॥లు) అని వాడరాదు. సమగ్రంగా చెప్పుకోవలెనంటే పట్టీ సామాన్యంగాను, సమగ్రంగాను తారతమ్యతకు వీలు పడే విధంగాను వుండవలెను.

4.3.6 పట్టీకరణ - ప్రయోజనాలు : పట్టీకరణ చేసినందువలన వివిధ రకాలైన ప్రయోజనాలు చేకూరతాయి. అవి :

1. పట్టీకరణ వలన ఫలితాలను సులభంగా గ్రహించవచ్చు.
2. తక్కువ కాలంలో ఎక్కువ విషయాలను గ్రహించవచ్చు.
3. భారీ దత్తాంశాన్ని క్లుప్తంగా పట్టీలలో అమర్చవచ్చు.

4. పట్టీల ద్వారా వివిధ అంశాల మధ్య గల తారతమ్యాన్ని తెలుసుకొనవచ్చును.

5. పట్టీలో దత్తాంశాన్ని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చడం వల్లనూ, అంశాలకు వర్గాలుగా, ఉపవర్గాలుగా విభజించడం వల్ల ఈ విషయాలను సులువుగా జ్ఞాపకముంచుకొనవచ్చును.

6. ఫలితాలను కనుగొనుటకు గణనలు సులభంగా చేయవచ్చును.

4.3.7 పట్టీలు - రకాలు : ఒక పద్ధతిలో పట్టికలను సాధారణ పట్టీలు, సారాంశపు పట్టీలని రెండు విధాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. **సాధారణ పట్టీలు :** దత్తాంశానికి సంబంధించిన పూర్తి పట్టీలలో సమాచారాన్నంతటినీ చూపే పట్టీలను సాధారణ పట్టీలు అంటారు. ఇందులోని భోగట్టాను సాధారణ వాడుకకు అవసరమైనపుడు త్రిప్పి చూడడానికి (reference) ఉపయోగిస్తారు. అందువల్లనే వీటిని రిఫరెన్స్ పట్టీలని కూడా అందురు. ఒక విచారణ గురించి పూర్తి భోగట్టాలు ఉండడం వలన భోగట్టాలనిచ్చే ఖజనాగా ఇవి పనిచేస్తాయి. అందువల్ల వీనిని రిపోజిటరి(Repository) పట్టీలని కూడా అందురు. ప్రభుత్వం దత్తాంశ సేకరణ చేసి ప్రచురించే పట్టీలన్నీ యిటువంటివే. ఉదా : జనాభా లెక్కలు, పారిశ్రామిక గణాంకాలు, వ్యవసాయం, ఎగుమతులు, దిగుమతులు మొదలైనవి స్టాటిస్టికల్ ఆబ్స్ట్రాక్ట్ (Statistical Abstract) నందు ప్రచురించబడును.

2. **సారాంశపు పట్టీలు** (Summary Tables) **:** వీనినే ప్రత్యేక భోగట్టానిచ్చే పట్టీలు (Special Purpose Tables), వ్యుత్పన్న పట్టీలు (Derivative Tables), విపులీకరణ పట్టీలు (Interpretative Tables) అనికూడా అందురు. ఈ పట్టీలను సాధారణ పద్ధతులు ఆధారంగా తయారుచేస్తారు. కాబట్టి వీనిని వ్యుత్పన్న పట్టీలంటారు. నిర్ణీత విషయాన్ని గురించి చెప్పడానికి ప్రభుత్వ జనాభా లెక్కల (సాధారణ పట్టీల) నుంచి కావాలసిన భోగట్టా సేకరించి ప్రత్యేక పట్టీలు తయారుచేయుదురు. గణాంక శాస్త్రంలో మనము ఎక్కువగా వాడే పట్టీలన్ని యిటువంటివే. ఈ పట్టీలు సాధారణ పట్టీకంటే చిన్నవిగా వుంటాయి. ఇందులో సమాచారం కొన్ని ముఖ్య విషయాలకు సంబంధించి చెప్పడం జరుగుతుంది.

పట్టీలను మరొక పద్ధతిలో రెండుగా విభజించవచ్చు. వీటిని గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

1. **సామాన్య పట్టీలు :** వీటిని మొదటి శ్రేణి పట్టీలు, లేక ఏకమార్గ పట్టీలు అంటారు. ఇందులో దత్తాంశము యొక్క ఒక గుణాన్నే వర్ణిస్తారు. కాబట్టి వీనిని ఏక మార్గ పట్టీలు (One way tables) అంటారు. ఉదాహరణకు 50 మంది విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులు.

100 మంది విద్యార్థుల మార్కులు

మార్కులు (తరగతి అంతరాలు)	విద్యార్థులు (పౌనఃపున్యము)
20 - 30	10
30 - 40	30
40 - 50	32
50 - 60	20
60 - 70	8
మొత్తము	**100**

పై పట్టీలో ఒక్క లక్షణం (మార్కులు) వున్న దత్తాంశం చూపబడినది. దీనిని "సరళపట్టీ" అని కూడా అంటారు. ఈ పట్టికలో పరిమిత దత్తాంశ భోగట్టాను మాత్రమే చూపడానికి వీలగును.

2. **సంకీర్ణ పట్టీలు :** ఇందులో దత్తాంశం తాలూకు రెండు గాని అంతకంటే ఎక్కువగాని గుణాలను గురించి చెప్పబడును. వాడుకలో యిటువంటి పట్టీలు ఎక్కువగా కన్పిస్తాయి. ఇందులో దత్తాంశం తాలూకు ఎక్కువ వివరాలు యివ్వబడును. దత్తాంశం తాలూకు రెండు గుణాలనే పేర్కొన్న పట్టీలను ద్విమార్గ పట్టీలని (Two Way Tables), లేదా రెండవ శ్రేణి పట్టీలని కూడా అందురు. అదే విధంగా దత్తాంశం తాలూకు మూడు గుణాలను పేర్కొన్న పట్టీలను త్రిమార్గ పట్టీలు (Three Way Tables) అని, లేదా మూడవ శ్రేణి పట్టీలని కూడా అందురు. నాలుగు కాని అంతకంటే ఎక్కువ గుణాలను గాని పేర్కొన్న పట్టీలను బహువిధ పట్టీలు (Manifold tables) అని, లేదా ఉన్నతశ్రేణి పట్టీలని (Higher Order) కూడా అంటారు.

ద్విమార్గ పట్టీ : గుంటూరు జూట్‌మిల్లు ఉద్యోగుల సంఖ్య, వారి ఆదాయము, లింగబేధము సూచించే పట్టీ.

ఆదాయము (రూపాయలలో)	పనివారి సంఖ్య		
	పురుషులు	స్త్రీలు	మొత్తము
500 - 1000	100	20	120
1000 - 1500	150	30	180
1500 - 2000	200	20	220
2000 - 2500	50	10	60
	500	80	580

ఈ పట్టీలో దత్తాంశానికి సంబంధించిన రెండు లక్షణాలను మాత్రమే ఆదాయం, లింగ బేధము చూపడం జరిగినది.

త్రిమార్గ పట్టీ

(వయస్సు, లింగభేదం, ఉద్యోగస్థాయి సూచించే పట్టీ)

వయస్సు (సంవత్సరాలలో)	ఉద్యోగస్థాయి									మొత్తం
	సూపర్‌వైజర్లు			అసిస్టెంట్లు			గుమస్తాలు			
	పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం	
25 లోపు	15	2	17	20	8	28	40	10	50	95
25 - 35	3	-	3	15	4	19	25	8	33	55
35 - 45	5	1	6	10	2	12	20	2	22	40
45 - 55	2	2	4	5	1	6	30	-	30	40
55 - ఆ పైన	5	-	5	-	-	-	5	-	5	10
మొత్తం	**30**	**5**	**35**	**50**	**15**	**65**	**120**	**20**	**140**	**240**

బహుమార్గ పట్టీలు

వయస్సు, లింగభేదం, ఉద్యోగస్థాయి, మతం ప్రకారం ఒక బ్యాంకులో పనిచేయుచున్న ఉద్యోగుల వివరాలు

మతం	వయస్సు (సంవత్సరాలలో)	ఉద్యోగస్థాయి												మొత్తము		
		మేనేజర్లు			అసిస్టెంట్లు			గుమాస్తాలు			అటెండర్లు					
		పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం	పు	స్త్రీ	మొత్తం
హిందువులు	25 లోపు	5	2	7	-	-	-	10	5	15	1	-	1	16	7	23
	25 - 35	6	-	6	3	1	4	6	4	10	3	3	6	18	8	26
	35 - 45	2	1	3	2	-	2	8	3	11	2	1	3	14	5	19
	45 - 55	1	1	2	2	1	3	4	3	7	2	1	3	9	6	15
	55 - ఆ పైన	1	1	2	1	-	1	2	-	2	2	-	2	6	1	7
	మొత్తం	**15**	**5**	**20**	**8**	**2**	**10**	**30**	**15**	**45**	**10**	**5**	**15**	**63**	**27**	**90**
మహమ్మదీయులు	25 లోపు	-	-	-	1	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	1
	25 - 35	-	-	-	2	-	2	1	-	1	-	-	-	3	-	3
	35 - 45	1	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	1
	45 - 55	-	-	-	-	1	1	1	-	1	1	-	1	2	1	3
	55 పైన	1	-	1	-	-	-	-	-	-	1	-	1	2	0	3
	మొత్తం	**2**	**-**	**2**	**3**	**1**	**4**	**2**	**-**	**2**	**2**	**-**	**2**	**9**	**1**	**10**

మరో ఉదాహరణ :

చెన్నై - ముంబాయి రేవులలో ఎగుమతులు - దిగుమతులు - తేడా చూపే ఖాళీ పట్టీ

వర్తక స్వభావం		చెన్నై		ముంబాయి	
		సరుకుల బరువు	విలువ కోట్ల రూపాయలలో	సరుకుల బరువు (టన్నులలో)	విలువ రూపాయలలో
స్వదేశం	ఎగుమతులు				
	దిగుమతులు				
	తేడా				
విదేశం	ఎగుమతులు				
	దిగుమతులు				
	తేడా				

4.3.8 పౌనఃపున్య పట్టీ తయారు చేసే పద్ధతి : గణ చిహ్నములనుపయోగించి పట్టీ తయారు చేయడం చూపటం జరిగింది. ఉదాహరణకు 30 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు. దీనిని మినహాయింపు రూపంలో చూపటం జరిగింది.

20, 25, 40, 50, 30, 25, 60, 75, 78, 60, 25, 28, 36, 40, 42, 64, 72, 76, 75, 50, 22, 25, 44, 52, 58, 60, 62, 60, 24, 36.

ఈ సమాచారాన్ని గణ చిహ్నాల రూపంలో గుర్తించడం జరుగుతుంది.

పౌనఃపున్య పట్టీ

తరగతి అంతరాలు	గణ చిహ్నములు	పౌనఃపున్యము
20 - 30	$\cancel{||||}$ |||	8
30 - 40	|||	3
40 - 50	||||	4
50 - 60	||||	4
60 - 70	$\cancel{||||}$		6
70 - 80	$\cancel{||||}$	5
	మొత్తము	N = 30

పై పట్టీలో గణ చిహ్నాలు నాలుగు గీతల చొప్పున గీసి ఆ నాల్గింటిని కలుపుతూ కర్ణంగా ఐదవ గీత గీయడం జరిగినది. ఈ పద్ధతిని ఐదు గీతలు గీయడం అని గాని, నాలుగు గీతలు గీసి ఐదవ గీత గీయడం అని గాని అంటారు. పౌనఃపున్యాలు పెద్దవైతే 10 గీతలు గీయవచ్చు. అంశాలను లెక్కించుటకు చుక్కలను కూడా గణచిహ్నాలుగా వాడతారు. చుక్కలతో తయారు చేసిన పట్టీని చుక్కల చిత్రము (spot diagram) అంటారు.

4.4 గణాంక వ్యుత్పన్నాలు (Statistical Derivatives)

సేకరించిన దత్తాంశాన్ని వివిధ దశల్లో ఎడిటింగ్, వర్గీకరణ, పట్టీకరణ చేయటం జరుగుతుంది. పట్టీకరణ చేసిన దత్తాంశాన్ని అనుకొన్నంత సులభంగా గ్రహించలేము. ఎందుకంటే పట్టీలో చాలా అంకెలు వుంటాయి. పట్టీలో వున్న అంకెల నుంచి వెంటనే సూటిగా నిర్ణయాలు తీసుకోలేము. అంతేకాక పట్టీలో వున్న అంకెల ద్వారా అంశాలను వెంటనే తారతమ్యము చేయుట కష్టము. కాబట్టి దత్తాంశాన్ని ఇంకా సంగ్రహపరచవలె. దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తంగా మార్చడానికి నిష్పత్తులు, శాతాలు, రేటులు మొదలైన వ్యుత్పన్నాలను వాడతారు.

నిష్పత్తులు, శాతాలు ఇంకా సగటులు పట్టీలోని అసలు అంకెల నుంచి గణన చేసి రాబట్టుతారు. కాబట్టి వీటిని గణాంక వ్యుత్పన్నాలు అంటారు. గణాంక వ్యుత్పన్నము ఒక పరిమాణము. అంశాలు రెండు కాని అంతకంటే ఎక్కువ కాని ఒక పద్ధతిలో మిళితం చేస్తే ఒక పరిమాణం వస్తుంది. ఈ పరిమాణాన్నే గణాంక వ్యుత్పన్నమంటారు. గణాంక వ్యుత్పన్నాల గణనము (Calculation) వల్ల వచ్చినవేగాక లెక్కపెట్టడం వల్ల (Counting) లేదా గణన (Enumeration) చేయడం వల్ల వచ్చినవి కావు.

గణాంక వ్యుత్పన్నాలు రెండు రకాలు. సామాన్య (Simple) వ్యుత్పన్నాలు, సంక్లిష్ట (Complex) వ్యుత్పన్నాలు. నిష్పత్తులు, శాతాలు, రేట్లు గుణకాలు మొదలైనవి సామాన్య వ్యుత్పన్నాలు. వీటిని గణన చేయడం సులభము. సగటులు, విస్తరణ, వైషమ్యాలు మొదలైనవి సంక్లిష్ట వ్యుత్పన్నాలు. ఇవి అనేక గణనలు చేసిన తరువాత వచ్చే ఫలితాలు.

సామాన్య వ్యుత్పన్నాలు రెండు రకాలు. అవి నిర్దేశాంక వ్యుత్పన్నాలు (Coordinative Derivatives), అధీన వ్యుత్పన్నాలు. (Subordinate Derivatives) ఒక సంవత్సరము లోని వివిధ అంశాలను ఒకదానితో నొకటి నిష్పత్తులు లేదా శాతాల ద్వారా తారతమ్యము చేస్తే వచ్చిన వ్యుత్పన్నాలను నిర్దేశాంక వ్యుత్పన్నాలంటారు. ఉదాహరణకు అక్షరాస్యులకు, నిరక్షరాస్యులకు ఉన్న నిష్పత్తి ఇటువంటిది. అట్లాకాకుండా సమిష్టిలోని అంశాలను సమిష్టిలోనే తారతమ్యం చేస్తే వచ్చిన వ్యుత్పన్నాలను అధీన వ్యుత్పన్నాలంటారు. ఉదాహరణకు, మొత్తం జనాభాలో అక్షరాస్యుల శాతము ఇటువంటిది.

4.4.1 వివిధ వ్యుత్పన్నాలు

వివిధ రకాలైన గణాంక వ్యుత్పన్నాలు అంటే ఏమిటి. వాటి గణనను గూర్చి క్లుప్తంగా తెలుసుకుందాం.

1. **నిష్పత్తులు** : నిష్పత్తి అనేది సామాన్య గణాంక వ్యుత్పన్నాలలో ఒకటి. నిష్పత్తిలో రెండు అంశాలను తారతమ్యము చేయువచ్చును. ఉదాహరణకు, భారతీయుని వ్యక్తిగత రాబడిని, అమెరికా దేశస్తుని వ్యక్తిగత రాబడితో సరిపోల్చుదామనుకొందాము. భారతీయుని రాబడి రూ. 450లు, అమెరికా దేశస్తుని రాబడి రూ. 16,200లు అనుకొందాము. ఈ రెండు రాబడులకు నిష్పత్తి 450 : 1620; లేదా 1 : 36. ఈ నిష్పత్తి అంటే 1 : 36 అనేది అమెరికా దేశస్తుని రాబడి, భారతీయుని రాబడి కంటే 36 రెట్లు ఎక్కువని తెలుపుతుంది. అంశాలను సరిపోల్చడానికి చాలా మంది నిష్పత్తులనే వాడతారు. ఉదాహరణకు, 1930 సంవత్సరం కంటే 1970 సంవత్సరపు ధరలు పది రెట్లు పెరిగినవని సాధారణ మానవుడు కూడా అంటూనే వున్నాడు.

2. **శాతాలు** : రెండు అంశాల మధ్య గల సంబంధాన్ని శాతాల ద్వారా తెలుసుకోవడం చాలా సులభం. ఎందుకంటే, రెండింటి మధ్య గల తారతమ్యాల ఎక్కువ తక్కువలు ఒక వందలో సరిపోల్చి చెప్పవచ్చును. ఇందులో వంద అంకెను ప్రామాణికంగా తీసుకొంటారు. ఈ ప్రామాణికమైన అంకె కంటే వున్న హెచ్చుతగ్గులు 100 సంఖ్యలలో గణన చేస్తారు. ఉదాహరణకు, మనదేశంలో 1960లో సిమెంటు ఉత్పత్తి 8 మిలియన్ టన్నులు అనుకొందాము. 1970లో ఉత్పత్తి 12 మిలియన్ టన్నులు అనుకుందాము. ఉత్పత్తి పెరుగుదల 4 మిలియన్ టన్నులు. 1960 లోని

ఉత్పత్తిని ప్రామాణికంగా తీసుకుందాము. దానిని బట్టి సిమెంటు ఉత్పత్తి 1970లో 50 శాతం పెరిగినదని తెలుస్తున్నది. $\left(\frac{4}{8}\times100=50\%\right)$ శాతాలను వివిధ కాలాలలో గల సాపేక్షిక మార్పులను సరిపోల్చడానికి కూడా ఉపయోగిస్తారు.

3. **రేట్లు :** జననాలు, మరణాలు మొదలైనవి ఒక వెయ్యి పరిమాణంలో సరిపోలుస్తారు. ఇందులో వెయ్యిని ప్రామాణికంగా తీసుకుంటారు. ఉదాహరణకు, మనదేశంలో జననాల రేటు వెయ్యికి 40 అంటారు. అంటే వెయ్యిమంది జనాభాకు 40 మంది శిశువులు జన్మించినారన్నమాట. అట్లాగే మరణాల రేటు కూడా ప్రతి వెయ్యిమందికి లెక్కిస్తారు. రేట్లను ఎక్కువగా ప్రాణిగణాంకాలు విశ్లేషణలో ఉపయోగిస్తారు.

4. **గుణకము :** విస్తరణ, వైషమ్యము, సహ సంబంధములలో గుణకాలను కనుగొనడం జరుగుతుంది. ఈ అధ్యాయాలలో ముందు సవిస్తరంగా వీటిగురించి చదువుతాము. సామాన్యంగా గుణకమంటే ఏమిటో తెలుసుకోవడానికి ఒక ఉదాహరణ తీసుకొందాము. జననాల రేటు వెయ్యికి 40 అనుకొంటే అప్పుడు గుణకము 0.04 అవుతుంది. $\left(\frac{40}{1000}\right)$ గుణకాన్ని మొత్తం జనాభాతో గుణిస్తే దేశంలోని మొత్తం జననాలు తెలుస్తాయి.

4.4.2 గణాంక వ్యుత్పన్నాల వల్ల ప్రయోజనాలు : గణాంకశాస్త్ర అధ్యయనంలో గణాంక వ్యుత్పన్నాలు వాడితే దత్తాంశం తారతమ్యం సులభంగా బోధపడుతుంది. గణాంక వ్యుత్పన్నాలు రెండు విధులను నిర్వర్తిస్తాయి. (ఏ) తారతమ్యత - గణాంక వ్యుత్పన్నాలను గణన చేయడంలో ముఖ్యోద్దేశమేమంటే రెండు అంశాలను తారతమ్యం చేయడమే. ఉదాహరణకు, ఆంధ్ర విశ్వవిద్యాలయంలో X, Y అనే కళాశాలలో బి.కాం. చదివే విద్యార్థుల సంఖ్య 500, 600 అనుకొందాము. అందులో ఉత్తీర్ణులైనవారు 400, 420 అనుకొందాము. ఎవరైనా ఉత్తీర్ణుల సంఖ్య, తారతమ్యం చేస్తే Y కాలేజీ ఫలితము బాగుందంటారు. ఎందుకంటే Y కాలేజీలో 400 మంది ఉత్తీర్ణులైతే X కాలేజీలో 420 మంది ఉత్తీర్ణులయ్యారు. కాని ఫలితాలను శాతాలతో సరిపోలిస్తే X కళాశాల శాతము $80\left(\frac{400}{500}\times100\right)$, Y కళాశాల శాతము. $70\left(\frac{420}{600}\times100\right)$ అందువల్ల శాతాలనే గణాంక వ్యుత్పన్నాల ద్వారా తారతమ్యము చేస్తే X కళాశాల Y కళాశాల కంటే మెరుగైనదని చెప్పవచ్చు. (b) తెలియని అంశము ప్రమాణము కనుక్కోవడం : ఉదాహరణకు, పి.యు.సి. పరీక్షకు, X కళాశాల నుంచి ఎంత మంది హాజరైనారో తెలుసుకొందాము. కాని ఉత్తీర్ణులైనవారి శాతం, ఉత్తీర్ణులైన విద్యార్థుల సంఖ్య మనకు తెలిసిందనుకొందాము. దీనిని బట్టి ఎంత మంది విద్యార్థులు హాజరైనారో తెలుసుకోవడం సులభము. ఇట్లా తెలుసుకోవడానికి గణాంక వ్యుత్పన్నాలు వాడతాము. ఉత్తీర్ణత శాతము 60, ఉత్తీర్ణులైనవారి సంఖ్య 480 అనుకొందాము. అప్పుడు పరీక్షకు హాజరైన విద్యార్థుల సంఖ్య 800 అని తెలుస్తుంది $\left(\frac{100}{60}\times480\right)$.

గణాంక దత్తాంశాన్ని సంక్షిప్తంగా వర్ణించడానికి, దత్తాంశంలో సంక్లిష్టతను తొలగించి సులభంగా అర్థమయ్యేటట్లు చెయ్యడానికి, సంక్లిష్టంగా వున్న దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి, తారతమ్యతను పోల్చుకోవడానికి, సరియైన నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి, నిష్పత్తులు, శాతాలు, రేట్లు, గుణకాలు, సగటులు, విస్తరణ మొదలగు గణాంక వ్యుత్పన్నాలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. వ్యాపార సంస్థలలో నిర్వాహకులు సరియైన నిర్ణయాలు తీసుకోడానికి సంస్థకు సంబంధించిన ఆర్థిక దత్తాంశాన్ని (Financial data), ఉత్పత్తి, అమ్మకాలు, సరుకుల నిల్వ మొదలైన భౌతిక దత్తాంశాన్ని (Physical data). విశ్లేషించడం అవసరము. ఇలా విశ్లేషించడానికి నిష్పత్తులు (ఉదా : Accounting ratios) శాతాలు (Seasonal relatives, Price relatives), గుణకాలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. అయితే ఇవి ఎంత ఉపయోగకారులో సరిగ్గా ఉపయోగించుకోలేని వారి చేతిలో అంత ప్రమాదకరమైనవి కూడా. అందులో ముఖ్యంగా శాతాలు చాలా ప్రమాదకరమైనవి.

4.5 సారాంశం

గణాంక విచారణలోని నాల్గవ దశలో పట్టీకరణ, శ్రేణీకరణ, సమర్పణలు ఇమిడి వున్నాయి. సేకరించిన సమాచారాన్ని

మూడో దశలో ఎడిటింగ్, సమానీకరణ, దోషరహితంగా చేసినా సమాచారం మాత్రం జటిలంగాను, బృహత్ పరిమాణంలో వుంటుంది. ఈ విధమైన దత్తాంశాన్ని సులభంగా గ్రహించేందుకు, విశ్లేషించేందుకు అనుగుణంగా రూపొందించేందుకు వర్గీకరించటం, ఆ తరువాత శ్రేణీకరించడం జరుగుతుంది. వర్గీకరించి, శ్రేణీకరించిన సమాచారాన్ని శాశ్విత రూపంలో అమర్చి పరిశీలన కోసం ప్రజలకు వెల్లడి చేయడాన్నే సమర్పణ అంటారు. సమర్పణ సాధారణంగా మూడు విధాలుగా వుంటుంది. అవి పాఠ్య రూపం, పట్టీల రూపం, చిత్ర పటాలు మరియు రేఖా చిత్రాల రూపం. సమర్పణ పద్ధతుల్లో ఒక పద్ధతి పట్టీల రూపంలో సమర్పించడం. వర్గీకరించి శ్రేణీకరించిన సమాచారాన్ని నిలువు, అడ్డగళ్ళలో అమర్చి శాశ్విత రూపాన్ని ఇవ్వడాన్నే పట్టీకరణ అంటారు. పట్టికలు సాధారణ, ప్రత్యేక భోగట్టానిచ్చే పట్టీలుగా వర్గీకరించవచ్చు. మరో విధంగా సామాన్య పట్టీలు, సంకీర్ణ పట్టీలని రెండు రకాలుగా వర్గీకరించవచ్చు. ఈ విధంగా పట్టికల రూపంలో సమర్పించిన దత్తాంశం సాధారణ మానవునికి సులభంగా బోధపడదు. పట్టీలోని అంకెలు చూపరులకు కుతూహలము కల్పించకపోగా, సులువుగా సందేశాన్ని కూడా అందించలేదు. అందుచేతనే దత్తాంశాన్ని మరో రెండు పద్ధతుల ద్వారా కూడా సమర్పించవచ్చు. అవి : చిత్ర పటాలు, రేఖా పటాలు. ఈ చిత్ర పటాలు, రేఖా పటాలను గూర్చి రాబోయే పాఠాల్లో చదువుకుందాము.

4.6 ముఖ్య పదాలు

1. **గణాంక వ్యుత్పన్నాలు** : రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ అంశాలను లేదా విలువలను మిశ్రమం చెయ్యడం ద్వారా వచ్చే పరిమాణం. ఉదా : శాతం, నిష్పత్తి.
2. **పట్టిక** : దత్తాంశాన్ని నిలువు, అడ్డగళ్ళలో అమర్చి శాశ్వత రూపాన్ని ఇవ్వడం.
3. **రిఫరెన్స్ పట్టీ** : దీన్నే సాధారణ పట్టీ అని అంటారు. విచారణకు సంబంధించి అన్ని విషయాలను చూపే పట్టీ.
4. **బహువిధ పట్టీ** : నాలుగు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ గణాలపై ఆధారపడి రూపొందించిన పట్టీలు.

4.7 నమూనా ప్రశ్నలు

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. పట్టీకరణను నిర్వచించి, దాని ప్రాముఖ్యమును తెల్పుము.
2. పట్టీకరణ ముఖ్యోద్దేశాలు తెల్పి, దశలను వివరించండి.
3. పట్టీలో వుండవలసిన ముఖ్య భాగాలెవ్వి ? ఈ భాగాలతో ఒక నమూనా పట్టీ వ్రాసి చూపండి.
4. పట్టీకరణ సూత్రాలను తెల్పుము.
5. వర్గీకరణకు, పట్టీకరణకు తేడాలను తెల్పి, దత్తాంశాన్ని పట్టీకరించునపుడు తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలెవ్వి ?
6. సాధారణ పట్టీలు, ప్రత్యేక భోగట్టాన్నిచ్చే పట్టీల గురించి సోదాహరణముగా వివరింపుము.
7. మంచి పట్టీకి ఉండవలసిన లక్షణాలను తెల్పుము.
8. వర్గీకరణ పట్టీ, ద్విమార్గ, త్రిమార్గ, బహుళ పట్టీల తారతమ్యాలను సోదాహరణంగా విశదీకరింపుము.
9. పట్టీకరణ ప్రయోజనాలను తెల్పుము.
10. తరగతి అంతరము 10గా తీసుకొని క్రింది దత్తాంశాన్ని పట్టీకరణ చేయండి.

30, 45, 55, 65, 60, 90, 115, 85, 95, 110, 95, 65, 75, 85, 125, 110, 87, 65, 100, 15, 65, 60, 75, 95, 130, 95, 125, 115, 65, 70, 95, 85, 65, 60, 80, 85, 75, 95, 55, 45, 35, 45, 40, 85, 135, 140, 95, 65, 45, 35, 115, 90, 80, 125, 130, 85, 90, 100, 95, 85, 85, 120, 115, 40, 35,125, 35, 105, 75, 45.

11. క్రింద యిచ్చిన మార్కులను పౌనఃపున్య పట్టికలో అమర్చండి. దిగువ తరగతి అంతరాన్ని (lowest) 10 - 20గా తీసుకోండి.

31, 81, 58, 81, 85, 75, 61, 70, 84, 81, 87, 67, 65, 62, 62, 61, 59, 58, 57, 75, 72, 84, 91, 87, 76, 43, 83, 40, 73, 88, 73, 43, 76, 95, 73, 65, 77, 72, 72, 29, 48, 85, 42, 80, 75, 85, 57, 64, 70, 95, 57, 74, 50, 78, 49, 55, 64, 92, 73, 73, 96, 69, 57, 27, 78, 80, 36, 70, 85, 47, 69, 63, 53, 91, 33, 69, 30.

12. క్రింద యిచ్చిన పరిశీలనతో ఆరోహణ క్రమంలో 100 - 110 తరగతి అంతరంలో మొదలిడి (Exclusive) మినహాయింపు పద్ధతిలో పౌనఃపున్య పట్టీ తయారు చేయండి. (నెల రాబడి రూపాయిలలో).

125, 108, 117, 126, 110, 132, 136, 130, 149, 155, 120, 130, 136, 138, 125, 111, 119, 125, 140, 148, 147, 137, 145, 150, 135, 137, 132, 165, 154

13. గణ చిహ్నాలలో కింద ఇచ్చిన క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ స్కోరులను తరగతి అంతరము 10గా తీసుకొని పౌనఃపున్య విభాజన పట్టీ వ్రాయండి.

75, 130, 135, 90, 118, 92, 80, 42, 96, 147, 98, 94, 115, 109, 154, 109, 111, 117, 120, 91, 124, 101, 97, 98, 126, 95, 109, 109, 94, 110, 82, 96, 1, 9, 92, 99, 1, 4, 104, 169, 107, 93, 109, 83, 117, 98, 77, 133, 87, 145, 91.

14. కింద ఇచ్చిన పరిశీలనలతో ఆరోహణ క్రమంలో 100 - 110 తరగతి అంతరము మొదలిడి (Exclusive పద్ధతిలో) పౌనఃపున్య విభాజన పట్టీ తయారుచేయండి. (నెల రాబడి రూపాయలలో).

125, 108, 112, 126, 110, 132, 136, 130, 149, 155, 20, 130, 136, 138, 125, 111, 119, 125, 140, 148, 147, 137, 145, 150, 147, 135, 137, 132, 165, 154.

15. క్రింది విద్యార్థులకు గణాంకశాస్త్ర పరీక్షలో 100కు వచ్చిన మార్కులను 10 తరగతి అంతరంగా నిర్ణయించి వర్గీకృతము చేయండి.

57, 44, 8, 75, 0, 18, 45, 14, 0, 4, 64, 66, 72, 51, 69, 34, 56, 22, 34, 8, 58, 83, 20, 70, 57, 28, 22, 38, 5, 45, 51, 88, 93, 64, 36, 34, 37, 58, 32, 64, 30, 80, 73, 24, 46, 48, 0, 16, 85, 96, 56, 20, 64, 50, 63, 47, 4, 32, 10, 78, 48, 55, 52, 68, 8, 53, 50, 0, 35, 28, 54, 38, 33, 20, 54, 52, 48, 84, 50, 94, 90, 38, 84, 30, 58, 20, 0, 99, 42, 79, 33, 38, 60, 61, 36, 10, 34, 2, 80

16. అవరోహణ క్రమంలో (అసమగ్రరూపం లేదా Inclusive పద్ధతిలో) కింది దత్తాంశాన్ని 3 తరగతి అంతరంగా నిర్ణయించుకొని పౌనఃపున్య పట్టీ తయారుచేయండి.

15, 17, 23, 19, 15, 14, 13, 16, 17, 15, 12, 18, 21, 15, 20, 12, 19, 17, 16, 14, 15, 13, 22, 20, 22, 27, 21, 19, 19, 16, 18, 11, 18, 10.

17. ఒక తరగతిలో విద్యార్థుల బరువులు ఈ విధంగా వున్నాయి. ఈ దత్తాంశాన్ని 59 - 69 తక్కువ (Lowest) తరగతి అంతరంగా తీసుకొని పౌనఃపున్య విభాజనము చేయండి (పౌన్లలో).

 76, 73, 93, 107, 102, 76, 78, 69, 96, 72, 80, 88, 96, 109, 03, 84, 84, 60, 91, 75, 91, 92, 102, 91, 101, 90, 77, 105, 90, 86, 113, 101, 114, 72, 77, 118, 95, 63, 99, 82, 100, 06, 87, 89, 92, 107, 111, 76, 83, 86, 106, 107, 62, 94, 73, 108, 115, 85, 98, 93, 109, 97, 75, 98, 67, 83, 104, 88, 92, 88.

18. క్రింది వివరాలతో ఒక పట్టీ తయారుచేయండి.

 (ఎ) స్త్రీ / పురుషుడు (బి) మూడుస్థాయిలు - సూపర్‌వైజర్లు, అసిస్టెంటులు, గుమస్తాలు (సి) సంవత్సరాలు 19, 8, 1943; (డి) వయస్సు - 18 సంవత్సరాలు అంతకు తక్కువగా, 18 సంవత్సరాలపైన 55 సంవత్సరాలకులోపు, 55 సంవత్సరాలకు పైగా.

19. క్రింది దత్తాంశంతో ఖాళీ పట్టీ తయారుచేయండి, ఒక విశ్వవిద్యాలయంలోని విద్యార్థులను గురించిన అంశాలు (ఎ) స్త్రీ / పురుషుడు; (బి) ఎం.ఎ, ఎమ్మెస్సీ, ఎంకాం., లా (సి) సంవత్సరాలు 1951, 1956, 1961, 1969; (డి) వయస్సులు 15 సంవత్సరాలలోపు, 15 - 19, 19 - 21, 21 పైన

20. బొంబాయి, కలకత్తా, మద్రాసు, విశాఖపట్టణం రేవులలో ఎగుమతులు, దిగుమతులు 1960, 1961, 1962, 1963, 1964 సంవత్సరాలలో చూపే ఖాళీ పట్టీ తయారుచేయండి. పట్టీలో ఎగుమతి, దిగుమతి విలువలు రూపాయలలో, ప్రతి సంవత్సరము వర్తకపు నిల్వను చూపండి.

21. గణాంక వ్యుత్పన్నాన్ని నిర్వచించి, గణాంక విశ్లేషణలో దాని ఉపయోగము పేర్కొనండి.

II. సంక్షిప్త ప్రశ్నలు :

22. వర్గీకరణ ఉద్దేశాలు
23. తరగతి అంతరాల ద్వారా వర్గీకరణ
24. విచ్ఛిన్న శ్రేణులు
25. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు
26. గణాంక వ్యుత్పన్నాలు
27. సంకీర్ణ పట్టీలు
28. పట్టీలవల్ల ప్రయోజనాలు

4.8 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. B.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
2. S.P. Gupta	:	Statistical Methods
3. C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
4. S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics
5. M.C. Shukla & S.S. Gulshan	:	Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 5

చిత్ర పటాల ద్వారా దత్తాంశ సమర్పణ

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

5.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు క్రింది విషయాలను తెలుసుకోగలరు మరియు వివిధ చిత్రాలను రూపొందించగలరు.

* సమర్పణలో చిత్రపటాల ఆవశ్యకత
* చిత్రపటాల వల్ల ప్రయోజనాలు
* వివిధ రకాలైన చిత్రపటాలను నిర్మించి విధానాన్ని తెలుసుకోవటం
* ఏకపరిమాణ, ద్విపరిమాణ, త్రిపరిమాణాలను, వలయ చిత్రాలు, పిక్టోగ్రాములు, కార్టో గ్రాములను రూపొందించే విధానం తెలుసుకోవడం.

5.1 విషయపరిచయం

గణాంక విచారణ ఐదు దశల్లో జరుగుతుంది. యోజన, దత్తాంశ సేకరణ, ఎడిటింగ్ - యదార్థత - సమానీకరణ,

సమర్పణ, విశ్లేషణ మరియు విపులీకరణ. గణాంక విచారణలో నాల్గవ దశ సమర్పణ. దత్తాంశ సమర్పణ వివిధ రూపాల్లో జరుగుతుంది. పట్టికల ద్వారా సమర్పణ చేసే విధానాన్ని నాల్గవ పాఠంలో తెలుసుకున్నాం. ఈ పాఠంలో మనం చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పణను గూర్చి తెలుసుకుందాం. పట్టికలలో సమర్పణ చేసినట్లయితే దత్తాంశం సాధారణ మానవునికి (Layman) బోధపడదు. పట్టికల్లో వున్న సమాచారం చూపరులను తబ్బుబ్బి కలుగచేయటమేకాక చూడాలనే కుతూహలాన్ని కలిగించదు. గణాంక ఫలితాలను ఆకర్షణీయంగా నమ్మకంగా సమర్పణ చేయటానికి రేఖా చిత్ర పటాలు చాలా ఉపయోగపడతాయి. ఇవి కంటికి ఇంపుగా వుంటాయి. చిత్ర పటాలను గూర్చి మనం ఈ పాఠంలో తెలుసుకుంటాం. తరువాత పాఠంలో రేఖాపటాలను గురించి వివరించడం జరిగింది.

5.2 చిత్రపటాలు

ఏదేని సమస్యను అవగాహన చేసుకునేందుకు దత్తాంశాన్ని సేకరించినపుడు, దానిని సంక్షిప్తపరిచి, క్రమపద్ధతిలో సమర్పణ చేయడానికి వర్గీకరణ, పట్టికీకరణ వంటి ప్రక్రియలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. అయితే ఈ రెండు ప్రక్రియలు సాధారణ వ్యక్తి సులువుగా అవగాహన చేసుకునేందుకు అంతగా ఉపయోగపడవు. అంకెలనేవి విసుగుపుట్టించేవిగా వుండి సాధారణ మానవునికి గాబరా పరుస్తాయి. గణాంక సూత్రాలతో పరిచయంలేని వ్యక్తులు ఈ గణాంకాలను అవగాహన చేసుకొని ఒక అభిప్రాయానికి రాలేరు. అలాంటి పరిస్థితులలో చిత్ర పటాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి.

పట్టీల రూపంలో వుండే అంకెలను పరిశీలించడం అనేది కంటికి, మనస్సుకు అలసట మరియు చికాకును కల్పిస్తాయి. వాటిని గుర్తించుకోవడం, సరిపోల్చడం అనేది చాలా కష్టమైన విషయం. ఎన్ని మాటలు చెప్పినా, ఎంత వివరణ ఇచ్చినా, ఎంత సమయాన్ని వెచ్చించినా అర్థంకాని గణాంక విషయాలను చిత్రపటాల ద్వారా సులువుగా అవగాహన కల్పించవచ్చు. చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పిస్తే చూసిన వారికి నయనానందకరంగా వుండడమేగాక, మనస్సుపై చెరగని ముద్రవేసి చాలా కాలం వరకు గుర్తుంటాయి. ఉదాహరణకు ప్రపంచంలోని వివిధ దేశాల జనాభా ఎంత వున్నదో చెబితే సాధారణ మానవునికి అర్థం కాకపోవచ్చు. కాని బార్ చిత్రాల రూపంలో చెబితే "బార్" పటాల ఎత్తును బట్టి ఏ దేశంలో జనాభా ఎక్కువ వున్నదో సులభంగా తెలుసుకోవచ్చు.

అంకెల ప్రభావాన్ని గూర్చి ఎ.యల్. బౌలీ వివరిస్తూ అంకెల జాబితా పొడుగుపెరిగే కొద్దీ అది స్పష్టత కోల్పోతుంది. పది అంకెలు గల శ్రేణిని బహుశా అతి సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. కాని వరుసగా వంద సంవత్సరాలకు సంబంధించిన అంకెల జాబితాను చూస్తే మనకు ఏమీ బోధపడదు. అడవిలోని వృక్షాలన్నింటిని చూసినంత మాత్రాన వాటిలో వున్న కలప లక్షణాలను గురించి మనకు ఏమి తెలుస్తుంది" అని అంటాడు. దీనిని బట్టి తెలిసేదేమిటంటే అంకెల సంఖ్య పెరిగేకొలది దానిని అవగాహన చేసుకొను శక్తి తగ్గుతుంది. అందుచేతనే ఆధునిక యుగంలో పారిశ్రామిక, వాణిజ్య, పాలనారంగాలలో చిత్రపటాలను, రేఖా చిత్రాలను విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

5.2.1 చిత్రపటాల ప్రాముఖ్యత : సేకరించిన దత్తాంశాన్ని సమర్పించడానికి తెల్లకాగితం పై పటాలను లేదా చిత్రాల రూపంలో నిర్మించడాన్ని చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పణ అంటారు. గణాంక ఫలితాలను ఆకర్షణీయంగా, నమ్మదగినవిగా సమర్పణ చేయడానికి చిత్రపటాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. చిత్ర పటాలను నిర్దిష్టమైన సూత్రాల ప్రకారం నిర్మించినట్లయితే అవి దత్తాంశ ఫలితాలను స్పష్టంగా హృదయానికి హత్తుకొనేలా చూపిస్తాయి. దత్తాంశ మూల విషయాన్ని చదవరులు సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి వీలుంటుంది. చిత్రపటాల ప్రాముఖ్యతను క్రింది విధంగా చెప్పవచ్చు.

1. **ఆకర్షణీయంగా వుంటాయి :** అంకెలలో వున్న విషయాలను చదువరులు కొన్ని సందర్భాలలో చూడకుండా వదిలి వేస్తారు. కాని చిత్రపటాలు ఆకర్షణీయంగా, నయనానందకరంగా వుండడం వలన వాటిని అదే చదువరులు తప్పక చూస్తారు.

2. **జ్ఞాపకశక్తిని పెంపొందిస్తాయి :** అంకెలతో కూడుకొని వున్న విషయాలను గుర్తుంచుకోవడం ఎంతో కష్టం. కాని చిత్రపటాల ద్వారా దత్తాంశాన్ని సమర్పిస్తే అవి చూడగానే మనస్సుపై చెరగని ముద్రవేసి, చాలా కాలం గుర్తుంటాయి.

3. **సరిపోల్చడం తేలిక :** దత్తాంశ తారతమ్య వివేచనకు చిత్రపటాలు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి. వివిధ సంవత్సరాలకు సంబంధించిన జనాభా లేదా వివిధ ప్రదేశాలలో పండే పంటల వివరాలు, వర్షపాతం వంటి విషయాలను సరిపోల్చడం ద్వారా దత్తాంశ ప్రాధాన్యతను సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు. ఈ ఉద్దేశ్యంతోనే చిత్రపటాల ద్వారా వ్యాపార, పారిశ్రామిక, పరిపాలనా రంగాలలో దత్తాంశాన్ని సమర్పిస్తున్నారు.

4. **సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు :** పెద్ద అంకెలతో కూడిన, క్లిష్టమైన దత్తాంశాన్ని అర్థం చేసుకోవడం కష్టమైన పని. అటువంటి దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవాలంటే వీటిని చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పణ చేయడం మంచిది. అవి కంటికి ఇంపుగా వుండడమేగాక దత్తాంశ మూల విషయం సులభంగా అవగాహన అవుతుంది. అందుకే "పదివేల పదాల కంటే ఒక చిత్రం ఎంతో విలువైనది" అంటారు.

5. **విపులీకరణకు పట్టేకాలాన్ని, శ్రమను తగ్గిస్తాయి :** వర్గీకరణ, పట్టికీకరణ వంటి గణాంక పద్ధతుల ద్వారా సమర్పించే సంఖ్యా వివరాలను అధ్యయనం చేయడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. మెదడుకు ఎక్కువ శ్రమ పెట్టవలసి వుంటుంది. గాని చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పించే దత్తాంశాన్ని అర్థం చేసుకోవడానికి ఎక్కువ సమయం, శ్రమ అవసరం లేదు.

6. **అందరికి అందుబాటు :** గణాంకశాస్త్ర పరిజ్ఞానం వున్న వారు మాత్రమే పట్టీలలోని అంకెలను అవగాహన చేసుకోగలరు. కాని నిర్దిష్ట సూత్రాల ప్రకారం సరిగా రూపొందించిన చిత్రపటాలను నిరక్షరాస్యులు కూడా సులభంగా అవగాహన చేసుకోగలరు. చిత్రపటాల ద్వారా దత్తాంశ పోకడలను అందరూ గ్రహించగల సౌలభ్యత వుండటమే వాటి ప్రాధాన్యతను చెప్పవచ్చు.

7. **ఎక్కువ విషయాలను తెల్పుతాయి :** చిత్రపటాల ద్వారా ఎక్కువ సమాచారాన్ని కూడా సమర్పించవచ్చు. ఉదాహరణకు వివిధ దేశాల జనాభా, స్త్రీ, పురుష నిష్పత్తి, వయస్సులను బట్టి వారి వర్గీకరణ వంటి వివరాలను తెలియజేయవచ్చు. తద్వారా మనము దత్తాంశ ప్రవృత్తిని సులభంగా అర్థం చేసుకోవచ్చు.

5.2.2 పరిమితులు : క్లిష్టమైన దత్తాంశాన్ని సమర్పించడానికి చిత్రపటాలు ఎంతగానో ఉపయోగపడతాయి. అయితే ఇన్ని సుగుణాలు ఉన్నప్పటికీ కొన్ని పరిమితులు కూడా వీటికి లేకపోలేదు.

1. చిత్రపటాలు సమస్యకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సులభంగా సమర్పించినప్పటికిని, విషయ విశదీకరణలో వర్గీకరణ, పట్టికీకరణ వంటి గణాంక ప్రక్రియలకు ప్రత్యామ్నాయం కాజాలవు.

2. చిత్రపటాలు దత్తాంశం యొక్క ఉజ్జాయింపు విలువనే తెల్పుతాయి. నిశిత విశ్లేషణకు పనికిరావు.

3. అతి పెద్దపరిమాణంలోను, అతి స్వల్ప తేడాలతో కూడిన గణాంక వివరాలను సమర్పించడానికి చిత్రపటాలు అనుకూలంగా వుండవు. అంటే అతి పెద్ద, అతి చిన్న తేడాలను చిత్రపటాలు చూపలేవు.

4. చదువరులకు పరిమిత సమాచారాన్ని మాత్రమే తెలియజేస్తాయి.

5. దత్తాంశాన్ని క్లుప్తీకరించి సమర్పించడానికి మాత్రమే చిత్రపటాలు ఉపయోగపడతాయి. దత్తాంశాన్ని సరిపోల్చనవసరంలేని సందర్భాలలో వీటి ఉపయోగం అంతగా వుండదు.

6. కొన్ని చిత్రపటాలు నిపుణులకు మాత్రమే ఉపయోగపడతాయి. సామాన్యులు వాటిని అర్థం చేసుకోలేరు. ఉదా : త్రిపరిమాణ చిత్రాలు.

5.2.3 చిత్రపటాల నిర్మాణం - సూత్రాలు : చిత్రపటాల నిర్మాణంలో ఈ క్రింది సూత్రాలను పాటించవలె.

1. **శీర్షిక :** దత్తాంశసారాన్ని తెలియజేసే విధంగా ప్రతి చిత్రానికి సరియైన శీర్షిక నివ్వవలె. శీర్షిక స్పష్టంగా వుండాలి. శీర్షికను చిత్రపటం ఎగువనగాని, దిగువనగాని వ్రాయాలి.

2. **పొడవు, వెడల్పుల అనుపాతం :** చిత్రపటం ఆకర్షణీయంగా వుండాలంటే పొడవు, వెడల్పులు సరియైన అనుపాతంలో వుండాలి. చిత్రం యొక్క పొడవు వెడల్పులకు నిర్దిష్టమైన సూత్రాలంటూ లేనప్పటికిని 'లాజ్' అనే గణాంక శాస్త్రవేత్త అభిప్రాయంలో వెడల్పు 1కి పొడవువైపు 1.414 నిష్పత్తి వుండేటట్లు చూడాలి.

3. **స్కేలు నిర్ణయం :** చిత్రపట నిర్మాణానికి స్కేలు నిర్ణయం జాగ్రత్తగా చేయవలె. విలువలను చూపే స్కేలు 2, 5, 10 గుణిజాలలో వాడితే మంచిది. 1, 3, 7, 9 వంటి సంఖ్యలను ఉపయోగించరాదు. 1 యూనిట్ ఎంత పరిమాణానికి సమానమనేది స్పష్టంగా తెలియజేయాలి. ఉదా : 1 సెం.మీ. 10 మంది విద్యార్థులకు సమానమని గాని, 1 సెం.మీ. 10 మె. టన్నులకు సమానమని స్పష్టీకరించవలె.

4. **పాదసూచిక :** చిత్ర పటంలోని ముఖ్య విషయాలను తెలియజేయడానికి చిత్రం క్రింది భాగంలో పాదసూచికను ఇవ్వాలి. దీనివలన ఎటువంటి అస్పష్టత లేకుండా చిత్రపటంలోని దత్తాంశాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకోవడానికి వీలుంటుంది.

5. **సూచిక :** చిత్రపటంలో వాడిన రంగులు, గీతలు వంటి వాటిని గూర్చి చిత్రం క్రింది భాగంలోని కొద్ది ప్రదేశంలో సూచీని తెలియజేయవలె.

6. **శుభ్రత :** చిత్రపటాలను గీసేటప్పుడు సాధ్యమైనంత శుభ్రతను పాటించవలె. అప్పుడు మాత్రమే అవి చదువరుల దృష్టిని ఆకర్షించగలవు. అంతేగాక చిత్రపటంలోని వివిధ విషయాలను పూర్తిగా అర్థం చేసుకోగల వీలుంటుంది.

7. **సామాన్యత :** చిత్రాలు సాధ్యమైనంతవరకు అందరికి బోధపడే విధంగా సులభంగా వుండాలి. ఒకే చిత్రంలో ఎక్కువ సమాచారాన్ని చొప్పించడం కంటే అనేక సాధారణ చిత్రాలను వాడటం మంచిది.

8. **పొదుపు :** చిత్రపటాల నిర్మాణానికి ఉపయోగించే కాలం శ్రమ, ధనవ్యయం తక్కువగా వుండాలి. చిత్రపటం ఉపయోగానికి, ఆ చిత్రనిర్మాణానికి వెచ్చించే వ్యయం తగు అనుపాతంలో వుండాలి.

9. **కళాత్మక దృక్పథం :** చిత్రపటాలు శాస్త్రీయంగా, కళాత్మకంగా, ఆకర్షణభరితంగా వుండాలి. శాస్త్రీయంగా వుండి కళాత్మకంగా లేకపోతే చూపరులను ఆకర్షించలేవు. అట్లాగే ఆకర్షణీయంగా వుండి శాస్త్రీయంగా లేకపోతే అవి చదువరుల విశ్వాసాన్ని కోల్పోతాయి.

5.3 చిత్రపటాల్లోని రకాలు

చిత్రపటాలను దిగువ పేర్కొన్న విధంగా వర్గీకరించవచ్చును.

1. ఏకపరిమాణ చిత్రాలు (One-Dimensional Diagrams)
2. ద్విపరిమాణ చిత్రాలు (Two-Dimensional Diagrams)

3. త్రిపరిమాణ చిత్రాలు (Three-Dimensional Diagrams)

4. పిక్టోగ్రామ్స్ (Pictograms)

5. కార్టోగ్రామ్స్ (Cartograms)

5.3.1 ఏకపరిమాణ చిత్రాలు (బారు పటాలు) : ఏకపరిమాణ చిత్రాలను బారు పటాలని కూడా అంటారు. బార్ లేదా కమ్మీ అంటే ఒక దట్టమైన గీత. బార్ పొడవుల ద్వారా దత్తాంశాలను పోల్చడం జరుగుతుంది. బార్ పటాలలో బార్ పొడవు అంశాల పరిమాణాన్ని చూపుతుంది. కాని బార్ వెడల్పులను మాత్రం చిత్రాలు ఆకర్షణీయంగా వుండడానికి మాత్రమే చూపుతారు. బార్‌ల వెడల్పులకు కొలత పరిమాణంతో ఎటువంటి సంబంధం వుండదు. ఈ రకమైన చిత్ర పటాలకు ఎటువంటి కష్టం లేకుండా గీయవచ్చు. సామాన్యులకు సైతం సులభంగా అర్థమవుతాయి. బార్‌లను గీయడంలో ఈ క్రింది జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి.

1. బార్ పటాల పొడవు, వెడల్పులు సమానంగా వుండాలి.
2. ఒక బార్‌కు, మరో బారుకు మధ్య ఖచ్చితమైన ఖాళీ వదల వలెను.
3. బార్‌లను నిలువుగా గాని, అడ్డంగా గాని నిర్మించవచ్చు. అయితే అంశాలను సరిపోల్చడానికి, నిలువుగా బార్‌లను నిర్మించడం అనుకూలంగా వుంటుంది.
4. దత్తాంశంలోని ప్రతి అంశానికి ఒక బారు నిర్మించి, బారు పై భాగమున దాని విలువను చూపవలెను. దీని వలన వివిధ అంశాలను సరిపోల్చడం సులభం అవుతుంది.
5. బార్‌లను ఆరోహణ క్రమంలోగాని, అవరోహణ క్రమంలోగాని నిర్మించవచ్చు. కాలశ్రేణులయినట్లయితే లెక్కలో ఎలా వుంటే అట్లాగే చూపవలెను.

బారు పటాల రకాలు : బారు పటాలు వివిధ రకాలుగా వుంటాయి. దత్తాంశ స్వభావము, వున్న అంశాలు మొదలైన వాటి ప్రాతిపదికగా ఏ బారు పటము ఏ విధమైన దత్తాంశానికి అనుగుణమో ఆ విధమైన పటాలను నిర్మించవలసి వుంటుంది.

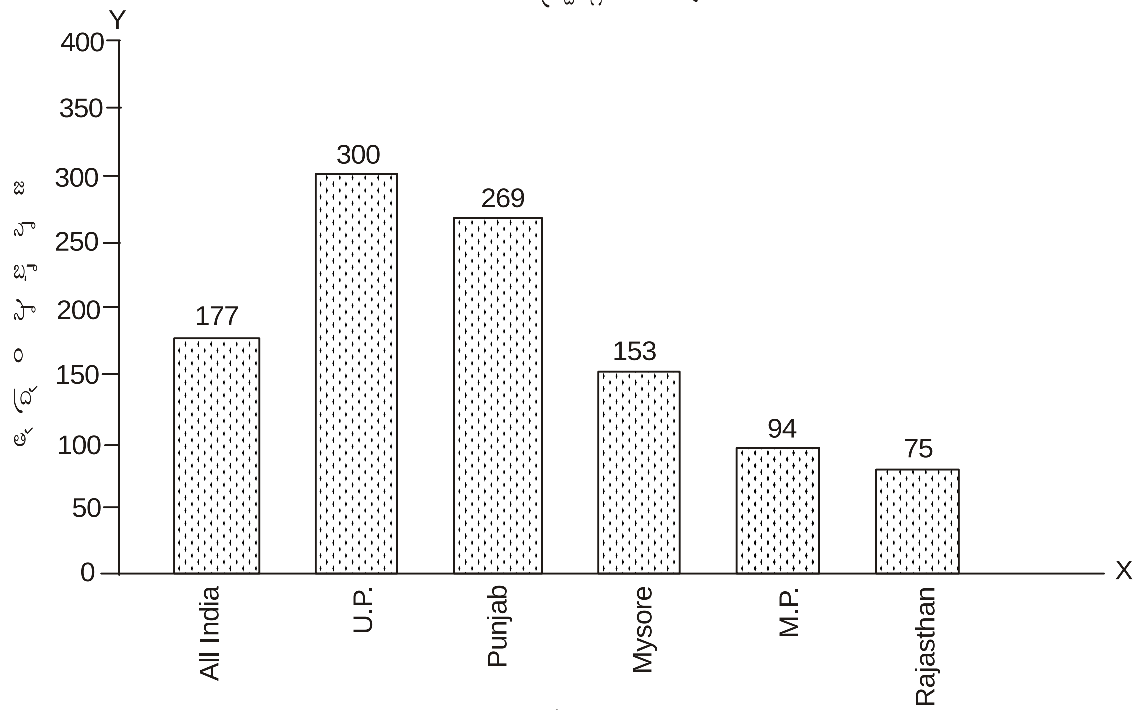
1. సాధారణ బారు పటాలు (Simple Bar Diagrams)
2. బహుళ బారు పటాలు (Multiple Bar Diagrams)
3. ఉపవిభాజిత బారు పటాలు(Sub-Divided Bar Diagrams)
4. విచలన బారు పటాలు(Deviation Bar Diagrams)
5. శాతపు బారు పటాలు (Percentage Bar Diagrams)

1. **సాధారణ బారు పటాలు** (Simple Bar Diagrams) **:** ఒకే చలరాశి విలువను అధ్యయనం చేసి తారతమ్యతను పోల్చి చూపడానికి సాధారణ బారు పటాలు ఉపయోగపడతాయి. ఇచ్చిన చలరాశి విలువపై ఆధారపడి బార్‌ల ఎత్తు మారుతుంది. కాలశ్రేణి దత్తాంశాన్ని ఇచ్చినట్లయితే దత్తాంశానికి సంబంధించిన విలువలను వాటి కాలక్రమరీతిలో బార్‌ల నిర్మాణం జరగవలె. బార్‌ల వెడల్పులు మాత్రం సమానంగా వుంటాయి. ఈ విధమైన బార్‌లను నిర్మించడం ఎంతో తేలిక. అర్థం చేసుకోవడం కూడా చాలా సులభం. అయితే దీని ఉపయోగం ఒకే అంశానికి సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని సమర్పించడానికి మాత్రమే పరిమితమవుతుంది.

వివిధ రాష్ట్రాల జన సాంద్రత వివరాలు (1971) ఈ బారు పటంలో చూపబడినది.

పటం నెం. 1

వివిధ రాష్ట్రాల్లో జనసాంద్రత



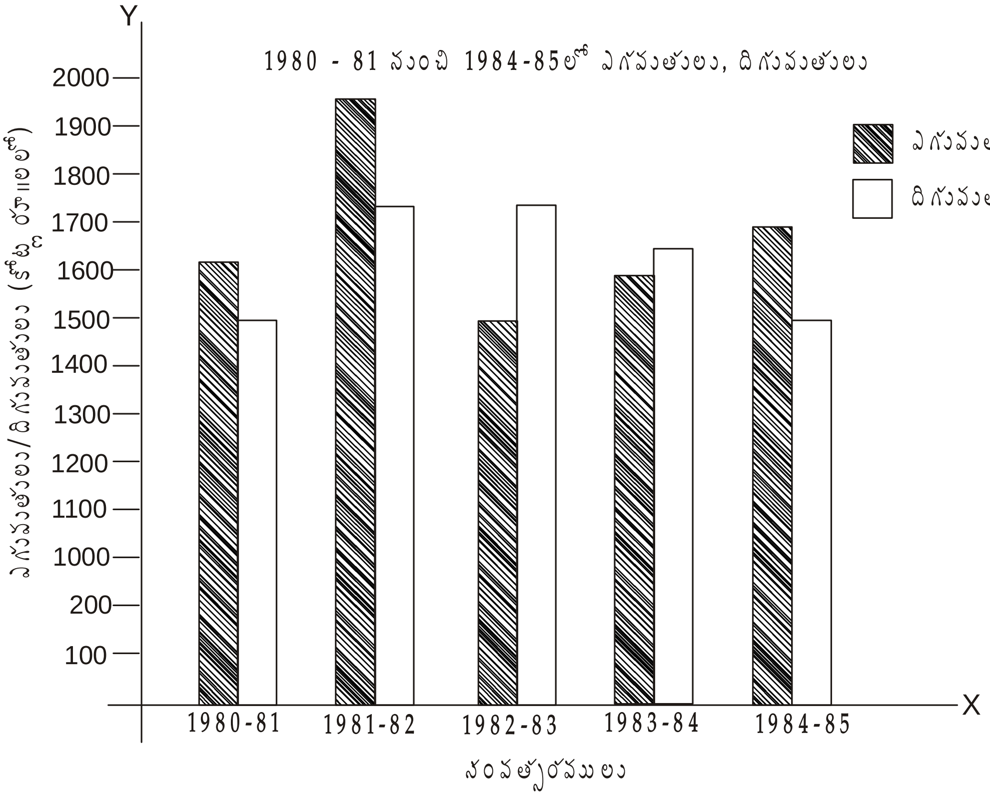
వివిధ రాష్ట్రాలు

2. **బహుళ బారు పటాలు :** అంతర సంబంధం వున్న రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ అంశాల దత్తాంశపు తేడాను చూపడానికి బహుళబారు పటాలను వాడతారు. బహుళ బారుపటాలను సాధారణ బారు పటాలవలె నిర్మిస్తారు. నిర్దిష్టమైన ఖాళీని వదలి వివిధ సంవత్సరాలకు సంబంధించిన బార్లను నిర్మించవలె. ఇట్లా నిర్మించడం వలన ఒకటి కంటే ఎక్కువ అంశాలు కాలానుగుణంగా ఎలాంటి మార్పుకు లోనయినవనే స్పష్టంగా బోధపడును. ఉదా : అనేక సంవత్సరాల ఎగుమతి, దిగుమతి విలువలు, జనన, మరణాలు, స్త్రీలు, పురుషుల వివరాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని చూపడానికి బహుళ బారుపటాలు అనుకూలంగా వుంటాయి.

ఉదాహరణ : కింది సమాచారాన్ని బహుళ బార్ పటంలో చూపండి.

సం॥	ఎగుమతులు (కోట్ల రూపాయల్లో)	దిగుమతులు (కోట్లరూపాయల్లో)
1980 - 81	1610	1500
1981 - 82	1955	1750
1983 - 84	1600	1650
1984 - 85	1700	1600

పటము నం. 2



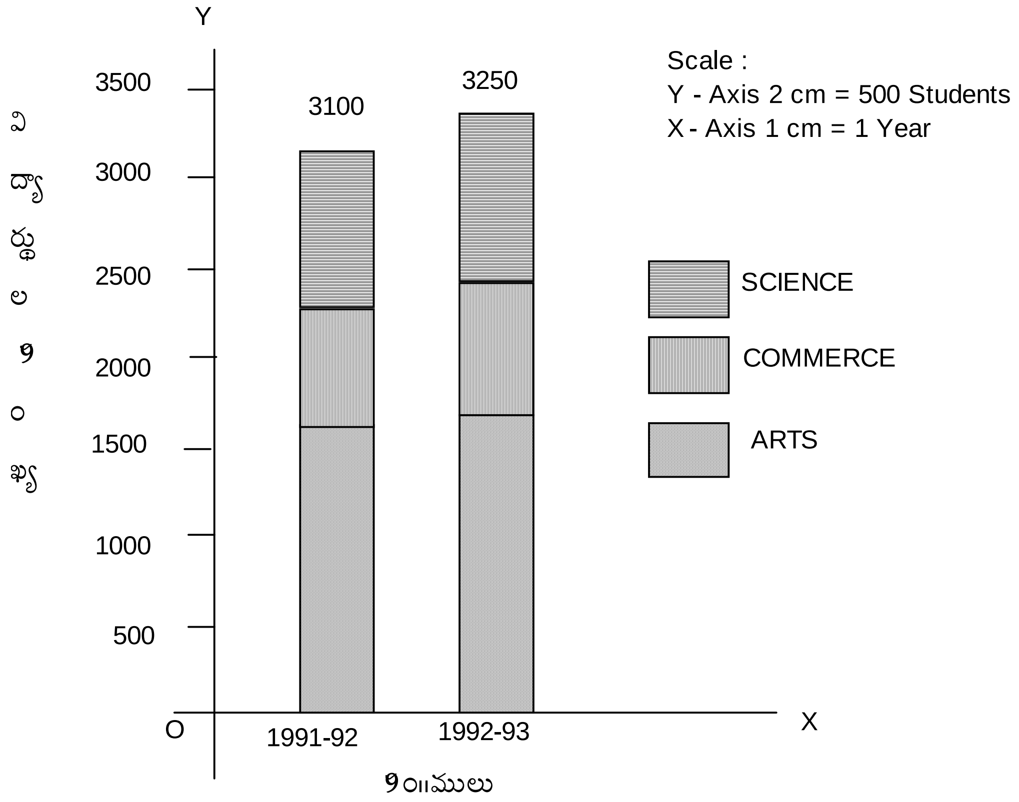
3. **ఉప విభాజిత బారు పటాలు :** ఒకే దత్తాంశమందలి వివిధ భాగాలను చూపడానికి, వివిధ భాగాల మొత్తం చూపడానికి ఉపవిభాజితబారు పటాలు ఉపయోగిస్తారు. ఇచ్చిన దత్తాంశం మొత్తానికి సంబంధించిన విలువను బార్ ఎత్తుతో సూచించి ఆ విలువ ఏర్పడుటకు దోహదం చేసిన వివిధ అంశాల ప్రాతిపదికగా బార్ పటాన్ని విభజిస్తారు. ఒక్కొక్క విభాగానికి ఒక్కొక్క రంగు గాని, గుర్తులను గాని ఉపయోగించవలె. అయితే బార్‌ను విభజించడంలో ఒక క్రమపద్ధతిని పాటించవలె. ఉపవిభాజిత బారు పటంలో 10 లేదా 12 అంశాల వరకు చూపించవచ్చు. అంతకుమించితే రూపొందించడం, అవగాహన చేసుకోవడం కష్టమవుతుంది.

ఉదా॥ : కింది కళాశాల విద్యార్థుల సంఖ్యను ఉపవిభాజిత బార్ పటంలో చూపండి.

సం॥ము	సైన్సు	కామర్స్	ఆర్ట్స్
1991	800	750	1950
1992	850	825	1575

పటమునం. 3

1991-92, 1992-93 సం॥లలో కళాశాలలోని విద్యార్థులు



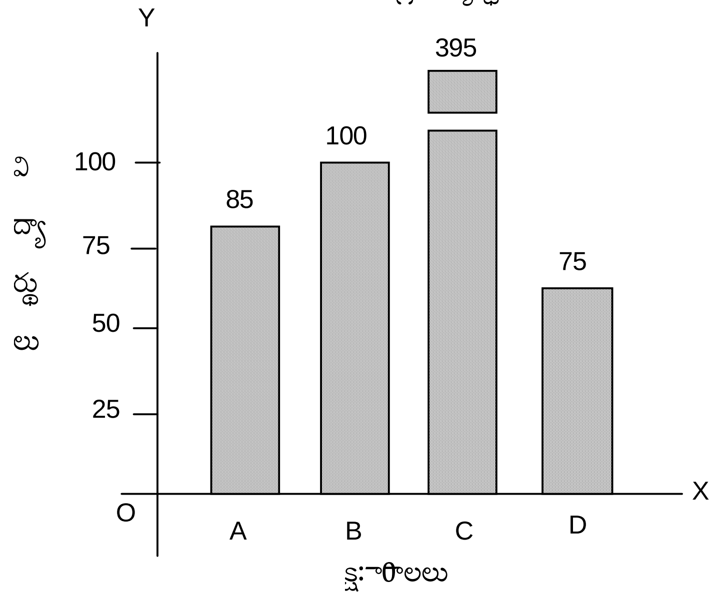
4. విచ్ఛిన్న బారు పటాలు (Broken Bars) : ఇవ్వబడిన శ్రేణిలోని విలువలు కొన్ని అతి ఎక్కువగాను, మరికొన్ని విలువలు అతి తక్కువగాను వున్నప్పుడు వాటిని బారు పటాలు గీస్తే కొన్ని బార్‌ల ఎత్తు చాలా ఎక్కువగాను, మరికొన్నింటి ఎత్తు చాలా తక్కువగాను వుంటుంది. ఇటువంటి బార్‌లను ఒకే చిత్రపటంలో చూపితే కంటికి ఇంపుగా వుండదు. అందుచేత దత్తాంశంలోని విలువలను పోల్చి చూడవలెనన్నప్పుడు విచ్ఛన్న బారు పటాల రూపంలో చూపవలసి వుంటుంది. ఇచ్చిన విలువల ప్రకారం బారు పటాన్ని నిర్మించి, చాలా ఎక్కువ ఎత్తుగా వుండవచ్చునని భావించిన బార్‌లని విచ్ఛిన్నం చేసి, అట్లా విచ్ఛిన్నం చేసిన బార్ పైన చిన్న బార్‌నమర్చుతారు. అన్ని బార్‌లపైన అవి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తున్న విలువలను గుర్తిస్తారు. ఈ విధంగా బార్‌లను విచ్ఛన్నం చేయడం వల్లనే వీటిని విచ్ఛన్న బార్‌లు అంటారు.

దిగువ ఒక పట్టణంలోని **4** కారేజిల్లోని విద్యార్థులను తగిన చిత్ర పటం ద్వారా వేసి చూపబడినది.

కళాశాల :	A	B	C	D
విద్యార్థుల సంఖ్య :	85	100	395	75

పటం నం. 4

A, B, C, D కళాశాలల్లో విద్యార్థులు



(5) శాతపు బారు పటాలు (Percentage Bar Diagrams**) :** బారు పొడవును 100 యూనిట్లుగా విభజించిన బారు పటాలను శాతపు బారు పటాలంటారు. దత్తాంశంలోని సాపేక్ష మార్పులను సులభంగా గమనించడానికి ఈ విధమైన బారు చిత్రాలు ఉపయోగపడతాయి. గణితపరమైన లెక్కలు వేయవలసిన సందర్భాలలో ఈ విధమైన చిత్రాలు నిర్మిస్తారు. ఇవ్వబడిన దత్తాంశంలోని ప్రతి విలువ మొత్తం బారు విలువలో ఎంత శాతంగా వున్నదో కనుగొనవలెను. వంద యూనిట్లుగా నిర్మించబడిన బార్‌ను ఆ శ్రేణిలోని ఆయా అంశాల అనుపాతంలో విభజించవలెను.

ఉదాహరణ : దిగువ రెండు కుటుంబాల ఆదాయము మరియు ఖర్చు అంచనాలను దీర్ఘచతురస్రాల రూపములో వివరించి చూపడమైనది.

	కుటుంబము A	కుటుంబము B
మొత్తం ఆదాయం	4000	6000
ఖర్చు : ఆహారంపై	2200	3000
వస్త్రములపై	720	720
వెలుతురు + ఇంధనాలపై	200	300
అద్దె కొరకు	480	600
విద్యారోగ్యాలకై	320	600
ఇతర అంశాలకై	280	480
మొత్తం :	**4200**	**5700**

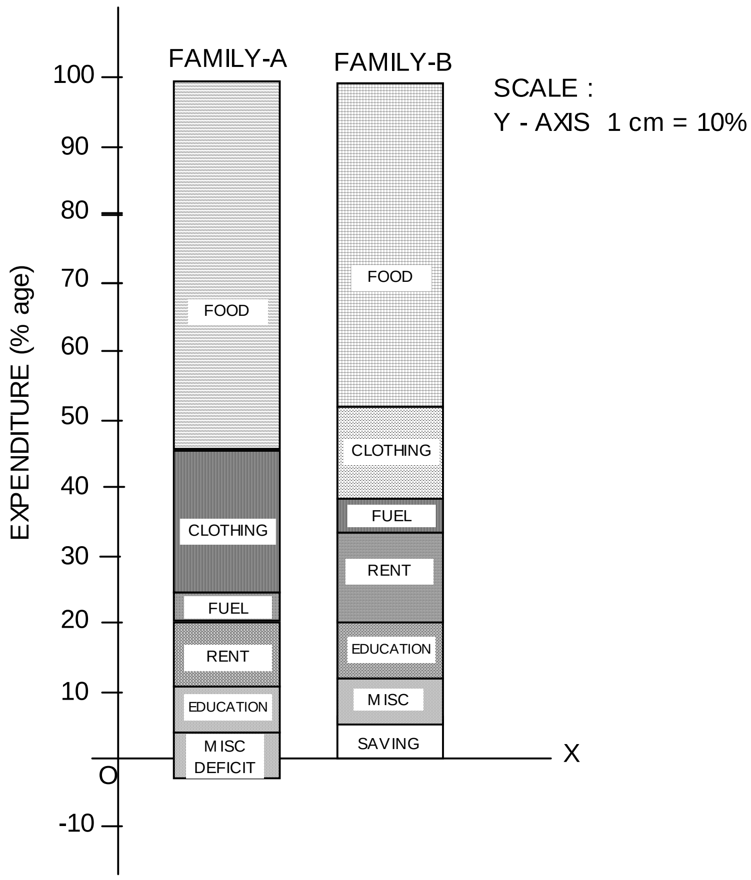
గమనిక : కుటుంబం A యొక్క మొత్తం ఖర్చు ఆదాయాన్ని మించి వున్నది. అందువల్ల 'A' కొరకు దీర్ఘ చతురస్రం 105 శాతంగా వేయాలి. అదనపు 5% ఆధార రేఖ క్రింది వైపు చూపవలెను.

జవాబు : దీర్ఘచతురస్రాల తయారీ కొరకు శాతముల గణన.

వ్యయాంశాలు	A కుటుంబము		B కుటుంబము	
	ఆదాయం (రూ॥లలో)	శాతం	ఆదాయం	శాతం (రూ॥లలో)
మొత్తం ఆదాయం	4,000	100	6,000	100
ఆహారం	2200	55%	300	50%
వస్త్రములు	720	18%	720	12%
ఇంధనం + వెలుతురు	200	5%	300	5%
అద్దె	480	12%	600	10%
విద్య + ఆరోగ్యం	320	8%	600	10%
ఇతరములు	280	7%	480	8%
మొత్తం ఖర్చు	**4200**	**105%**	**5700**	**95%**

పటం నం. 5

A, B కుటుంబాల ఆదాయ వ్యయాలు



5.3.2 ద్విపరిమాణ చిత్రాలు (Two - Dimensional Diagrams) : ఏకపరిమాణ చిత్రాలలో బార్‌ల పొడవులను మాత్రమే లెక్కిలోకి తీసుకొనడం జరుగుతుంది. వెడల్పులు మాత్రం ఒకే విధంగా వుంటాయి. కాని ద్విపరిమాణ చిత్రాలలో బార్‌ల పొడవు మాత్రమేగాక, వెడల్పులకు కూడా ప్రాధాన్యత వుంటుంది. ఈ విధమైన చిత్రపటాలు గీసేటప్పుడు ప్రధానంగా రెండు విషయాలను పాటించాలి. వెడల్పులు సమానంగా వున్నప్పుడు చిత్రం యొక్క పొడవు మారాలి. పొడవులు సమానంగా వున్నప్పుడు వెడల్పులు మారాలి. అంశం మొత్తం విలువ చిత్రపటం వైశాల్యానికి సమానం. అందుచేతనే ద్విపరిమాణ చిత్రాలను 'విస్తీర్ణ పటాల'ని అంటారు. ద్విపరిమాణ చిత్రాలలో సర్వ సాధారణంగా ఉపయోగించబడే చిత్రపటాలను మూడు తరగతులుగా విభజించవచ్చు.

(1) దీర్ఘచతురస్త్రాలు (Rectangles)

(2) చతురస్త్రాలు (Squares)

(3) వృత్తాలు (Circles)

(1) దీర్ఘచతురస్త్రాలు (Rectangles) : దీర్ఘచతురస్రాలను ద్విపరిమాణ చిత్రాలంటారు. కారణమేమంటే ఈ చిత్రపటాలు విస్తీర్ణ సూత్ర ప్రాతిపదికపై ఆధారపడి వుంటాయి. ఏకపరిమాణ బార్ చిత్రాలలో బార్‌ల పొడవులను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకుంటారు. కాని దీర్ఘచతురస్రాలలో పొడవు, వెడల్పులు రెండింటి ప్రాధాన్యత నివ్వడం జరుగుతుంది. దీనివలన రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విలువలను, అందులోని వివిధ విభాగాలను పోల్చిచూడడం ద్వారా ఒక ఖచ్చితమైన అభిప్రాయాన్ని సాధించడానికి వీలుంటుంది.

దీర్ఘచతురస్రాలను రెండు విధాలుగా నిర్మించవచ్చు. 1. ఇవ్వబడిన విలువల మొత్తానికి బార్‌ను నిర్మించి శ్రేణిలోని వివిధ అంశాల విలువల ప్రాతిపదికగా బార్‌ను విభజించవచ్చు. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా శ్రేణులున్నప్పుడు బార్‌ల వెడల్పు ఆయా శ్రేణుల మొత్తం విలువల నిష్పత్తులు అనుపాతంలో వుండవలె. బార్‌ల పొడవు మొత్తం అసలు విలువకు సమానంగా వుంచి, అంశాల ప్రాతిపదికపై బార్‌లను విభజించవలెను. 2. ఇచ్చిన దత్తాంశంలోని వివిధ భాగాలకు శాతపు విలువలను గణన చేసి, వంద యూనిట్లు పొడవుగా నిర్మించిన బారును ఆయా అంశాల శాతపు పరిమాణ ప్రాతిపదికగా విభజించవలెను. బార్‌ల వెడల్పు శ్రేణియొక్క మొత్తం విలువల నిష్పత్తుల అనుపాతంలో వుండవలె. ఈ విధంగా చేయడం వల్ల శ్రేణుల సాపేక్ష మార్పులను సులభంగా అధ్యయనం చేయవచ్చు. అందువల్లనే ఈ పద్ధతిని గణాంక పరిశోధనలలో ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తుంటారు.

	A కుటుంబము (రూ॥లలో)	**B కుటుంబము (రూ॥లలో)**
మొత్తం ఆదాయం	4000	6000
ఖర్చు : ఆహారంపై	2200	3000
వస్త్రములపై	720	720
వెలుతురు + ఇంధనాలపై	200	300
అద్దె కొరకు	480	600
విద్యారోగ్యాలకై	320	600
ఇతర అంశాలకై	280	480
మొత్తం ఖర్చు	**4200**	**5700**

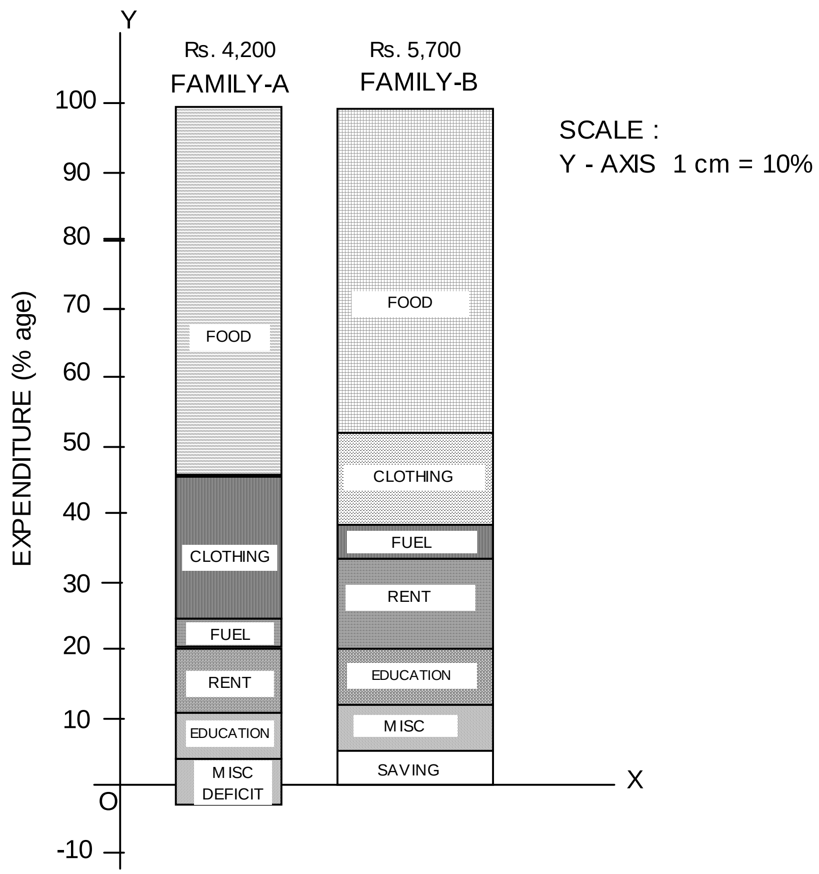
గమనిక : కుటుంబం A యొక్క మొత్తం ఖర్చు ఆదాయాన్ని మించి వున్నది. అందువల్ల 'A' కొరకు దీర్ఘ చతురస్త్రం 105 శాతంగా వేయాలి. అదనపు 5% ఆధార రేఖ క్రింది వైపు చూపవలెను.

జవాబు : దీర్ఘచతురస్రాల తయారీ కొరకు శాతముల గణన.

వ్యయాంశాలు	**A కుటుంబము** ఆదాయం రూ. 4,000 రూ॥లలో	శాతం 100	**B కుటుంబము** ఆదాయం రూ. 6,000	శాతం 100 రూ॥లలో
ఆహారం	2200	55%	3000	50%
వస్త్రములు	720	18%	720	12%
ఇంధనం + వెలుతురు	200	5%	300	5%
అద్దె	480	12%	600	10%
విద్య + ఆరోగ్యం	320	8%	600	10%
ఇతరములు	280	7%	480	8%
మొత్తం వ్యయం	**4200**	**105%**	**5700**	**95%**

పటం నం. 6

A, B కుటుంబాల వ్యయ రాబడులను చూపు శాతపు పటము



(2) చతురస్రాలు (Squares) : ఇచ్చిన దత్తాంశంలో విచారణ ఎక్కువగా వున్నప్పుడు అట్టి దత్తాంశాన్ని చూపడానికి చతురస్రాలు అనుకూలంగా వుంటాయి. దీర్ఘచతురస్రాలలో నిర్మించే చిత్రాలు కొన్ని సందర్భాలలో అంతకళాత్మకంగా వుండవు. ఈ లోపాన్ని అధిగమించడానికి చతురస్రాలను నిర్మించడం జరుగుతుంది. చతురస్రాల నిర్మాణానికి క్రింది సూచనలు పాటించవలెను.

సూచనలు : 1. ఇచ్చిన అంశాలకు వర్గమూలాలను కనుగొనవలెను. ఆ వర్గ మూలాలనే చతురస్రాల పొడవు, వెడల్పులుగా ఉపయోగించాలి. వర్గమూలాలు కూడా పెద్ద సంఖ్యలుగా వుంటే వాటిని సామాన్య హారంతో భాగించి వచ్చిన విలువలను చతురస్రాల వెడల్పు మరియు ఎత్తులుగా ఉపయోగించాలి. 2. చతురస్రాలన్నీ క్షితిజ ఆధారపంక్తిపై వుండవలెను. 3. ప్రతి చతురస్రానికి మధ్య ఖచ్చితమైన ఖాళీని వదలాలి. నాలుగు పట్టణాల జనాభా వేలలో ఇవ్వబడినది. తగిన చిత్ర పటం ద్వారా వివరింపబడినది.

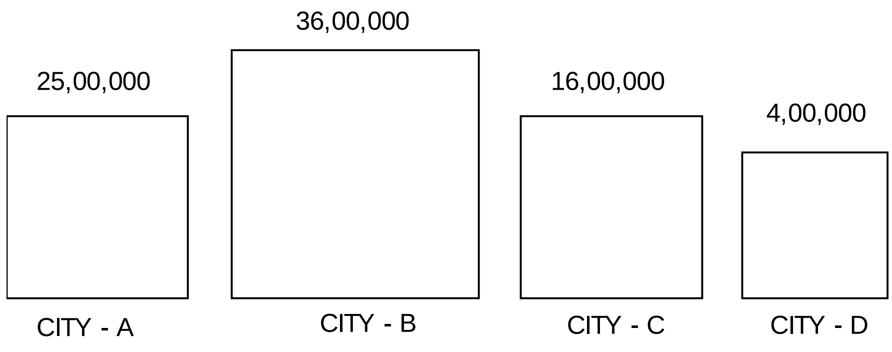
పట్టణం	A	B	C	D
జనాభా ('000లలో)	2500	3600	1600	400

జవాబు :

పట్టణం	జనాభా ('000లలో)	వర్గమూలాలు
A	2500	50
B	3600	60
C	1600	40
D	400	20

పటం నం. 7

A, B, C, D అనే నాలుగు పట్టణాల్లో జనాభా



SCALE : 1cm = 10,000 People

(3) వృత్తాలు (Circles) : దీర్ఘచతురస్రాలను మరియు చతురస్థాలను ఉపయోగించగల అన్ని సందర్భాలలోను వృత్త చిత్రాలను ఉపయోగించవచ్చు. అయితే శ్రేణిలోని వివిధ అంశాల సాపేక్ష ప్రాధాన్యతను చూపవలసి వచ్చినప్పుడు గుణహారాలు. భాగహారాల వంటి గణిత ప్రక్రియలు పెద్ద ఎత్తున అవసరమవుతాయి. అయినప్పటికిని వృత్తాలు స్వభావికంగా

ఎంతో ఆకర్షణీయంగా వుంటాయి. వాటిని చూడగానే దత్తాంశముల విషయాన్ని సులువుగా అవగాహన చేసుకోవచ్చు. అందుచేత ఈ పద్ధతిలో దత్తాంశాన్ని సమర్పించడం బహుళ ప్రాచుర్యం పొందింది. వృత్తాల నిర్మాణానికి కింది సూచనలు పాటించవలె.

సూచనలు :

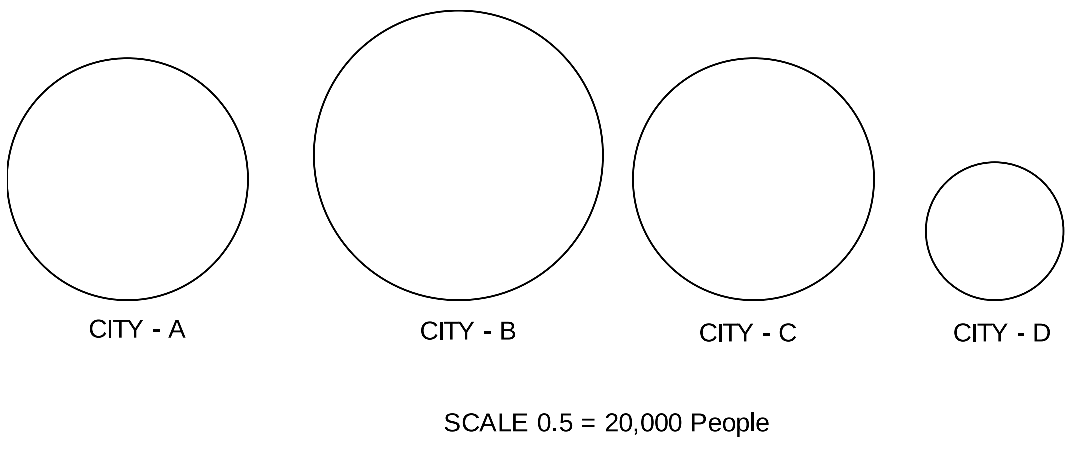
1. ఇవ్వబడిన అంశాల మొత్తాలకు వర్గమూలాలను కనుగొనవలెను. వర్గమూలాల అనుపాతంలో వృత్త వ్యాసార్ధాలు వుండవలెను.
2. వర్గమూలాల ఆధారంగా నిర్ణయించిన వ్యాసార్ధాల ప్రకారం వృత్తాలను క్షితిజ ఆధార పంక్తిపై నిర్మాణం చేయవలెను.
3. వృత్తాల కేంద్రాలు ఒకే క్షితిజ ఆధార పంక్తిపై వుండునట్లు జాగ్రత్త వహించవలె.

(a) సామాన్య 'వృత్త' పటము : పైన చతురస్రాలలో తెలిపిన వివరాలనుపయోగించి వృత్తపటములను గీచి దత్తాంశ సమర్పణ చేయుము.

పట్టణం (1)	జనాభా ('000లలో) (2)	వర్గమూలం (3)	వ్యాసార్ధం అంగుళాలలో (4) (3) ÷ 40
A	2500	50	1.25
B	3600	60	1.5
C	1600	40	1.0
D	400	20	0.5

పటం నం. 8

A, B, C, D అనే నాలుగు పట్టణాల్లో జనాభా



(b) కోణ రేఖాచిత్రాలు లేదా పై రేఖా చిత్రాలు (Pie Diagrams or Angular Diagrams) : ఉపవిభాజిత బారు పటాలు, శాతం బారు పటాలు వలెనే, వృత్తాలను కూడా వివిధ ఉపవిభాగాలుగా విభజించడం జరుగుతుంది. మొత్తం శ్రేణి విలువ 360^0గా భావించబడిన దానిలో ప్రతి ఉపవిభాగం ఎన్ని డిగ్రీలకు సమానంగా వుంటుందో లెక్కించవలెను. వృత్తాన్ని నిర్మించి వృత్త కేంద్రం నుండి ఆయా విభాగాల డిగ్రీలకనుగుణంగా కోణాలను గుర్తించి వృత్తాన్ని విభజించాలి.

అప్పుడు వృత్తం వివిధ భాగాలుగా విభజించబడుతుంది. వృత్తాన్ని చూడగానే దత్తాంశం యొక్క సాపేక్ష వ్యత్యాసాలు సులభంగా తెలుస్తాయి.

పై రేఖా చిత్ర నిర్మాణానికి సూచనలు :

(1) వృత్తంలో కోణాల మొత్తం 360^0. కాబట్టి దత్తాంశంలోని వివిధ అంశాలను 360^0 అనుపాతంలో చూపవలెను.

(2) తగిన వ్యాసార్థాన్ని తీసుకొని వృత్తాన్ని గీయవలెను. ఒకవేళ రెండు కంటే ఎక్కువ వృత్తాలను గీయవలసి వస్తే వ్యాసార్థాల కొలతలు అసలు దత్తాంశాల విలువల అనుపాతంలోనే వుండవలెను.

(3) శ్రేణిలోని ఆయా అంశాల డిగ్రీల అనుపాతంలో వృత్తకేంద్రం నుండి వృత్తాన్ని విభజించవలెను.

(4) ప్రతి విభాగానికి డిగ్రీలను గుర్తించడంతోపాటు, కళాత్మకంగా వుండే విధంగా రంగులనుగాని, గుర్తులను గాని వేయవలెను.

ఉదా ॥ : కింది కుటుంబ ఖర్చు దత్తాంశాన్ని పై రేఖాపటంలో చూపండి.

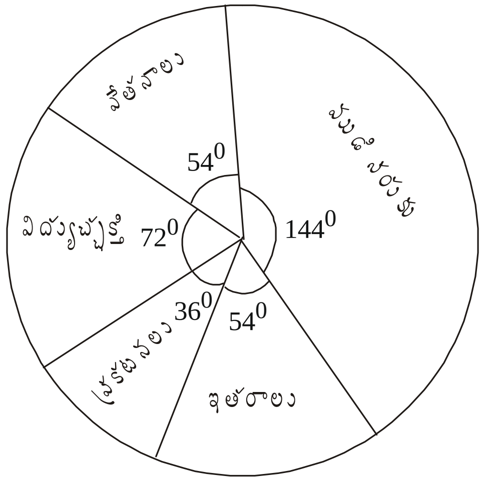
ఖర్చు అంశం	ఖర్చు రూ॥లలో
ముడి సరుకు	1600
వేతనాలు	600
విద్యుచ్ఛక్తి	800
ప్రకటనలు	400
ఇతరాలు	600
మొత్తము ఖర్చు	**4000**

వృత్తపటమును గీయడానికి పైన ఇచ్చిన వివరాలను డిగ్రీలుగా మార్చుకోవాలి.

అంశము	ఖర్చు రూ.లలో	డిగ్రీలుగా మార్చుట	డిగ్రీలు
ముడిసరుకు	1,600	$1{,}600 \times 360 \div 4{,}000$	144
వేతనాలు	600	$600 \times 360 \div 4{,}000$	54
విద్యుచ్ఛక్తి	800	$800 \times 360 \div 4{,}000$	72
ప్రకటనలు	400	$400 \times 360 \div 4{,}000$	36
ఇతరములు	600	$600 \times 360 \div 4{,}000$	54
మొత్తం ఖర్చు	**4,000**	మొత్తం డిగ్రీలు	**360**

పటము నం. 9

కుటుంబ ఖర్చు చూపే పై రేఖా చిత్రము



పై వృత్త పటములో కేవలం ఒకే కుటుంబ ఖర్చు రూ. 4,000/- వివరాలను చిత్రపటం ద్వారా చూపటం జరిగింది. అయితే ఒకటి కంటే ఎక్కువ వృత్త పటాలను గీసే అవసరం వస్తే దిగువ పద్ధతిని అవలంభించాలి.

(1) గీయవలసిన వృత్తాల వ్యాసార్థాలను కనుగొని వాటి నిష్పత్తి ప్రకారం వృత్తాలను గీయాలి. (2) ప్రతివృత్తంలో చూపవలసిన వివిధాంశాల కోణాలను కనుగొని గుర్తించాలి.

ఉదా : దిగువన ఇవ్వబడిన దత్తాంశాన్ని తగిన చిత్ర పటం వేసి సమర్పించుము.

వ్యయాంశము	1983 - 84లో ఖర్చు రూ.	1984 - 85లో ఖర్చు రూ.
ముడిసరుకు	15,000	25,000
వేతనాలు	10,000	20,000
విద్యుచ్ఛక్తి	7,500	15,000
ప్రకటనలు	2,500	10,000
ఇతర ఖర్చులు	5,000	20,000
మొత్తం ఖర్చు	**40,000**	**90,000**

సమాధానం : రెండు సంవత్సరాల మొత్తం వ్యయం రూ. 40,000 మరియు రూ. 90,000 గలదు. వీటి వర్గమూలాలు 200 మరియు 300, 200 లకు వ్యాసార్థమును 2 సెం.మీ. తీసుకుంటే 300లకు వ్యాసార్థమును $\frac{300}{200}\times 2$ సెం.మీ.గా తీసుకోవలసి వుంటుంది. అంటే 3 సెం.మీ. తీసుకోవాలి. మొత్తం వ్యయంలోని వివిధాంశాలకు డిగ్రీలను లెక్కించాలి.

1983 - 84వ సంవత్సరం లెక్కింపు

వ్యయాంశము	వ్యయం	డిగ్రీలలో లెక్కింపు	డిగ్రీలు
ముడిసరుకు	15,000	15000 × 360 ÷ 40,000	135

వేతనాలు	10,000	10000 × 360 ÷ 40,000	90
విద్యుచ్ఛక్తి	7,500	7500 × 360 ÷ 40,000	67.5
ప్రకటనలు	2,500	2500 × 360 ÷ 40,000	22.5
ఇతరములు	5,000	5000 × 360 ÷ 40,000	45
మొత్తం వ్యయం	**40,000**	మొత్తం డిగ్రీలు	**360^0**

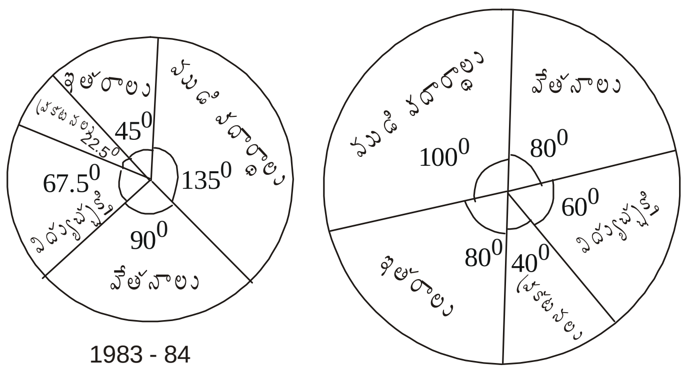
1984 - 85 ఖర్చు లెక్కింపు

వ్యయాంశము	వ్యయం	డిగ్రీలలో లెక్కింపు	డిగ్రీలు
ముడిసరుకు	2,500	25000 × 360 ÷ 90,000	100
వేతనాలు	20,000	20000 × 360 ÷ 90,000	80
విద్యుచ్ఛక్తి	15,000	15000 × 360 ÷ 90,000	60
ప్రకటనలు	10,000	10,000 × 360 ÷ 90,000	40
ఇతరములు	20,000	20,000 × 360 ÷ 90,000	80
మొత్తం వ్యయం	**90,000**	మొత్తం డిగ్రీలు	**360^0**

పై పట్టిక సమాచారం ప్రాతిపదికగా కింది చిత్రాలను రూపొందించడం జరిగింది.

పటము నం. 10

1983 - 84, 1984 - 85 సంవత్సరములలో ఉత్పత్తి వ్యయాలు



1983 - 84

1984 - 85

5.3.3 త్రి పరిమాణ చిత్రాలు (Three-Dimensional Diagrams) : వీటిని “ఘనపరిమాణ చిత్రాల”ని కూడా అంటారు. ఈ విధమైన చిత్రపటాలలో పొడవు, వెడల్పు, మరియు ఎత్తు మూడింటికి ప్రాధాన్యతనివ్వడం వల్లనే వీటికి త్రిపరిమాణ చిత్రాలనే పేరు వచ్చింది. సాధారణంగా వీటిని శంఖాకారంలోను, స్థూపాకారంలోను, ఘనాకారంలోను నిర్మిస్తారు. వీటన్నింటిలోను ఘనాలను నిర్మించడం ఎంతో సులువు. ఈ విధమైన చిత్రాలు నిర్మించడానికిగాను, ఇవ్వబడిన విలువలకు ఘాతాలను (cubes) కనుగొనాలి. ఒకటి కంటే

ఎక్కువగా విలువలున్నప్పుడు ఆయా విలువల ఘనమూలాల మధ్యనున్న నిష్పత్తి ప్రకారం భుజాల పొడవును నిర్ణయించవలెను. దీని కోసం యివ్వబడిన విలువలకు సంవర్గమానం కనుగొని, దానిని 3చే భాగించగా వచ్చిన దానికి ప్రతి సంవర్గమానము కనుగొనవలెను. అదే ఘనమూలమన్నమాట.

ఉదా : వివిధ దేశాల ఇనుము, ఉక్కు ఉత్పత్తికి సంబంధించిన వివరాలను చిత్రపటం ద్వారా వివరింపుము.

దేశం	ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులు)
అమెరికా (America)	512
బ్రిటన్ (U.K.)	343
ఫ్రాన్స్ (France)	216
భారత్ (India)	125

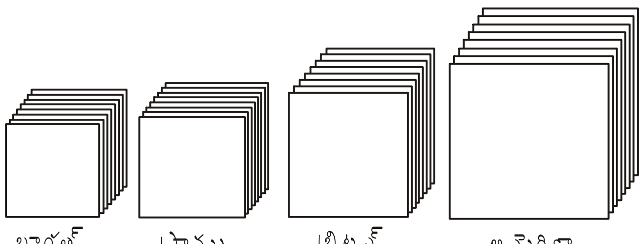
జవాబు :

దేశం	ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులు)	ఘాతము	భుజం పొడవు అంగుళాల్లో
అమెరికా	512	8	1.6"
బ్రిటన్	343	7	1.4"
ఫ్రాన్స్	216	6	1.2"
భారత్	125	5	1"

పై సమాచారాన్ని కింది చిత్రపటాలుగా చూపటం జరిగింది.

పటం నం. 11

నాలుగు దేశాల్లో ఇనుము, ఉక్కు ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)



5.3.4 పిక్టో గ్రామ్‌లు (Pictograms**) :** దత్తాంశాన్ని బొమ్మల రూపంలో సమర్పించడాన్నే పిక్టోగ్రాములు అంటారు. గణాంక దత్తాంశాన్ని సమర్పించడంలో బాగా ప్రాచుర్యం పొందిన గణాంక ప్రక్రియ పిక్టోగ్రామ్‌లు. ఇవి చూపరులను ఆకట్టుకుంటాయి. కొద్దిపాటి పరిశీలన వలన దత్తాంశంలోని ముఖ్య విషయాలను తెలుసుకోవచ్చు. గణాంక శాస్త్ర పరిజ్ఞానం లేని సామాన్యుడు సైతం దత్తాంశానికి సంబంధించిన ముఖ్య విషయాలను అవగాహన చేసుకోగలడు. బొమ్మల పరిమాణం, బొమ్మల సంఖ్య ఇవ్వబడిన దత్తాంశానికి అనుపాతంలో వుండవలెను. అయితే దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే చిహ్నాలుగాని, బొమ్మలనుగాని జాగ్రత్తగా ఎన్నుకోవాలి. ఉదా : రెండు పొరుగు దేశాల రక్షణ వ్యవస్థను పోల్చి చూచుటకు ఎన్నుకోవలసిన చిహ్నాలు క్రింది విధంగా వుండాలి.

అంశము		చిహ్నము
పదాతి దళాన్ని చూపుటకు	→	ఆయుధధారియైన సైనికుని బొమ్మ
సైనిక విమానాలను తెల్పుటకు	→	యుద్ధవిమానం
నౌకాబలాన్ని చూపుటకు	→	యుద్ధనౌక విమానం
యుద్ధ ట్యాంకుల సంఖ్య చూపుటకు	→	ట్యాంకు నమూనా

అదే విధంగా డాక్టర్ల సంఖ్య చూపవలసిన సందర్భాలలో డాక్టరు బొమ్మలు, జీపులు, కార్లు, బస్సుల వంటి రవాణా సాధనాల సంఖ్యను చూపుటకు ఆయా బొమ్మలను చూపవలెను.

సూచనలు : పిక్టోగ్రామ్‌ల నిర్మాణంలో ఈ క్రింది సూచనలు పాటించాలి.

1. ఎంపిక చేయబడే చిత్రాలు అర్థవంతంగా వుండాలి.
2. బహుళ ప్రచారంలో వున్న చిహ్నాలను మాత్రమే వాడాలి.
3. దత్తాంశానికి చెందిన లక్షణాలను లేదా అంశాలను వివరించడానికి వేర్వేరు చిహ్నాలను వాడాలి.
4. సంఖ్యాపరమైన తేడాలను తెల్పడానికి చిహ్నాల సంఖ్యను పెంచడం లేదా తగ్గించడం చేయాలి.
5. చిహ్నాలు మరీ పెద్దవిగాను, మరీ చిన్నవిగాను ఉండరాదు.

వాస్తవానికి పిక్టోగ్రామ్‌ల నిర్మాణం కష్టంతో కూడుకున్నపని. మంచి నైపుణ్యం కలిగిన చిత్రకారులు మాత్రమే వాటిని తయారుచేయగలుగుతారు. కొన్ని చిత్రాలను నిర్మించడానికి ఎక్కువ సమయం పడుతుంది. అంతేగాక పిక్టోగ్రామ్‌లలో ప్రతి చిహ్నం నిర్దిష్టమైన దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహిస్తున్నందు వలన కొన్ని సందర్భాలలో దత్తాంశానికి ఖచ్చితమైన ప్రాతినిధ్యాన్ని కల్గేటట్లు చిహ్నాలను చూపించజాలము. ఉదా : వ్యాపార నౌకల సంఖ్య మనదేశంలో 174 వున్నాయని భావిద్దాం. ఒక నౌక చిహ్నం 50కి సమానమని నిర్ణయించినప్పుడు 3 చిహ్నాలను చూపవచ్చు. మిగిలిన 24 నౌకలను చూపడానికి రమారమి అరబొమ్మను చూపవలసి వుంటుంది. ఇటువంటి ప్రక్రియ హేత్వాభాసలకు దారి తీస్తుంది. అయినప్పటికీ ప్రస్తుత కంప్యూటర్ యుగంలో కంప్యూటర్ ప్యాకేజీలను ఉపయోగించి దత్తాంశాన్ని పిక్టోగ్రాముల రూపంలో వివరించుటకు పెద్దగా శ్రమపడనవసరం లేదు.

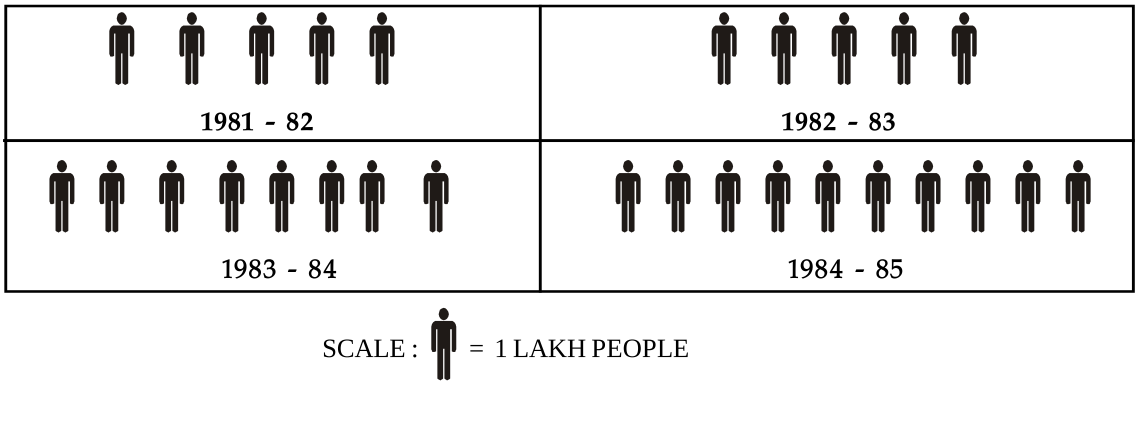
ఉదాహరణ : దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశానికి పిక్టోగ్రామ్ నిర్మించబడినది. ఒక పట్టణంలో 4 సం॥లలో జనాభాలో వచ్చిన మార్పు.

సం॥రము	1981 - 82	1982 - 83	1983 - 84	1984 - 85
జనాభా లక్షలలో	4	5	8	9

పటం నం. 12

1981-82 నుంచి 1984-85 సం॥లలో వచ్చిన జనాభా మార్పు

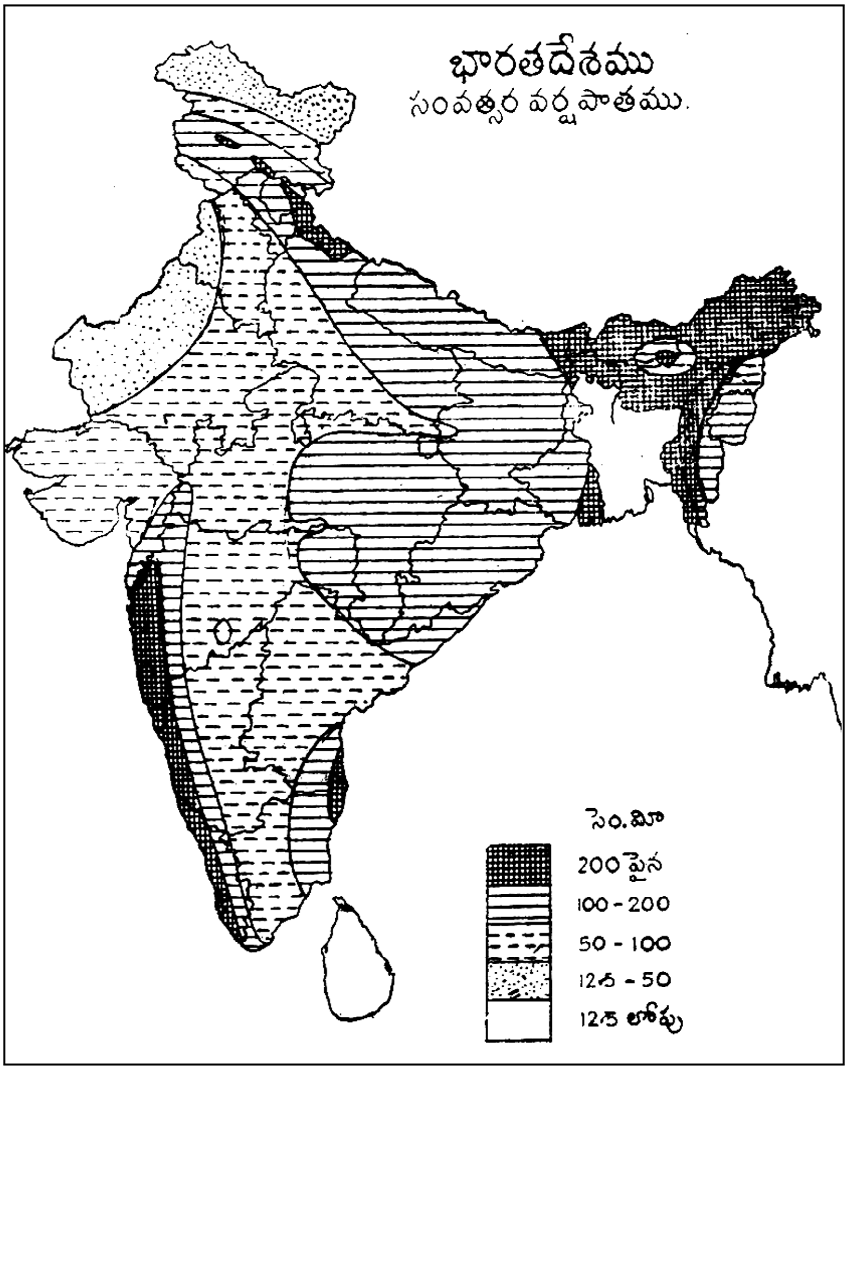
జవాబు :



5.3.5 కార్టోగ్రామ్‌లు (Cartograms) : దేశంలోని వివిధ ప్రదేశాలకు సంబంధించిన గణాంక వివరాలను ఆ ప్రదేశాలు మ్యాప్‌లో ఎక్కడ వున్నాయో అక్కడే ఇమిడ్చి చూపడాన్ని కార్టోగ్రామ్ ద్వారా దత్తాంశాన్ని సమర్పించడం అంటారు. ఒక దేశంలోగాని, రాష్ట్రంలోగాని, జిల్లాలోగాని వున్న ముఖ్యాంశాలను వివరించడానికి వీటినుపయోగిస్తారు. దేశంలోని వివిధ ప్రాంతాలలో వర్షపాత వివరాలు, పండేపంటలు, పారిశ్రామిక కార్యకలాపాలు, ఖనిజ సంపద, విద్యా సంబంధమైన విషయాలు, అటవీసంపద వంటి అనేక వివరాలను చూపవచ్చు. ఆయా విషయాలను చూపుటకు ప్రత్యేకమైన గుర్తులనుగాని, రంగులనుగాని మ్యాప్‌లలో గుర్తిస్తారు. నేడు ఎలక్ట్రానిక్ ప్రసారసాధనాలు కార్టోగ్రాములను ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తున్నాయి. వర్షపాత వివరాలను ప్రధానంగా చూపడానికి తప్పనిసరిగా కార్టోగ్రామ్‌ల రూపంలోనే సమర్పించడం జరుగుచున్నది. కార్టోగ్రామ్‌లు సులభంగా నిర్మాణం చేయడానికి అవకాశముండటమేగాక, సామాన్య పరిజ్ఞానమున్న వారికి కూడా వాటిని చూడగానే సులువుగా బోధపడే అవకాశమున్నందున గణాంక ప్రక్రియలలో బహుళ ప్రాచుర్యం పొందినది.

ఉదాహరణకు వర్షపాతాన్ని చూపే కార్టోగ్రామును కింద పటం నెం. 13లో చూపటం జరిగింది.

పటం నెం. 13



5.4 సారాంశం

గణాంక విచారణలోని నాల్గవ దశ అయిన సమర్పణలో దత్తాంశాన్ని సమర్పణ చేసే పద్ధతులో చిత్రపటాలు ఒక విధమైన సమర్పణ పద్ధతి. చిత్ర పటాల ద్వారా సమర్పణ చేసినట్లయితే సమాచారం సులువుగా అవగాహన అవుతుంది. అందుచేతనే పదివేల పదాల కంటే ఒక చిత్రం చాలా విలువైనది అంటారు. అయితే చిత్రపట నిర్మాణానికి సంబంధించిన సూత్రాలను జాగ్రత్తగా పాటించాలి.

ప్రస్తుతం వాడుకలో వున్న చిత్రపటాలను ఏక పరిమాణ చిత్రాలు, ద్విపరిమాణ చిత్రాలు, త్రిపరిమాణ చిత్రాలు, పిక్టోగ్రాములు, కార్టోగ్రాములుగా విభజించవచ్చు. ఈ వివిధ రకాలైన చిత్రపటాలను వివిధ సందార్భాల్లో, వివిధ రూపాల్లో ఉన్న దత్తాంశాలను సమర్పణ చేయడానికి ఉపకరిస్తాయి. అయితే ఏ సందర్భంలో ఏ విధమైన చిత్రపటాన్ని ఉపయోగించవలసి వుంటుందో ఆ విధమైన చిత్రాన్ని ఎంపిక చేసే నిపుణత గణకునికి అవసరం. దత్తాంశాన్ని సమర్పణ చేసే పద్ధతులలో మరో పద్ధతి రేఖా చిత్రాలు. వచ్చే పాఠంలో మనం రేఖా చిత్ర పటాలను గూర్చి చదువుకుందాం.

5.5 ముఖ్య పదాలు

1. ఏకపరిమాణ చిత్రాలు : వీటినే బార్ పటాలు అంటారు. ఒక పరిమాణాన్ని అంటే ఎత్తును ప్రాతిపదికగా తీసుకుని రూపొందించే చిత్రాలు.
2. పై చిత్రము : దత్తాంశాన్ని వృత్తంలో చూపటాన్నే పై చిత్రము అంటారు.
3. పిక్టో గ్రాములు : సమాచారాన్ని బొమ్మలలో (Pictures) చూపే విధానాన్నే పిక్టోగ్రాములు అంటారు.
4. కార్టోగ్రాములు : గణాంక సమాచారాన్ని మ్యాపుల రూపంలో చూపే విధానాన్నే కార్టోగ్రాములు అంటారు.

5.6 నమూనా ప్రశ్నలు

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. చిత్రపటాలలో రకాలను క్లుప్తంగా వివరించండి.
2. బార్ పటాలలోని ప్రయోజనాలను తెల్పి, అందులో రకాలను వ్రాయుము.
3. చిత్ర పటాల వల్ల ప్రయోజనాలను తెల్పి, చిత్రపటాల నిర్మాణంలో తీసుకోవలసిన జాగ్రత్తలను వ్రాయుము.
4. క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశంలో ఒక బార్ పటాన్ని గీయండి.

ప్రతి మూడు నెలలు (Quarters)	తయారైన సరుకుల సంఖ్య	సగము తయారైన సరుకుల సంఖ్య	మొత్తము
మొదటి	200	100	300
రెండో	250	100	350
మూడో	300	50	350
నాలుగో	400	30	430

5. రెండు కుటుంబాల బడ్జెట్‌లను సరైన చిత్రపటంలో చూపండి.

ఖర్చు అంశాలు	మొదటి కుటుంబము నెలసరి ఆదాయము రూ. 400/-	రెండోసారి కుటంబము నెలసరి ఆదాయము రూ. 600/-
ఆహారము	120	160
వస్త్రాలు	80	100
ఇంటి అద్దె	60	120
విద్య	40	80
ఇంధనము	20	40
ఇతర ఖర్చులు	40	60

6. తెనాలిలో భవన నిర్మాణానికి వివిధ అంశాలపై ఖర్చు ఈ విధంగా వున్నది. ఈ దత్తాంశాన్ని సరిఅయిన చిత్రపటంలో చూపండి.

భూమి	రూ. 4,500	సిమెంటు	రూ. 800
వేతనాలు	2,500	సున్నము	800
ఇటుకలు	2,000	రాయి	600
ఇనుము	1,800	ఇసుక	200
కలప	1,500	ఇతర వస్తువులు	1,300

7. 1938 - 39లో వివిధ దేశాలలో ధాన్యపు ఉత్పత్తి ఎకరానికి పౌన్లలో ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశాన్ని చూపే చిత్రపటము గీయండి.

దేశము	ఎకరానికి పంట (లక్షలపౌన్లలో)
ఇండియా	728
బ్రిటన్	943
అమెరికా	1,469
ఇటలీ	2,093
ఈజిప్టు	2,153
జపాన్	2,277

8. కింది దత్తాంశము ఒక సగటు కార్మిక కుటుంబానికి అయ్యే ఖర్చు తెలియజేస్తున్నది. దానిని చిత్రపటములో చూపండి.

ఖర్చు అంశాలు	ఖర్చుశాతము
ఆహారము	65

వస్త్రాలు	10
ఇంటి అద్దె	12
ఇంధనము	5
ఇతర ఖర్చులు	8

9. భారతరైల్వేలకు సంబంధించిన కింది దత్తాంశాన్ని ఉపవిభాజిత బార్ పటాలలో చూపండి.

	1958 - 59	1959 - 60	1960 - 61
	(కోట్ల రూపాయలతో)		
1. స్థూలమైన రాబడి	390	422	468
2. స్థూలమైన ఖర్చు	331	353	389
3. నికరమైన రాబడి	59	68	79

10. కింది దత్తాంశాన్ని తగిన చిత్రపటంలో చూపండి.

పనిచేసేవారి సంఖ్య

సంవత్సరము	పురుషులు	స్త్రీలు	పిల్లలు	మొత్తము
1950	1,80,000	1,10,000	70,000	3,60,000
1960	3,50,000	2,10,000	1,60,000	7,20,000

11. కింది దత్తాంశాన్ని చూపే సరి అయిన చిత్రపటము గీయండి.

ఖర్చు అంశాలు	A కుటుంబము - నెలసరి ఆదాయము రూ. 500/- రూ॥లలో	B కుటుంబము - నెలసరి ఆదాయము రూ. 300/- రూ॥లలో
ఆహారము	150	150
వస్త్రాలు	125	60
విద్య	25	50
ఇతర ఖర్చులు	190	70
మిగులు లేదా తగులు	+10	-30

12. చతురస్త్రపటంలో కింది దత్తాంశాన్ని చూపండి.

	A ఫ్యాక్టరీ	B ఫ్యాక్టరీ
ఒక్కొక్క వస్తువు ధర	రూ. 6	రూ. 6
ఉత్పత్తి - పరిమాణము	1000 వస్తువులు	800 వస్తువులు

ముడిసరుకుల వెల	రూ. 3000	రూ. 2,400
ఉత్పత్తి ఇతర ఖర్చులు	రూ. 2,000	రూ. 1,400
లాభాలు	రూ. 1,000	రూ. 1,000

13. కింది దత్తాంశాన్ని పై వలయంలో శాతపు పద్ధతిని నిర్మించండి.

మతము	సంఖ్య - లక్షలలో
హిందూ	2,031.9
సిక్కు	62.2
జైను	16.2
ముస్లీము	354.0
క్రిస్టియన్	81.6
ఇతర మతాలు	20.1

14. కింది దత్తాంశాన్ని పిక్టోగ్రామ్‌లో చూపండి.

దేశము	జనాభా - కోట్లలో
చైనా	46.4
ఇండియా	35.7
పాకిస్తాన్	7.6
అమెరికా	15.1
బ్రిటన్	5.0

15. కింది దత్తాంశాన్ని (ఎ) బార్ పటంలోను (బి) వలయ రేఖా చిత్రంలోను చూపండి. ప్రపంచంలో వివిధ ఖండాల విస్తీర్ణత (మిలియన్ చదరపు మైళ్ళలో).

ఖండాలు	విస్తీర్ణత చదరపు మైళ్ళలో
ఆఫ్రికా	11.7
ఆసియా	10.4
యూరప్	1.9
ఉత్తర అమెరికా	9.4
టునీషియా	3.3
దక్షిణ అమెరికా	6.9
రష్యా	7.9
మొత్తం	**51.5**

16. కింది దత్తాంశాన్ని చూపుతూ (ఎ) బార్ పటము (బి) వలయ రేఖా చిత్రము గీయండి. ఒక సంవత్సరంలో కొన్ని కుటుంబాల సగటు ఖర్చు ఇచ్చినారు.

ఖర్చు అంశము	సాలుసరి ఖర్చు. రూ॥లు
ఆహారము	945
వస్త్రాలు	325
అద్దె	520
మందులు	210
ఇతర ఖర్చులు	400
మొత్తం	**2,400**

17. వివిధ దేశాలలో జనాభా 1931లో ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశాన్ని వలయాకార చిత్రంలో ఖండాలుగా విభజించి చూపండి.

దేశము	జనాభా ('000'లో)
చైనా	4,11,770
భారతదేశము	3,52,370
రష్యా	1,61,000
అమెరికా	1,24,070
జర్మనీ	64,776
జపాన్	64,700
బ్రిటన్	46,077
ఫ్రాన్సు	41,860
ఇటలీ	40,100
ఇతర దేశాలు	7,05,007
మొత్తం	**20,11,800**

18. క్రింది దత్తాంశాన్ని సరి అయిన చిత్రపటంలో చూపండి.

ఫ్యాక్టరీ	వేతనాలు	ముడిపదార్థాలు	లాభాలు	ఉత్పత్తి సరుకుల సంఖ్య
A	2,000	3,000	1,000	1,000
B	1,400	2,400	1,000	800

19. కింది దత్తాంశాన్ని వలయాకార చిత్రపటంలో ఖండాలుగా విభజించి చూపండి.

జనాభా పార్టు A రాష్ట్రాలు (ఇండియా)
1951 (లక్షలలో)

రాష్ట్రాలు	జనాభా(లక్షల్లో)
అస్సాం	90.44
ఉత్తరప్రదేశ్	632.16
ఒరిస్సా	146.46
పశ్చిమబెంగాల్	248.10
పంజాబు	126.42
బొంబాయి	359.56
బీహారు	402.26
తమిళనాడు	570.16
మధ్యప్రదేశ్	212.48

20. భారతదేశంలో వివిధ ప్రాంతాల్లో గల జనాభా సాంద్రతను చూపే కార్టోగ్రామ్ తయారుచేయండి.

ఉత్తరప్రదేశ్	557	మధ్యప్రదేశ్	163
బీహార్	572	హైదరాబాద్	227
ఒరిస్సా	244	రాజస్తాన్	117
పశ్చిమబెంగాల్	806	పంజాబ్	338
అస్సామ్	176	పెప్సూ	347
తమిళనాడు	446	వింధ్యప్రదేశ్	151
మైసూర్	308	మధ్యఇండియా	171
బొంబాయి	323	తిరువాన్ కూర్ - కొచ్చిన్	1,015

II. సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

21. చిత్రపటాల వల్ల ప్రయోజనాలు
22. బార్ పటాలు
23. చతురస్రాలు
24. వృత్తపటం
25. పిక్టోగ్రాములు
26. కార్టోగ్రాములు

5.7 చదువదగిన గ్రంథాలు

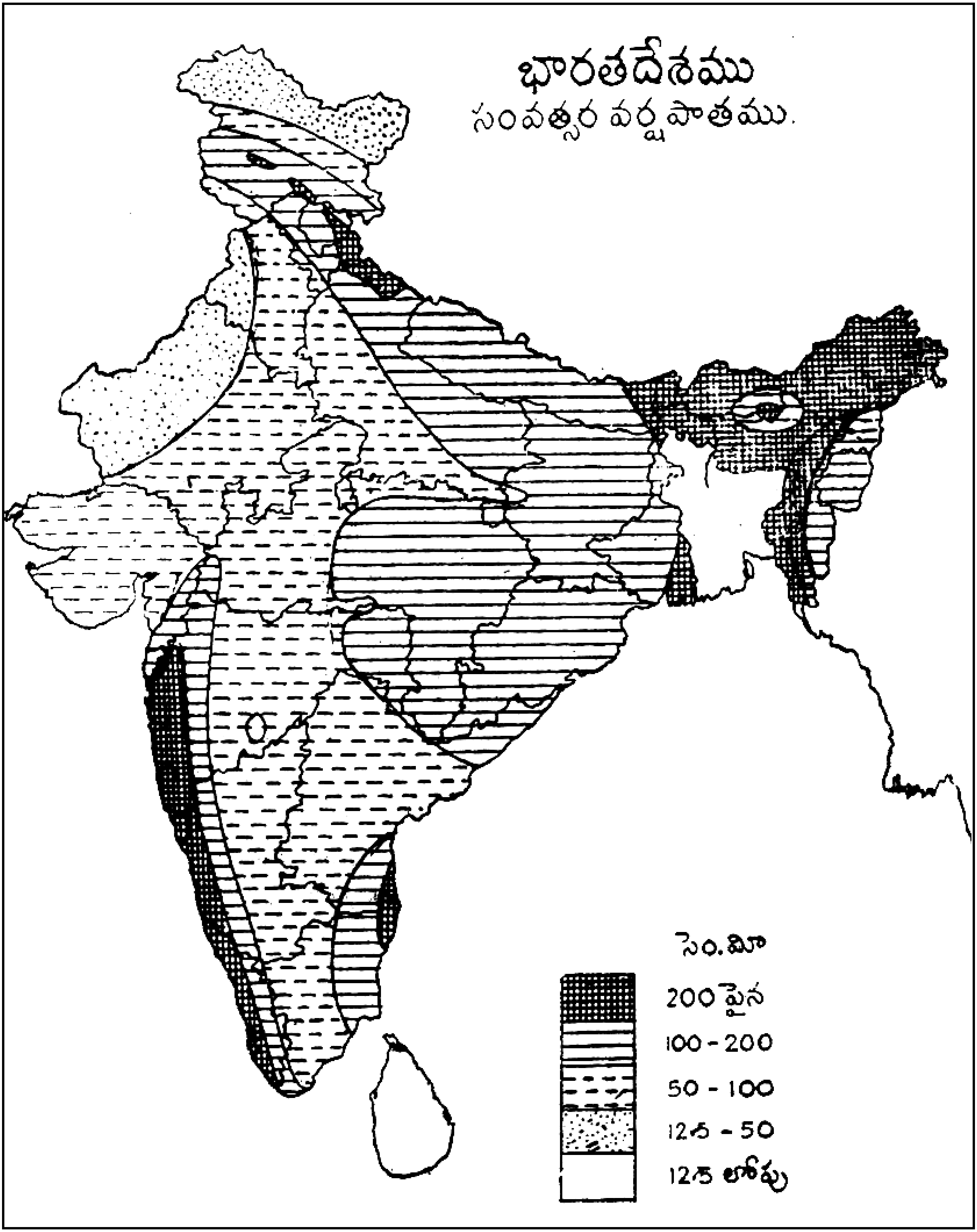
B.N. Elhance : Fundamental of Statistics

S.P. Gupta : Statistical Methods

C.B. Gupta : An Introduction to Statistical Methods

S.C. Gupta : Fundamentals of Statistics

M.C. Shukla & S.S. Gulshan : Statistics - Theory and Practice



భారతదేశము
సంవత్సర వర్షపాతము.
సెం.మీ
200 పైన
100 - 200
50 - 100
12.5 - 50
12.5 లోపు

పాఠం - 6

రేఖా పటాలు

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

6.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం పూర్తయ్యేసరికి మీరు కింది విషయాలను అవగాహన చేసుకొని, రేఖా పటాలను గీయగలరు.

* రేఖా పటాలు అంటే ఏమిటీ? రేఖాపటాలు నిర్మించే విధానం.
* కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలను రూపొందించడం
* పౌనఃపున్య రేఖాపటాలను నిర్మించడం
* రేఖాపటాల ద్వారా బాహుళకం, మధ్యగతం, మధ్యగతముపై ఆధారపడ్డ కొలతలను కనుగొనటం
* రేఖా, చిత్ర పటాల పరిమితులు తెలుసుకోవడం

6.1 విషయపరిచయం

దత్తాంశాన్ని ఆకర్షణీయంగా సమర్పణ చేయడానికి చిత్రపటాలు, రేఖా పటాలు ఉపయోగపడతాయి. సాధారణ మానవుడు అవగాహన చేసుకోవటానికి కూడా ఇవి అవకాశం కల్పిస్తాయి. దత్తాంశ సమర్పణకు చిత్రపటాలు వాడాలా లేక రేఖా పటాలు వాడాలా అనేది గణాంక శోధకుని సమస్య. గత పాఠంలో చిత్ర పటాల వల్ల ప్రయోజనాలు, చిత్రపటాల నిర్మాణం, వివిధ రకాలైన చిత్రపటాలను గూర్చి తెలుసుకున్నాం. ఈ పాఠంలో మనం రేఖాచిత్రాలను గురించి, వాటిని నిర్మించే విధానాన్ని గురించి తెలుసుకుందాం.

6.2 రేఖాపటాలు

రేఖా పటాలు, చిత్రపటాల మధ్య వ్యత్యాసం చూపటానికి ఖచ్చితమైన నియమాలు లేకున్ననూ, రేఖాపటాలను నిర్మించే సమయంలో కింది వాటిని పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి.

1. రేఖాపటాలు గ్రాపు పేపరుపై నిర్మించాలి. రెండు చలరాశులను రెండు అక్షాలపై తీసుకొని వాటి మధ్య గల గణిత సంబంధాన్ని రేఖాపటంలో చూపవలసి వుంటుంది.
2. రేఖాపటాలు ఖచ్చితమైన స్కేలు కలిగి విశ్లేషణకు అనుగుణంగా వుంటాయి. అందుచేతనే రేఖాపటాలను పరిశోధనల్లో విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు.

3. కాలానుగుణంగాను, పౌనఃపున్య విభాజనాల చిత్రీకరణకు రేఖాపటాలు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి.
4. రేఖాపటాల నిర్మాణం చిత్రపటాల నిర్మాణం కన్నా సులువు. అందుచేత విశ్లేషణలో చిత్ర పటాల కన్నా రేఖా పటాలు ఎక్కువగా ఉపయోగించడం జరుగుచున్నది.

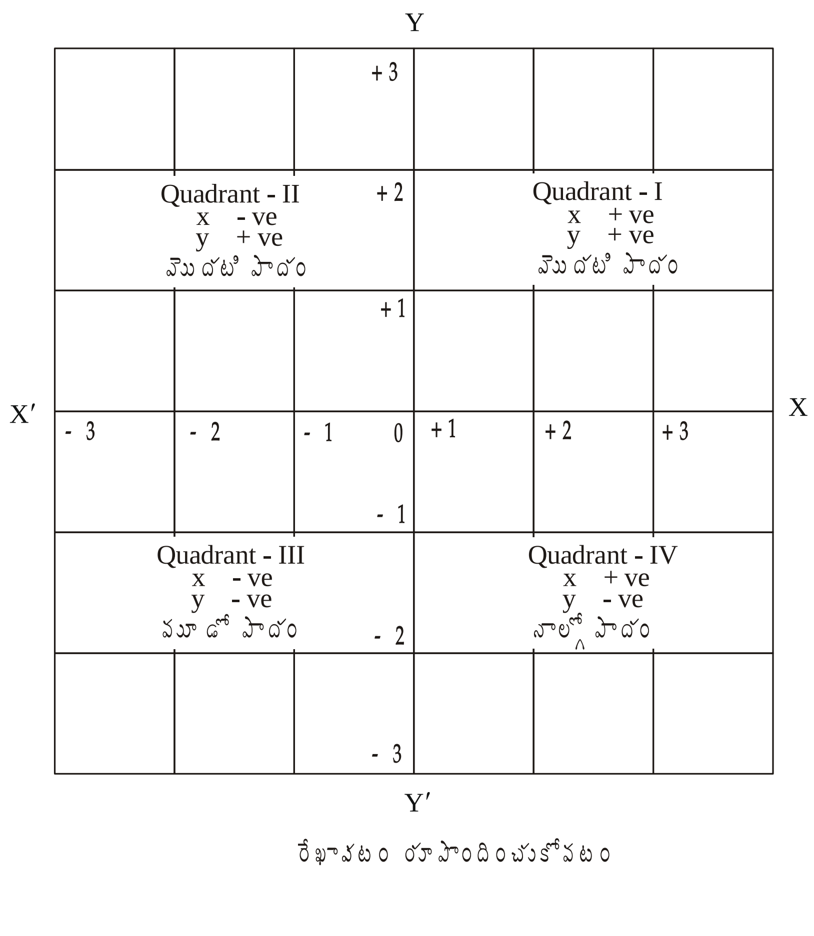
వాస్తవ ప్రపంచంలో అనేక రకాలైన రేఖాపటాలను ఉపయోగించడం జరుగుతూ వుంది. అందులో బహు తరచుగా ఉపయోగించే రేఖాపటాలను గూర్చి ఈ పాఠంలో మనం తెలుసుకుందాం. బహుళ ప్రచారంలో వున్న రేఖాపటాలను రెండు భాగాలుగా విభజించవచ్చు.

1. కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలు
2. పౌనఃపున్య విభాజన రేఖాపటాలు

రేఖాపటాల నిర్మాణము ఒక కళ. వీటిని నిర్మించేందుకు వివిధ రకాలైన నియమ నిబంధనలు వున్నాయి. కాని అనుభవము ద్వారా నిర్మించిన రేఖా పటాలు ఎంతో ప్రయోజనకారిగా వుంటాయి. ప్రస్తుతం మనం రేఖాపట నిర్మాణంలోని నియమాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

రేఖాపట నిర్మాణం : రేఖాపటాన్ని గ్రాఫ్ పేపరుపై రూపొందించడం జరుగుతుంది. గ్రాఫ్ పేపరు మీద రెండు సాధారణ సరళరేఖలు లంబకోణంలో ఒకదానికొకటి ఖండించేటట్లు గీస్తే, వాటిని నిరూపకాక్షాలు (Co-ordinate Axes) అంటారు. ఈ సరళరేఖలను ఖండించే బిందువును మూల బిందువు (Point of Origin) అంటారు. ఈ రేఖల్లో క్షితిజ లేదా అడ్డంగా వున్న రేఖను X అక్షమని, ఊర్ధ్వ లేదా నిలువు రేఖను Y అక్షము అంటారు. ఈ రేఖలను క్రింది పటం 6.1లో చూడవచ్చు.

పటం - 6.1



రేఖావటం రూపొందించుకోవటం

పై రేఖాపటం **6.1**లో 'O' అనేది కేంద్రం. XOX′ అనేది X అక్షము, YOY′ అనేది Y అక్షము. సాధారణంగా X అక్షము మీద స్వతంత్ర చలాంకాన్ని, Y అక్షం మీద అస్వతంత్రపు చలాంకాలను గుర్తించవలసి వుంటుంది. OX అక్షం, OY అక్షాలపై ధనాత్మక విలువలు, OX′ మరియు OY′ అక్షాలపై రుణాత్మక విలువలను గుర్తించడం జరుగుతుంది.

పై గ్రాఫ్‌ను గమనిస్తే, రేఖాపటాన్ని నాలుగు పాదాలుగా విభజించడం జరిగింది. మొదటి పాదంలో X, Y విలువలు ధనాత్మక విలువలు. రెండో పాదంలో X రుణాత్మకము, Y ధనాత్మకము. మూడో పాదంలో X, Y విలువలు రుణాత్మక విలువలు. నాల్గో పాదంలో X ధనాత్మకము, Y రుణాత్మకము. X, Y విలువల స్వభావాన్ని బట్టి అవసరమైన పాదాన్ని గ్రాఫ్‌లో పొందుపరచుకోవడం జరుగుతుంది. వ్యాపార దత్తాంశం సాధారణంగా ధనాత్మకం కావున ఎక్కువగా మొదటి పాదాన్నే ఉపయోగించడం జరుగుతుంది. రేఖాపటంలో పాదాలను గూర్చి తెలుసుకున్నాం. ఇప్పుడు వివిధ రేఖా పటాలను గురించి తెలుసుకుందాం.

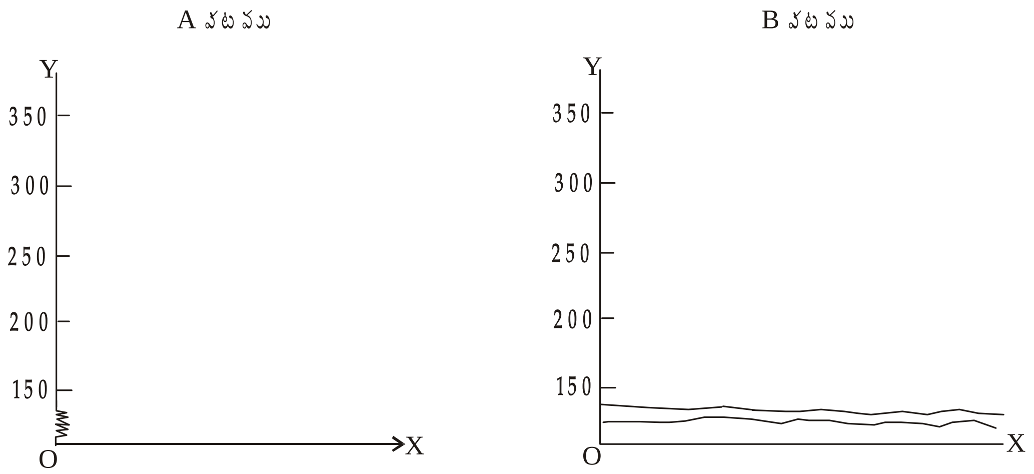
6.2.1 కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలు (Time Series Graphs) : కాలానుగుణంగా అమర్చిన సమాచారాన్ని కాలశ్రేణులు అంటారు. వివిధ కాలాల్లో ఉన్న చలరాశులను రేఖాపటంలో అమర్చితే ఆయా సమయాల్లో వచ్చే మార్పులను సులువుగా విశ్లేషణ చేసేందుకు తోడ్పడతాయి. కాలశ్రేణుల రేఖా పటాన్నే సరళరేఖా చిత్రము (Line Graph) అని కూడా అంటారు. ఈ రేఖాపట నిర్మాణంలో X అక్షంపై కాలాన్ని, Y అక్షంపై చలరాశులను తీసుకొని, విలువలను బిందువులతో గుర్తించి వాటిని కలిపినట్లయితే కాలశ్రేణుల రేఖాపటం వస్తుంది.

ఈ రేఖాపటాలు విరివిగా వాడుకలో ఉన్నాయి. ఈ రేఖాపట నిర్మాణము తేలిక, అర్థం చేసుకోవడం తేలిక. వివిధ సందర్భాల్లో వీటి ఉపయోగం చాలా ఎక్కువ. ఈ రేఖా పట నిర్మాణంలో తీసుకునే స్కేలు సహజ స్కేలు (Natural Scale) కావచ్చు లేదా నిష్పత్తి స్కేలు (Ratio Scale) కావచ్చు. మొదట కాలశ్రేణులు రూపొందించడంలో తీసుకోవలసిన నియమాలను పరిశీలిద్దాం. సహజ స్కేలుపై ఆధారపడి కాలశ్రేణుల నిర్మాణంలో అవసరమైన నియమాలు

1. X అక్షంపై కాలాన్ని, Y అక్షంపై చలరాశిని తీసుకోవాలి. కాల యూనిట్‌ను పటానికిచ్చే పేరులో స్పష్టంగా చూపాలి.
2. Y అక్షంపై స్కేలు సున్నా (0) నుంచి ప్రారంభించుకోవాలి. సమాచారమంతా పొందుపరచుకొనేలా స్కేలును రూపొందించుకోవాలి.
3. కాలానుగుణంగా చలరాశులను గుర్తించిన తరువాత ఆ బిందువులను స్కేలుతో సరళరేఖలా కలపాలి.
4. ఒక పటంలో ఒకటికి మించిన చలరాశులు గుర్తించవలసి వస్తే దట్టమైన రేఖ, బిందువులు మొదలైన విధంగా గుర్తించడం లేదా వివిధ రంగుల్లో చూపవలసి వుంటుంది.
5. రేఖాపటం మీద రాసే పదాలు అంటే సం॥లు, యూనిట్లు మొదలైనవి క్షితిజంగా లేదా అడ్డంగా రాయడం మంచిది. లేనిచో చదువుకోటానికి గ్రాఫ్‌ను తిప్పుకోవలసి వస్తుంది.

మిధ్యా ఆధార రేఖ (False Base Line) : రేఖాపట నిర్మాణంలో ముఖ్య నియమం ఏమనగా Y అక్షం మీద స్కేలు సున్నాతో ప్రారంభించటం. అయితే కొన్ని సందర్భాల్లో Y విలువలు సున్నాకు చాలా దూరంగా వున్నప్పుడు, Y అక్షంపై సున్నాతో మొదలు పెట్టాలంటే ప్రారంభంలో ఎక్కువ ఖాళీ అవసరం. అంతేకాక స్కేలు కూడా ఒక యూనిట్ ఎక్కువ సమాచారాన్ని తీసుకోవలసి వుంటుంది. అందుచేత దత్తాంశం అంత సులువుగా బోధపడదు. ఇలాంటి సందర్భాల్లో మిధ్యా ఆధార రేఖను ఉపయోగిస్తారు. మిధ్యా ఆధార రేఖను గీస్తే, స్కేలును ఎక్కడ ప్రారంభిస్తామో అక్కడ నుంచి మాత్రమే స్కేలును పరిగణనలోనికి తీసుకోవాలి. మిధ్యా ఆధార రేఖలను రూపొందించే విధానం కింది పటాల్లో చూపడం జరిగింది.

పటం 6.2



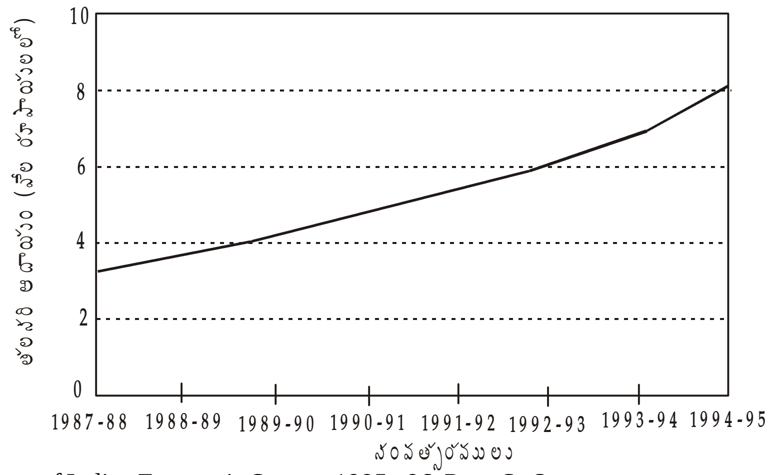
మిధ్యా ఆధార రేఖను పటం **6.2**A లో వలె Y అక్షం ప్రారంభంలో జిగ్‌జాగ్ (ZigZag)గా చూపడం ద్వారా లేదా Bలో వలె X అక్షానికి సమాంతరంగా రెండు రేఖలు గీయడం ద్వారానైనా చూపవచ్చు. ఇప్పుడు మనం కాలశ్రేణుల చలరాశులు చూపే రేఖాపటాలను నిర్మించే విధానం గురించి తెలుసుకుందాం.

6.2.1.1 ఒక చలరాశి రేఖా పటాలు : రేఖా పటంలో X అక్షంపై కాలాన్ని, Y అక్షంపై ఒకే చలరాశిని తీసుకొని నిర్మించే కాలశ్రేణుల రేఖాపటం చూపడం జరిగింది.

ఉదాహరణ 1 : కింది దత్తాంశాన్ని రేఖాపటంలో చూపండి.

సంవత్సరము	**తలసరి ఆదాయం వర్తమాన ధరలలో**	**సంవత్సరము**	**తలసరి ఆదాయం* వర్తమాన ధరలలో**
1987 - 88	3285.4	1991 - 92	5602.9
1988 - 89	3842.1	1992 - 93	6255.0
1989 - 90	4346.5	1993 - 94	7060.3
1990 - 91	4983.0	1994 - 95+	8237.4

1987 - 88 నుంచి 1994-95 సం॥లలో తలసరి ఆదాయం (వేల రూపాయలలో)



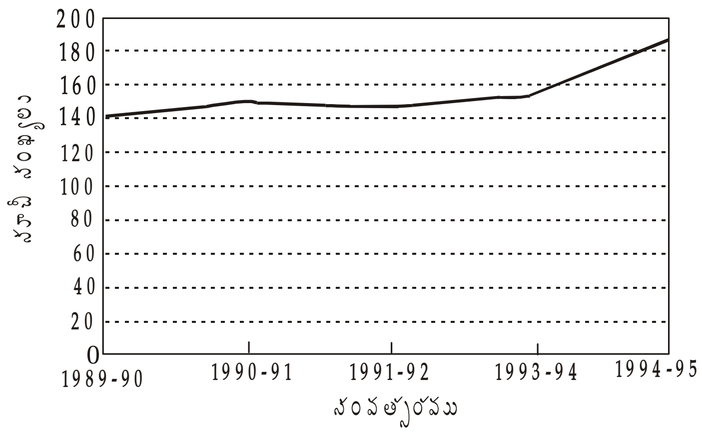
* Source : Govt. of India : Economic Survey, 1995 - 96, Page S - 3

+ Quick Estimates

ఉదాహరణ **2 :** ఈ క్రింది దత్తాంశాన్ని సరైన రేఖాపటంలో చూపండి.

సంవత్సరము	వ్యవసాయ ఉత్పత్తి సూచీలు* ఆధార సంవత్సరము **(1981 - 82)**
1989 - 90	143.0
1990 - 91	148.4
1991 - 92	145.4
1992 - 93	151.5
1993 - 94	156.9
1994 - 95	184.1

1989-90 నుంచి 1994-95 సం॥లలో వ్యవసాయ ఉత్పత్తుల సూచీ సంఖ్యలు



* ఆర్థిక సర్వే 1995-96

6.2.1.2 రెండు లేదా అంతకుమించి చలరాశులు చూపే రేఖాపటం : చలరాశుల కొలమాన యూనిట్లు ఒకే విధంగా వుంటే, ఒకే రేఖాపటంలో రెండు లేదా అంతకుమించిన చలరాశులను Y అక్షంపై చూపవచ్చు. ఈ విధంగా చూపడం వల్ల ఆ చలరాశులను సులువుగా పోల్చవచ్చు. అయితే ఒక్కొక్క చలరాశిని ఒక్కో విధంగా అంటే దట్టమైన రేఖగా, చిన్న చిన్న రేఖల్లా, బిందువులుగా etc. చూపితే పోల్చుటకు అనుగుణంగా వుంటుంది. వీలున్నంతవరకు ఒకే పటంలో 5 లేదా 6 చలరాశులలోపు చూపితే సంగ్దిగ్ధత వుండదు.

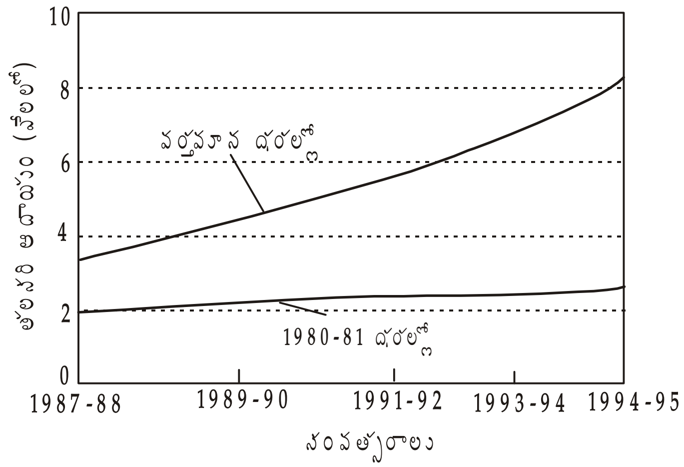
ఉదాహరణ **3 :** కింది దత్తాంశాన్ని సరైన రేఖాపటంలో చూపండి.

	భారతదేశ తలసరి ఆదాయం	
సం॥ము	**వర్తమాన ధరలో**	**1980-81 ధరల్లో**
1987 - 88	3285.4	1900.9
1988 - 89	3842.1	2059.0
1989 - 90	4346.5	2157.1
1990 - 91	4983.0	2222.2

1991 - 92	5602.9	2175.1
1992 - 93	6255.0	2239.1
1993 - 94	7060.3	2291.5
1994 - 95	8237.4	2400.9

మూలం : Economic Survey, 1995 - 96, Govt. of India.

వర్తమాన, 1980-81 ధరల్లో భారతదేశ తలసరి జాతీయాదాయం



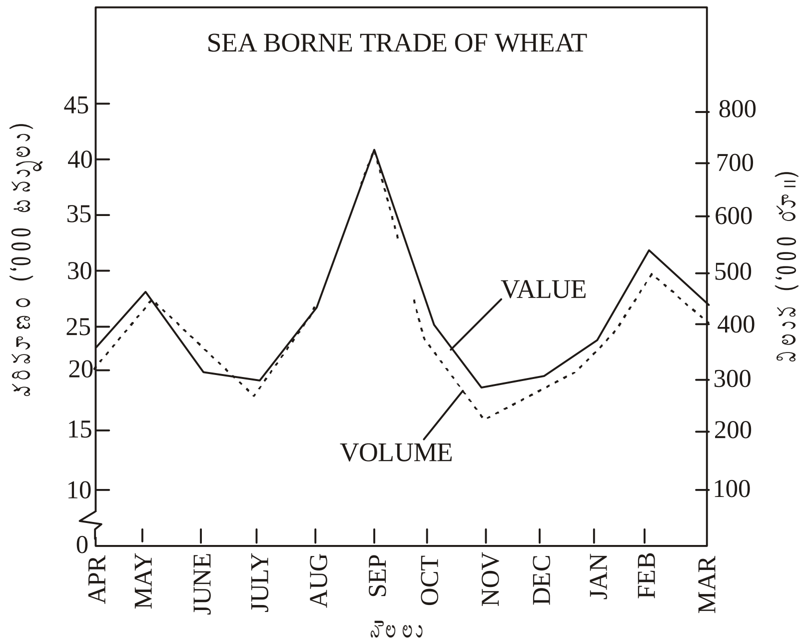
6.2.1.3 రెండు స్కేళ్ళు కలిగిన రేఖాపటం : చలరాశుల ప్రమాణాల్లో తేడాలుంటే రెండు రకాలైన స్కేళ్ళను తీసుకోవలసి వుంటుంది. ఒక స్కేలు చిత్రానికి ఎడమవైపు Y అక్షంపైన మరొకటి కుడివైపు వున్న Y అక్షంపైన తీసుకోవలసి వుంటుంది.

ఉదాహరణ 4 : కింది సమాచారాన్ని సరైన రేఖా పటంలో చూపండి. సముద్రం ద్వారా రవాణా అయ్యే గోధుమ వర్తకం.

నెల	పరిమాణం ('000 Tonnes)	విలువ ('000 Rs.)	నెల	పరిమాణం ('000 Tonnes)	విలువ ('000 Rs.)
April	20	321	October	23	430
May	27	449	November	17	292
June	21	310	December	19	300
July	18	287	January	22	368
August	26	430	February	30	530
September	41	710	March	25	432

(B.Com., Bangalore Univ., 1986)

సముద్రం ద్వారా అయ్యే గోధుమ వర్తకం రవాణా



6.2.1.4 వ్యాప్తి రేఖా చిత్రము : వ్యాప్తిని అంటే అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల మధ్య గల వ్యత్యాసాన్ని కొలిచేందుకు ఈ చిత్రం ఉపయోగిస్తారు. వివిధ కాలాలలో ఏదైనా వస్తు ధరల్లో వ్యత్యాసాలు, ఉష్ణోగ్రతలో వ్యత్యాసాలు, వర్షపాతాల్లో వ్యత్యాసాలు మొదలైన వాటిని కొలిచేందుకు ఈ పద్ధతి ఎంతో సముచితమైనది.

ఉదా : 5 : కింది సమాచారాన్ని వ్యాప్తి రేఖాపటంలో చూపండి.

సం॥ము	ముఖ్య ఎగుమతులు (అత్యధిక విలువలు) (రూ. కోట్లలో)	ముఖ్య ఎగుమతులు (అత్యల్ప విలువలు) (రూ. కోట్లలో)
1989 - 90	35328	27658
1990 - 91	43198	32553
1991 - 92	63375	53688
1992 - 93	73101	69751
1993 - 94	89971	82674

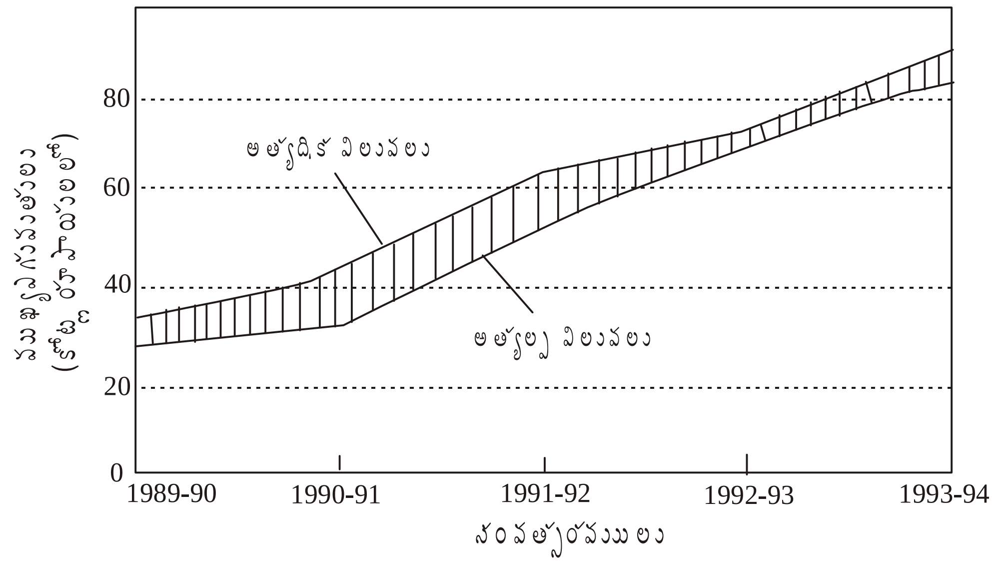
పై పట్టికలోని సమాచారాన్ని వ్యాప్తి చిత్రంలో చూపేందుకు కింది విధంగా నిర్మాణం చెయ్యాలి.

1. X - అక్షంపై కాలాన్ని, Y - అక్షంపై చలరాశులను తీసుకోవాలి.

2. చలరాశులను రేఖాపటంలో గుర్తించి రెండు రేఖలను రూపొందించాలి. రెంటి మధ్య గల ఖాళీ వ్యాప్తిని తెలుపుతుంది.

3. వ్యాప్తిని కొట్టవచ్చినట్లు చూపాలంటే దట్టమైన గీతలు లేదా రంగుతో చూపాలి.

ముఖ్య ఎగుమతుల (కోట్ల రూ॥లలో) వ్యాప్తి రేఖాచిత్రం



6.2.1.5 బాండ్ రేఖా చిత్రం : రాశి మొత్తంలో వివిధ వ్యక్తిగత అంశాల నిష్పత్తిని లేదా వాటాను తెలియజేసే రేఖా పటాన్ని బాండ్ రేఖా చిత్రం అంటారు. ఇందులో మొత్తం చలరాశిలోని వివిధ భాగాలను ఒక దానిపై ఒకటి గుర్తించడం జరుగుతుంది. ఎన్ని విభాగాలు వుంటే అన్ని బాండ్లు వస్తాయి. ప్రతి బాండును స్పష్టంగా తెలిపేందుకు వివిధ డిజైన్లు లేదా రంగులను వాడడం జరుగుతుంది. కొన్ని సందర్భాల్లో దత్తాంశ విలువ మొత్తాన్ని 100కి సరిచేసి లేదా శాతంలోకి మార్చి కూడా బాండ్ రేఖా చిత్రాన్ని చూపవచ్చు.

ఉదాహరణ 6 : కింది దత్తాంశాన్ని (మిలియన్ టన్నులు) బాండ్ రేఖా పటంలో చూపండి.

సం॥ము	బియ్యం	గోధుమ	పప్పుదినుసులు	ఇతరాలు
1988 - 89	70.5	54.1	13.8	31.5
1989 - 90	73.6	49.8	12.8	34.8
1990 - 91	74.3	55.1	14.3	32.7
1991 - 92	73.7	55.1	12.0	26.3
1992 - 93	71.5	56.0	14.5	34.7

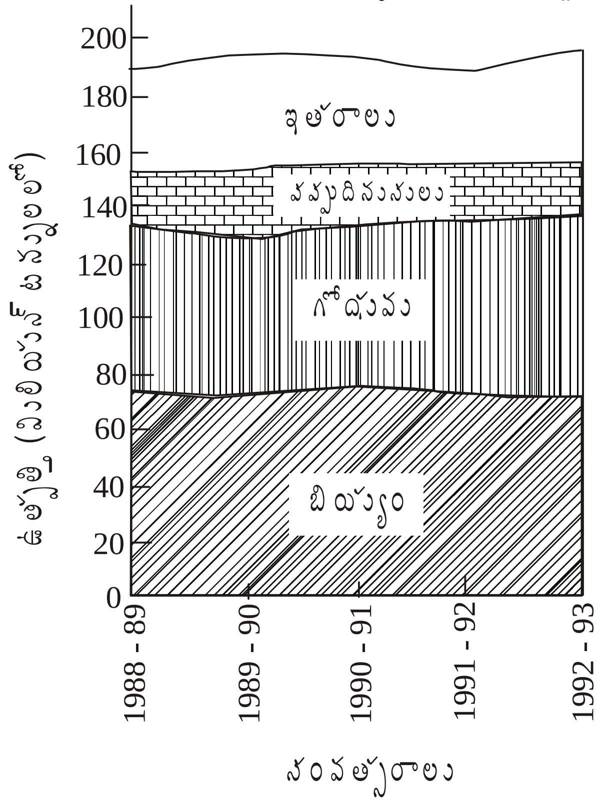
పై సమాచారాన్ని బాండ్ పటంలో రూపొందించాలంటే కింది విధంగా నిర్మించాలి.

1. X అక్షంపై సం॥లు, Y అక్షంపై చలరాశులను గుర్తించాలి.

2. మొదట బియ్యం విలువలను గుర్తించి వాటన్నింటిని స్కేలుతో కలిపితే వచ్చే బాండ్ బియ్యంకి సంబంధించినది.

3. ఆ రేఖపై గోధుమను, పప్పు దినుసులను, ఇతరాలను గుర్తించాలి. ఈ విధంగా మొత్తం నాలుగు బాండ్లు వస్తాయి.

భారతదేశంలో ముఖ్య పంటల ఉత్పత్తి



6.2.1.6 మిశ్రమ రేఖాచిత్రాలు : రెండు చలరాశులు రెండు రకాలైన యూనిట్లలో వుంటే మిశ్రమ రేఖా చిత్రంలో చూపడం జరుగుతుంది. ఒక రాశిని చిత్రపటంలో, మరో రాశిని రేఖాపట స్వరూపంలో చూపటం జరుగుతుంది.

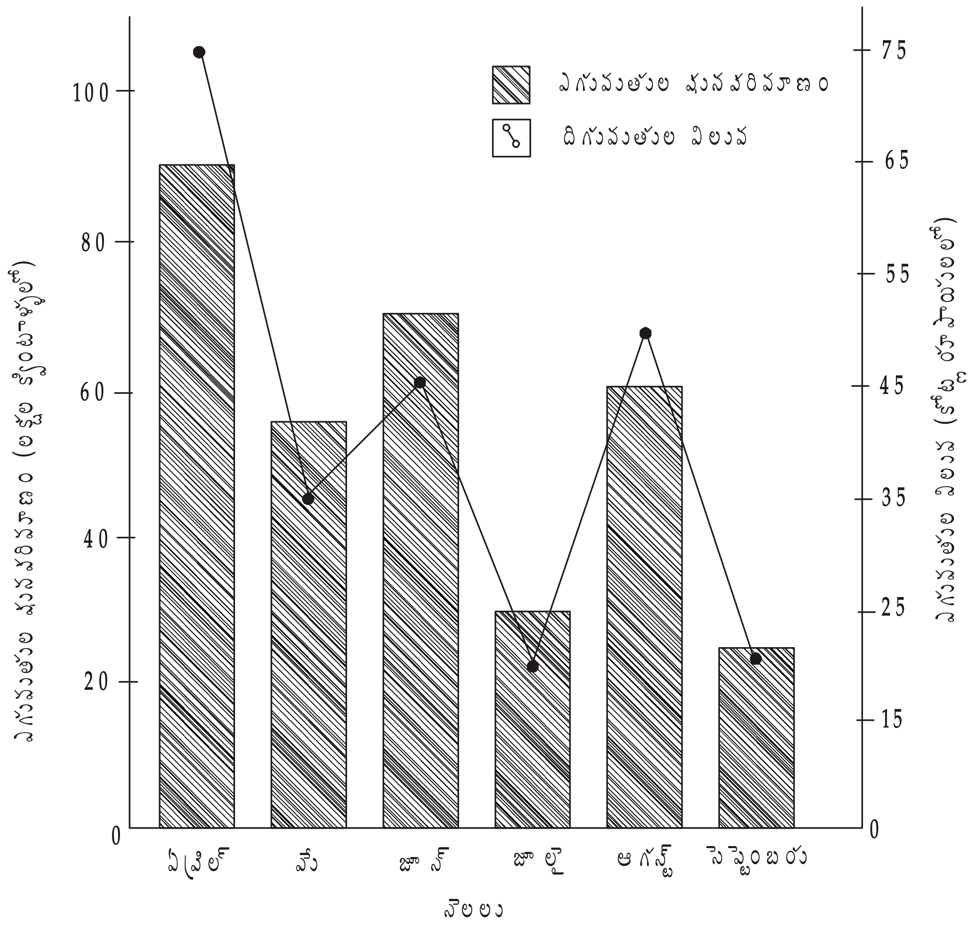
ఉదాహరణ 7 : కింది సమాచారాన్ని మిశ్రమ రేఖాపటంలో చూపండి.

1990వ సంవత్సరంలో భారతదేశ వ్యవసాయ ఎగుమతులు (ఊహించినవి).

నెల	ఘనపరిమాణము (లక్షల రూపాయలలో)	విలువ (కోట్ల రూపాయలలో)
ఏప్రిల్	90	75
మే	55	35
జూన్	70	45
జూలై	30	20
ఆగస్ట్	60	50
సెప్టెంబరు	25	20

జవాబు : రేఖాపటంలో నెలలు ఆధారరేఖపై గుర్తించటం జరిగింది. చిత్రానికి ఎడమవైపు Y అక్షంపై ఎగుమతులు లక్షల క్వింటాళ్ళలో, కుడివైపు Y అక్షంపై ఎగుమతులు కోట్ల రూపాయలను తీసుకొనడం జరిగింది. Y అక్షాలపై వివిధ స్కేళ్ళను చూపడం జరిగింది. ఎగుమతలు ఘనపరిమాణాన్ని బార్‌లలో (చిత్రపటం), ఎగుమతుల విలువలను సరళరేఖలో (రేఖా పటం) చూపడం జరిగింది. రేఖాపటం, చిత్రపటాలను ఒకే పటంలో చూపడం వల్ల దీనిని మిశ్రమ పటం అంటారు.

1990లో భారతదేశ వ్యవసాయ ఎగుమతులు

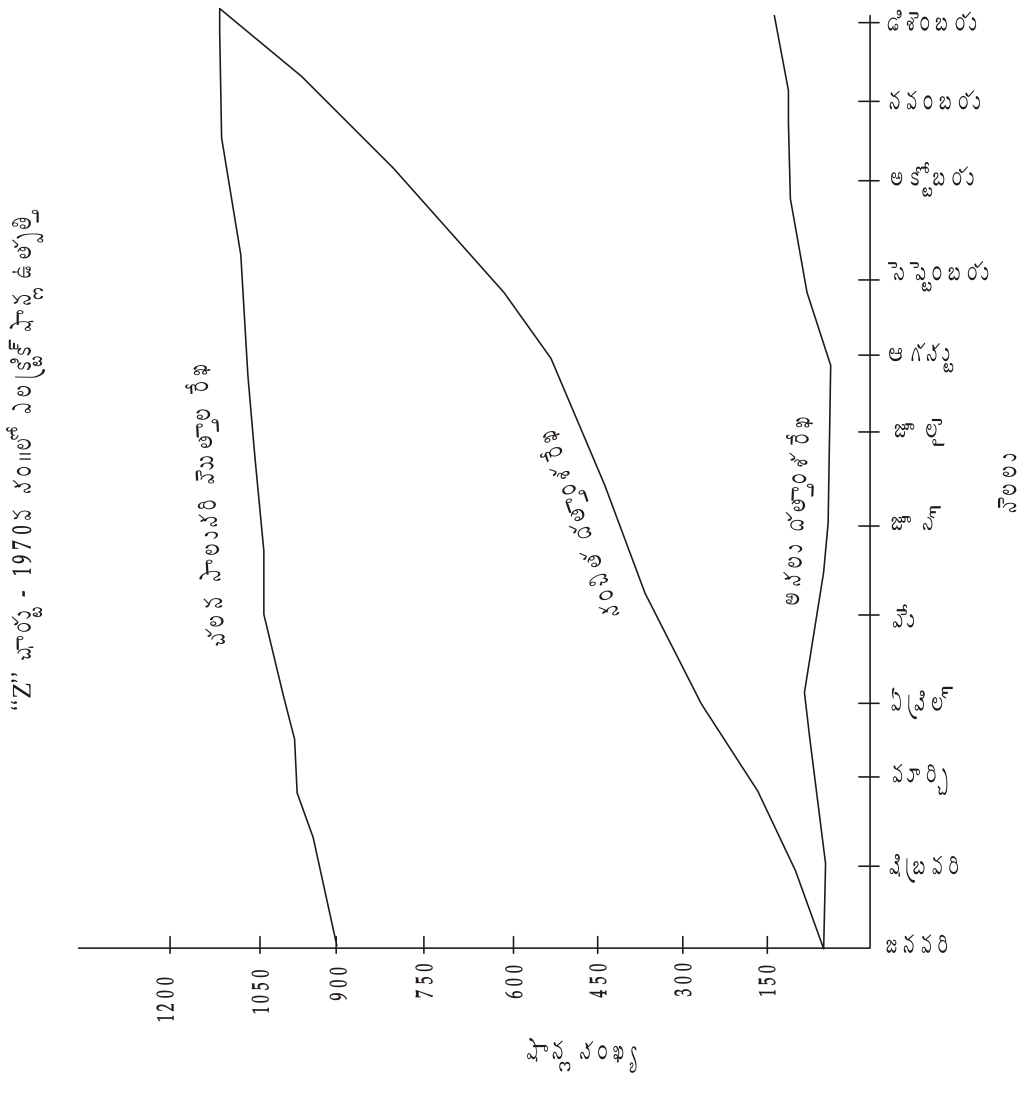


6.2.1.7 జడ్ ఛార్టు లేదా జీ ఛార్ట్ (Z chart or Zee Chart) : ఈ పటం ఇంగ్లీషు అక్షరం Z ఆకారంలో వుంటుంది కావున దీనిని జడ్ ఛార్టు అంటారు. వ్యాపార విషయాల్లో ఈ రేఖాపటాన్ని వాడడం జరుగుతుంది. దీనిని బహుళ రేఖా చిత్రమని కూడా అంటారు. ఇందులో మూడు రకాల రేఖలు వుంటాయి. అవి : (1) అసలు అంశాన్ని చూపే రేఖ (2) సంచిక దత్తాంశ రేఖ (3) చలన సాలుసరి మొత్తాల రేఖ. అసలు దత్తాంశాన్ని చూపే రేఖ దిగువను, సంచిత దత్తాంశ రేఖను మధ్యను చలన సాలుసరి దత్తాల రేఖ ఎగువను చూపుతారు. సంచిత దత్తాంశ రేఖ అసలు దత్తాంశ రేఖను చలన సాలుసరి మొత్తాల రేఖను కలుపుతుంది. అందువల్ల (Z) ఆకారము వస్తుంది. వ్యాపార విషయాలకు సంబంధించిన దత్తాంశాన్ని చూపడానికి ఈ చిత్రాన్ని వాడతారు. దీనిని బహుళ రేఖా ఛార్ట్ (Multiple Chart) అని అంటారు.

ఉదాహరణ 8 : కింది దత్తాంశాన్ని Z ఛార్ట్‌లో చూపండి. 1970లో వెంకటేశ్వరా కంపెనీలో ఎలక్ట్రిక్ ఫాన్ల ఉత్పత్తి సంఖ్య దిగువ యివ్వడమైనది.

నెలలు	ఉత్పత్తి అయిన ఫాన్లు	సంచిత నెలసరి ఫాన్ల సంఖ్య	చలన సాలుసరి మొత్తం సంఖ్య
జనవరి	50	50	900
ఫిబ్రవరి	55	105	930

మార్చి	80	185	980
ఏప్రిల్	100	285	1000
మే	85	370	1040
జూన్	60	430	1050
జూలై	65	495	1070
ఆగస్టు	70	565	1090
సెప్టెంబరు	115	680	1100
అక్టోబరు	140	820	1130
నవంబరు	150	970	1140
డిసెంబరు	180	1150	1150



పై చిత్రంలో నెలలు ఆధార రేఖపై చూపడమైంది. ఫాన్ల సంఖ్య Y అక్షంపై చూపడమైంది. ఉత్పత్తి అయిన ఫాన్ల సంఖ్యకు

ఒక రేఖ గీయడమైంది. ఇది అసలు దత్తాంశ రేఖ రేఖాచిత్రానికి దిగువన ఉంటుంది. సంచిత నెలసరి ఫాన్ల సంఖ్య రెండో రేఖలో చూపడమైంది. ఈ సంచిత దత్తాంశ రేఖ చిత్రానికి అడ్డంగా (cross) వుంటుంది. తరువాత చలన సాలుసరి మొత్తాల (Moving Annual Totals) రేఖ ఎగువన గీయడమైంది. ఈ మూడు రేఖలను గీసిన తరువాత చిత్రము Z ఆకారంలో కనిపిస్తుంది. అందువల్ల దీనిని Z ఛార్ట్ అంటారు.

చలన సాలుసరి మొత్తాలను గణన (calculate) చేసే విధానము - ఇచ్చిన దత్తాంశం రోజువారీదైతే చలన నెలసరి మొత్తాలను (Moving Monthly totals) గణించవచ్చు. ఇచ్చిన దత్తాంశము వారంవారీ లేదా నెలవారీదైతే చలన సాలుసరి మొత్తాలను గణించవచ్చు. నవంబరు నెలకు మాత్రమే చలనసాలుసరి మొత్తం వుంటుంది. ఆ తరువాత ప్రతి నెలకు చ.సా మొత్తాలు గణన చేయవచ్చు. 1969 జనవరి నుండి డిసెంబరు వరకు గల 12 నెలల ఉత్పత్తి అంకెలను సంచితం చేస్తే 1969 డిసెంబరు నెల చ.సా.మొ. వస్తుంది. 1970 జనవరి నెలకు సా.మొ. - 1969 డిసెంబరు నెల చ.సా.మొ. నుండి 1969 జనవరి అంకెను తీసివేసి 1970 జనవరి ఉత్పత్తి అంకెను కలిపితే వస్తుంది. అంటే 1969 ఫిబ్రవరి నుండి 1970 జనవరి వరకు గల 12 నెలల సంచిత మొత్తమన్న మాట. అదే విధంగా 1970 ఫిబ్రవరి సా.మొ. నుండి 1969 ఫిబ్రవరి ఉత్పత్తి అంకెను కూడా తీసివేసి 1970 ఫిబ్రవరి ఉత్పత్తి అంకెను కలిపితే వస్తుంది. ఈ విధంగా ప్రతి నెలకు గణన చేయవలెను. కాబట్టి ప్రతి నెలకు చ.సా.మొ. ఆ నెల ఉత్పత్తి సంఖ్యకు దానికి ముందు గడిచిన 11 నెలల ఉత్పత్తి అంకెలను కలపగా వస్తుంది. పై జీ ఛార్ట్ ఉదాహరణలోని చ.సా.మొ. సంఖ్యలు ఊహించినవిగా భావించవలె.

6.2.1.8 అర్థ సంవర్గమాన రేఖాచిత్రాలు : మనం ఇప్పటి వరకు నేర్చుకున్న రేఖాచిత్రాలు సాధారణ స్కేలుపై ఆధారపడి నిర్మించినవి. సాధారణ స్కేలు ద్వారా పరమ మార్పును (absolute change)ను కనుగొనవచ్చు. అయితే కొన్ని సందర్భాల్లో సాపేక్ష మార్పును (Relative change) కనుగొనవలసిన అవసరం వుంటుంది. అంటే చలరాశిలో ఏ రేటులో మార్పు సంభవించిందో తెలుసుకొనవలసి రావచ్చు. అలాంటి సందర్భాల్లో సాధారణ స్కేలుకు బదులు సంవర్గమాన స్కేలు లేదా నిష్పత్తి స్కేలును వాడవలసి వుంటుంది. సాధారణ స్కేలుకు, నిష్పత్తి స్కేలుకు కింది తేడాలున్నాయి.

1. సాధారణ స్కేలుల్లో సమాన దూరంలో పరమ మార్పు చూపుతాము. కాని నిష్పత్తి స్కేలులో అనుపాతపు విలువ చూపుతాము. అనుపాతపు స్కేలు యొక్క ఉదాహరణ కింద చూపడం జరుగుతుంది.

సాధారణ స్కేలు	నిష్పత్తి స్కేలు			
50	32	320	3200	32000
40	16	160	1600	16000
30	8	80	800	8000
20	4	40	400	4000
10	2	20	200	2000
0	1	10	100	1000

2. సాధారణ స్కేలు పరమ మార్పులను తెలిపితే నిష్పత్తి స్కేలు సాపేక్ష మార్పులను తెలుపుతుంది.

ఉదాహరణ 9 :

సం॥ము	గోధుమ ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)	సాంవత్సరిక పెరుగుదలలు (పరమమైన మానంలో)	సాంవత్సరిక పెరుగుదలలు (శాతాలలో)
1960	10	10	-
1961	20	10	100
1962	30	10	50
1963	40	10	33.3
1964	50	10	25.0
1965	60	10	20.0
1966	70	10	16.0

3. సాధారణ స్కేలుపై అనేక ప్రమాణాలను ఒకే అక్షంపై చూపలేము. అయితే ఎన్ని ప్రమాణాలనైననూ నిష్పత్తి స్కేలుపై చూపవచ్చు.
4. నిష్పత్తి స్కేలు ఆరంభం సున్నాతో కాక ఒకటితో ప్రారంభమౌతుంది. ఎందుకంటే ఒకటి సంవర్గమానం సున్నా.
5. సంవర్గమాన స్కేలులో నిలకడగా వున్న సాపేక్ష మార్పులను సులభంగా గమనించగలము.
6. విలువలలో హెచ్చుతగ్గులు (వ్యాప్తి) అధికంగా వుంటే నిష్పత్తి స్కేలు వాడకం మంచిది.

అర్థసంవర్గమాన రేఖాచిత్ర నిర్మాణం :

ఉదాహరణ **10** : 1961-62 నుంచి 1965-66 సం॥లో ఒక కంపెనీ లాభాలు కింది విధంగా వున్నాయి. అర్థ సంవర్గమాన రేఖాపటంలో చూపండి.

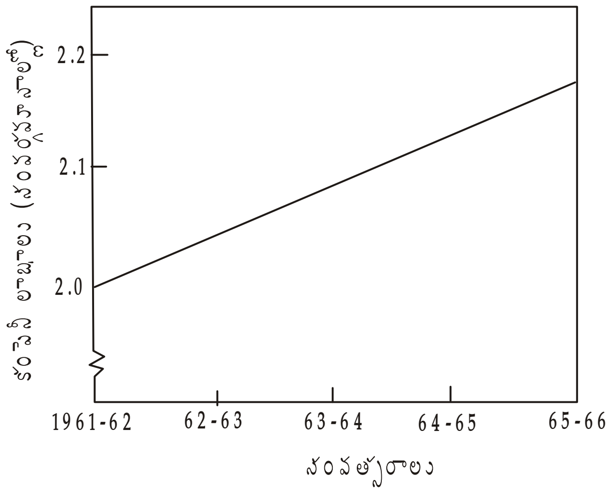
సంవత్సరం	1961-62	1962-63	1963-64	1964-65	1965-66
కంపెనీ లాభాలు (కోట్ల రూ॥లలో)	100	112	120	133	147

నిర్మించే విధానం :

1. మొదట సాధారణ స్కేలును సంవర్గమానాలలోకి మార్చాలి.
2. సంవర్గమాన విలువలను బిందువు తరువాత ఒక అంకెకు లేదా రెండంకెలకు సర్దుబాటు (అవసరాన్ని బట్టి) చేసుకోవాలి.
3. కాలాన్ని, సంవర్గమాన విలువలను పటంలో చూపాలి.

పై లెక్కకు సమాధానం :

సంవత్సరం	కంపెనీ లాభాలు (కోట్ల రూపాయలలో)	సంవర్గమానాలు
1961 - 62	100	2.0000
1962 - 63	112	2.0492
1963 - 64	120	2.0792
1964 - 65	113	2.1239
1965 - 66	147	2.1673

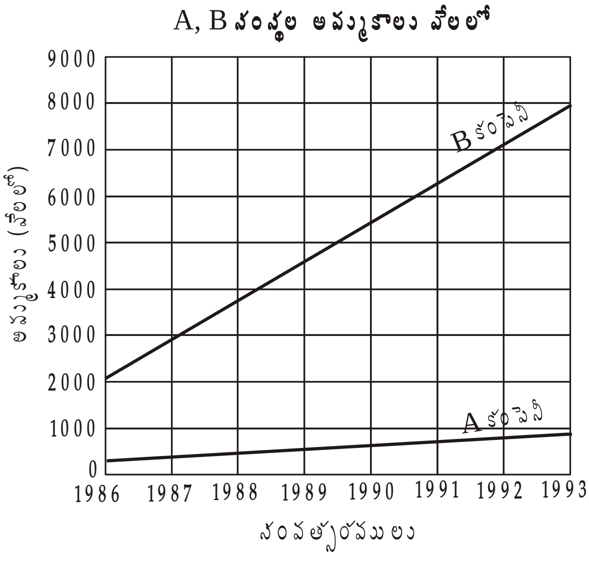


ఉదాహరణ 11 : A, B అనే రెండు సంస్థల అమ్మకాలు వేలలో ఇవ్వడం జరిగింది. రేఖాపటంలో చూపండి.

సం॥ము	A కంపెనీ అమ్మకాలు (వేలలో)	B కంపెనీ అమ్మకాలు (వేలలో)	సం॥ము	A కంపెనీ అమ్మకాలు (వేలలో)	B కంపెనీ అమ్మకాలు (వేలలో)
1986	200	2,000	1990	600	6,000
1987	300	3,000	1991	700	7,000
1988	400	4,000	1992	800	8,000
1989	500	5,000	1993	900	9,000

పై ప్రశ్నకు సమాధానంగా సామాన్య స్కేలు ద్వారా లేదా సంవర్గమాన స్కేలు ద్వారా కూడా చూపవచ్చు. అయితే రెంటిలోనూ సంవర్గమాన స్కేలు ద్వారా నిర్మించటమే ఉత్తమం. అయిననూ రెండు పద్ధతుల్లో నిర్మించే విధానాన్ని కింద చూపడం జరిగింది.

సామాన్య స్కేలు ద్వారా

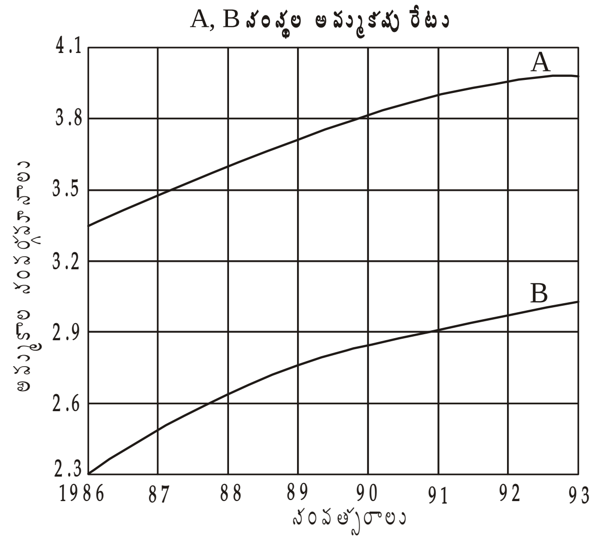


అర్థ సంవర్గమాన రేఖాపటం :

మొదట సాధారణ విలువలను సంవర్గమానాల్లో మార్చాలి

సం॥ము	A సంస్థ అమ్మకాలు (వేలలో)	A సంస్థ అమ్మకపు సంవర్గమానాలు	B సంస్థ అమ్మకాలు	B సంస్థ అమ్మకపు సంవర్గమానాలు
1986	200	2.3010	2,000	3.3010
1987	300	2.4771	3,000	3.4771
1988	400	2.6021	4,000	3.5021
1989	500	2.6990	5,000	3.6990
1990	600	2.7782	6,000	3.7782
1991	700	2.8451	7,000	3.8451
1992	800*	2.9831	8,000	3.9031
1993	900	2.9542	9,000	3.9542

* పై విలువను పటంలో చూపాము.



సంవర్గమాన చిత్రాల పరిమితులు :

1. సాధారణ మానవునికి అవగాహన కావు.
2. సున్నా, రుణాత్మక విలువలను చూపలేము.
3. మొత్తాలను వివిధ భాగాలుగా చూపటం సాధ్యం కాదు.
4. వీటిని రూపొందించాలంటే ప్రత్యేక సామర్థ్యం అవసరం.
5. ఈ పటాల ద్వారా పరమ విలువలను కొలవలేము.

6.2.2 పౌనఃపున్య రేఖాపటాలు : పౌనఃపున్య పట్టీ రూపంలో వున్న సమాచారాన్ని చూపే రేఖాపటాలను పౌనఃపున్య రేఖాపటాలు అంటారు. పౌనఃపున్య విభాజనం అంటే విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వున్న సమాచారం. ప్రముఖంగా అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో వున్న ఈ సమాచారాన్ని రేఖాపటం ద్వారా చూపి, ఆ పటాల ద్వారా వివిధ సగటులను ఉదా : మధ్యగతం, బాహుళకం etc. కనుగొనవచ్చు. పౌనఃపున్య రేఖాచిత్రాలను నాలుగు రకాలుగా చెప్పవచ్చు.

అవి : 1. సోపానపటం (Histogram)

2. పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon)

3. పౌనఃపున్య వక్రరేఖ (Frequency Curve)

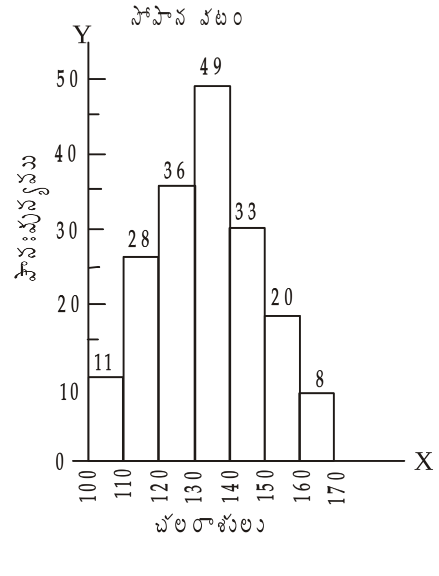
4. ఓజివ్ వక్రరేఖలు లేదా సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు (Ogive Curves or Commulative Frequency Curves). ఈ నాలుగు రకాలైన పటాల నిర్మాణాన్ని గూర్చి ఇప్పుడు మనం తెలుసుకుందాం.

6.2.2.1 సోపానపటం (Histogram) : పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని చూపటంలో అతి తరచుగా ఉపయోగించే రేఖాపటం సోపాన పటం. ఈ పటంలో పౌనఃపున్య విభాజనంలో వున్న పౌనఃపున్యాలను ఊర్ధ్వ ఆసన్న దీర్ఘచతురస్రాలుగా చూపటం జరుగుతుంది. తరగతి అంతరాలను భూమిగాను, పౌనఃపున్యాన్ని ఎత్తుగా భావించి రూపొందించే చిత్రాన్ని సోపాన పటం అంటారు. ఈ పటం సోపానాలను పోలి వుంటుంది కావున ఈ పటాన్ని సోపాన పటంగా చెప్పటం జరుగుతుంది.

ఈ పటాన్ని నిర్మించాలంటే మొదట X అక్షముపై తరగతి అంతరాలను చూపాలి. Y అక్షము మీద పౌనఃపున్యాన్ని గుర్తించాలి. ఒక్కో తరగతికి ఒక్కొక్క దీర్ఘ చతురస్త్రం గీస్తారు. ఈ దీర్ఘ చతురస్త్రం వెడల్పు తరగతి అంతరంగానూ, పొడవు పౌనఃపున్యానికి సమానంగాను గీయడం జరుగుతుంది. ఈ దీర్ఘచతురస్త్ర వైశాల్యము తరగతి అంతరం దాని పౌనఃపున్యాల లబ్దానికి సమానం. ఈ విధంగా ప్రతి తరగతి అంతరానికి ఒక దీర్ఘచతురస్రాన్ని ప్రక్కప్రక్కన అమర్చటం వల్ల ఈ దీర్ఘచతురస్రాలు సోపానాల వలే కన్పిస్తాయి. అందుచేతనే దీనిని సోపాన చిత్రం అంటారు. బార్ పటం, సోపాన చిత్రం ఒకటి కాదు. సోపాన చిత్రాన్ని వివృత అవధులున్న తరగతి అంతరాలకు గీయడం సాధ్యం కాదు.

ఉదాహరణ 12 : (సమాన తరగతి అంతరాలు) కింది విభాజనాన్ని సోపాన పటంలో చూపండి.

చలరాశులు	పౌనఃపున్యం	చలరాశులు	పౌనఃపున్యం
100 - 110	11	140 - 150	33
110 - 120	28	150 - 160	20
120 - 130	36	160 - 170	8
130 - 140	49		

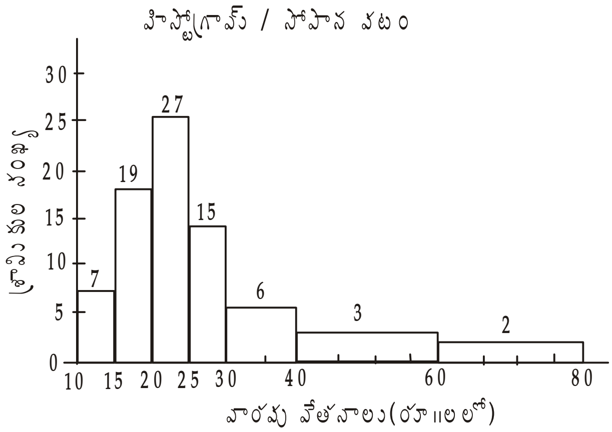


ఉదాహరణ 13 :

కింది విభాజనాన్ని సోపాన పటంలో చూపండి.(అసమాన తరగతులు)

వారపు వేతనాలు(రూ॥లలో)	శ్రామికుల సంఖ్య	వారపు వేతనాలు	శ్రామికుల సంఖ్య
10 - 15	7	30 - 40	12
15 - 20	19	40 - 60	12
20 - 25	19	60 - 80	8
25 - 30	15		

సమాధానం : తరగతి అంతరాలు అసమానంగా వుంటే అందుకు అనుగుణంగా పౌనఃపున్యాలను సర్దుబాటు చేసుకోవాలి. లేకుంటే చిత్రము తప్పుదోవ పట్టిస్తుంది. అందువల్ల కింది విధంగా సర్దుబాటు చేసుకోవాలి. పై విభాజనంలో అతి తక్కువ పరిమాణం గల తరగతి 5. 30 - 40 తరగతి పౌనఃపున్యం 12ను రెండుతో భాగించి (ఎందుకంటే తరగతి పరిమాణం 10 అంటే 5కు రెట్టింపు) పౌనఃపున్యం 6గా గుర్తించాలి. 40-60 తరగతి పౌనఃపున్యం 4తో భాగించి 3గా గుర్తించాలి.



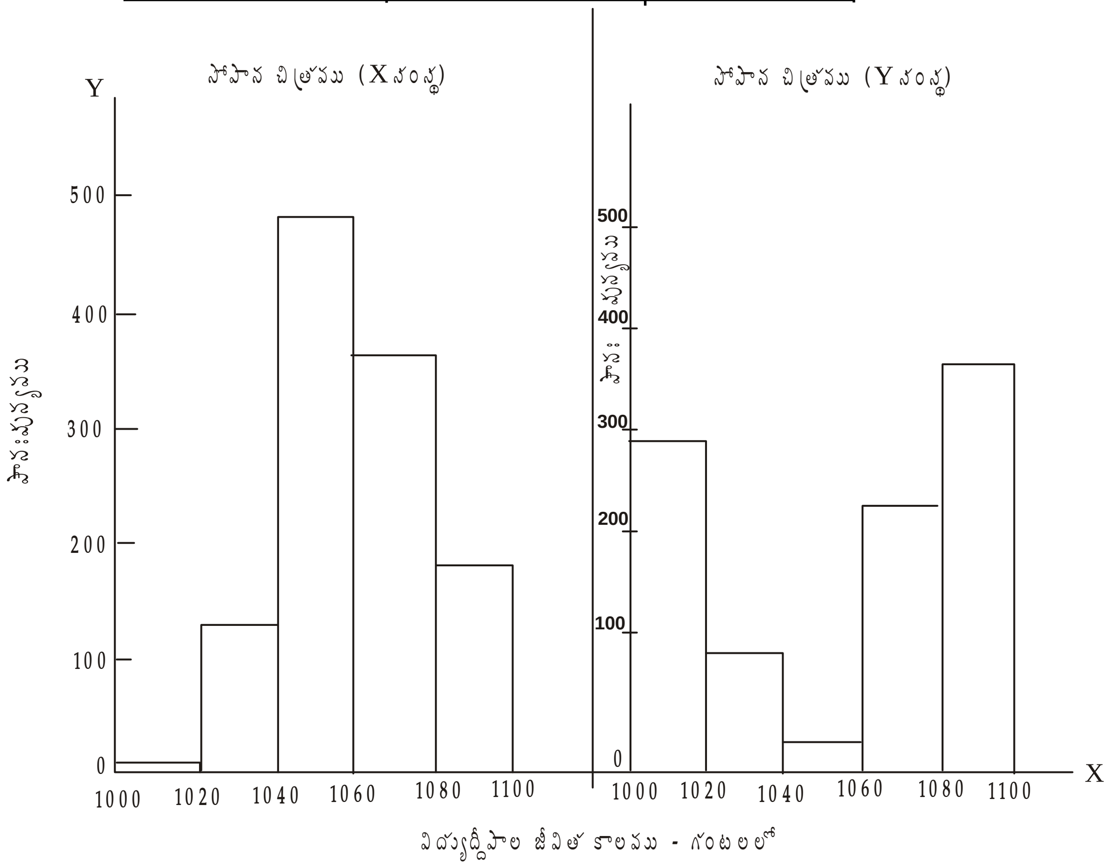
ఉదాహరణ 14 : కింది దత్తాంశాన్ని సోపాన పటాల్లో చూపండి.

ఎలక్ట్రిక్ లాంతరుల జీవిత కాలము (గంటలలో)	1010	1030	1050	1070	1090
(మధ్య విలువలు) X సంస్థ	10	130	482	360	18
Y సంస్థ	287	105	26	230	352

జవాబు : పై దత్తాంశాన్ని రేఖాచిత్రంలో గుర్తించడానికి ఇచ్చిన మధ్యవిలువలకు తరగతి అంతరాలు నియమించి తిరిగి పట్టీ వ్రాయవలెను.

లాంతరు జీవిత కాలము	పౌనఃపున్యము X	పౌనఃపున్యము Y
1000 - 1020	10	287
1020 - 1040	130	105
1040 - 1060	482	26

1060 - 1080	360	230
1080 - 1100	18	352



6.2.2.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి (Frequency Polygon**) :** పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని గుర్తించేందుకు ఉపయోగించే రేఖాచిత్రమే పౌనః పున్య బహుభుజి. ఈ రేఖ అనేక భుజాలను కలిగి వుంటుంది. అందుచేత దీనిని పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు. ఈ పటాన్ని రెండు రకాలుగా నిర్మించడం జరుగుతుంది. 1. సోపాన పటాన్ని గీచి, అందులోని దీర్ఘచతురస్రాల మీద క్షితిజ రేఖల మధ్య బిందువు గుండా సరళరేఖలు గీస్తే పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది. 2. ఇచ్చిన తరగతి మధ్య విలువలుకనుగొని, వాటికనుగుణంగా పౌనఃపున్యాలను బిందువులతో గుర్తించి వాటిని సరళరేఖవలే కలిపితే కూడా పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది. ఈ రెండు పద్ధతుల్లో మొదటి పద్ధతినే ఎక్కువగా వాడడం జరుగుతుంది.

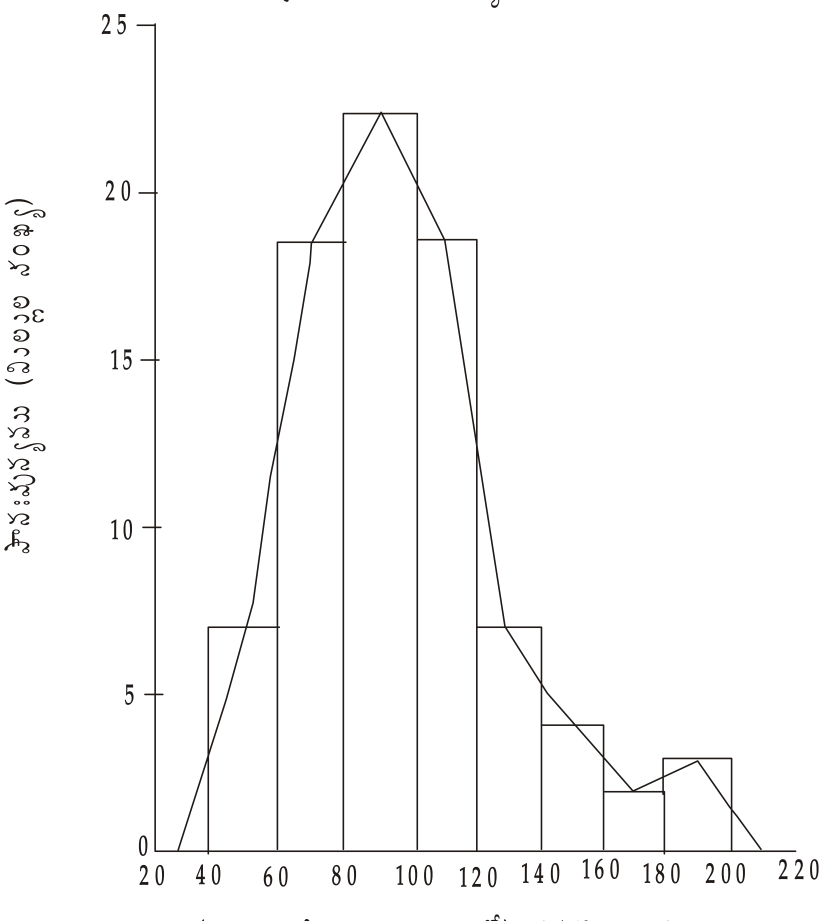
ఉదాహరణ 15 : ఈ క్రింది దత్తాంశానికి సోపానము గీసి, పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించండి.

పెట్టుబడి (లక్షల రూపాయలలో)	మిల్లుల సంఖ్య
40 - 60	7
60 - 80	19
80 - 100	23
100 - 120	19

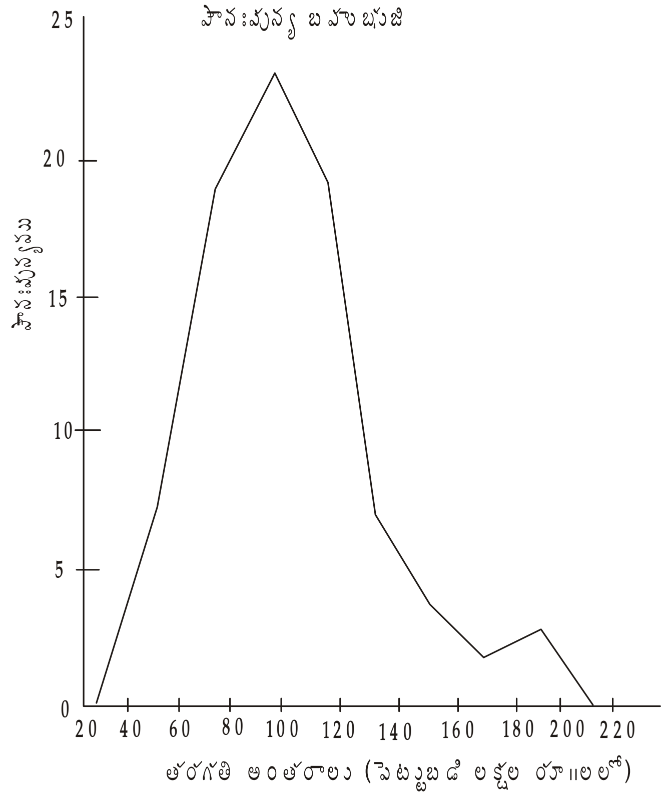
120 - 140	7
140 - 160	4
160 - 180	2
180 - 200	3

జవాబు : రేఖా చిత్రంలో X - అక్షంపై పెట్టుబడిని, మిల్లుల సంఖ్యను (పౌనఃపున్యాన్ని) Y - అక్షంపై తీసుకోవటం జరిగింది. X - అక్షంపై దత్తాంశాన్ని 20 తరగతి అంతరంగా గుర్తించడం జరిగింది. Y - అక్షంపై స్కేలు 5గా, 25 వరకు గుర్తించడం జరిగింది. తరగతి అంతరం భూమిగా, పౌనఃపున్యం ఎత్తుగా మొదట సోపాన పటాన్ని గీయటం జరిగింది. తరువాత X - అక్షంలో మధ్య బిందువులను గుర్తించి దాని తాలూకు పౌనఃపున్యాన్ని బిందువులతో గుర్తించి, ఆ బిందువులను సరళరేఖ ద్వారా కలిపితే పౌనఃపున్య బహుభుజి వస్తుంది.

సోపాన చిత్రము - పౌనఃపున్య బహుభుజి



పై సమాచారంతో కేవలం బహుభుజిని మాత్రమే కూడా నిర్మించవచ్చును. తరగతి అంతరాలు X అక్షంపై, పౌనఃపున్యం Y అక్షంపై గుర్తించిన తరువాత మధ్య విలువలకు పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని బిందువులతో గుర్తించి, వాటిని స్కేలుతో సరళరేఖవలే కలిపితే పౌనఃపున్య బహుభుజి లభ్యమవుతుంది.



6.2.2.3 పౌనఃపున్య వక్రరేఖ (Frequency Curves) : మధ్య విలువలకు, పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని బిందువులతో గుర్తించి వాటిని స్కేలుతో కలిపితే వచ్చే రేఖ బహుభుజి అయితే ఆ బిందువులను చేతితో సరస వక్రరేఖ వలే కలిపితే వచ్చు రేఖను పౌనః పున్య వక్రరేఖ అంటారు. పౌనఃపున్య బహుభుజి దిగువనున్న విస్తీర్ణం ఎంత వుంటుందో పౌనఃపున్య వక్రరేఖ దిగువ విస్తీర్ణం కూడా ఉరమరగా అంతే ఉండేటట్లు రేఖను గీసుకునే జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి. ఇచ్చిన సమాచారం ఒక దత్తాంశం తాలూకు ప్రతిచయనం అయితే ఈ వక్రరేఖను గీయటం ఉపయోగకరం.

పౌనఃపున్య వక్రరేఖ గీసే ముందు విధిగా పౌనఃపున్య బహుభుజి నిర్మించాలి. ఆ తరువాత వివిధ బిందువులను చేతితో కలుపుతూ పౌనఃపున్య వక్రరేఖను గీయాలి. గతంలో చెప్పిన విధంగా ఈ పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను

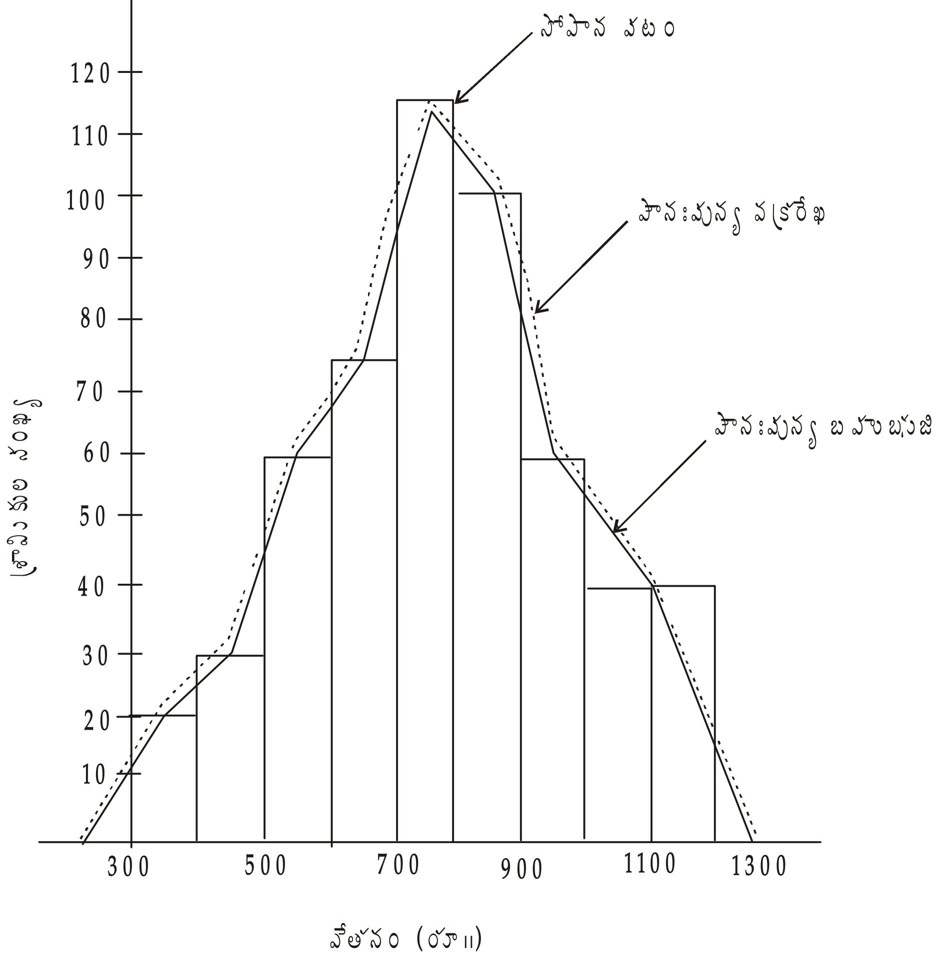
1. సోపాన పటం గీచి తరువాత నిర్మించవచ్చు.
2. సోపాన పటం లేకుండా కూడా నిర్మించవచ్చు.

పౌనఃపున్య వక్రరేఖను గీచేటప్పుడు గంటాకారంగా మలచవలసి వుంటుంది. ఈ పటాల నిర్మాణాన్ని గూర్చి ఇప్పుడు మనం తెలుసుకుందాం. సోపాన పటం గీచి నిర్మించడాన్ని తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 16 : కింది సమాచారాన్ని సోపాన పటం గీచి, పౌనఃపున్య బహుభుజి మరియు పౌనఃపున్య వక్రరేఖను గీయండి.

కార్మికుల వేతనాలు (Rs.)	కార్మికుల సంఖ్య	కార్మికుల వేతనాలు (Rs.)	కార్మికుల సంఖ్య
300 - 400	20	700 - 800	115
400 - 500	30	800 - 900	100

500 - 600	60	900 - 1000	60
500 - 700	75	1000 - 1200	40

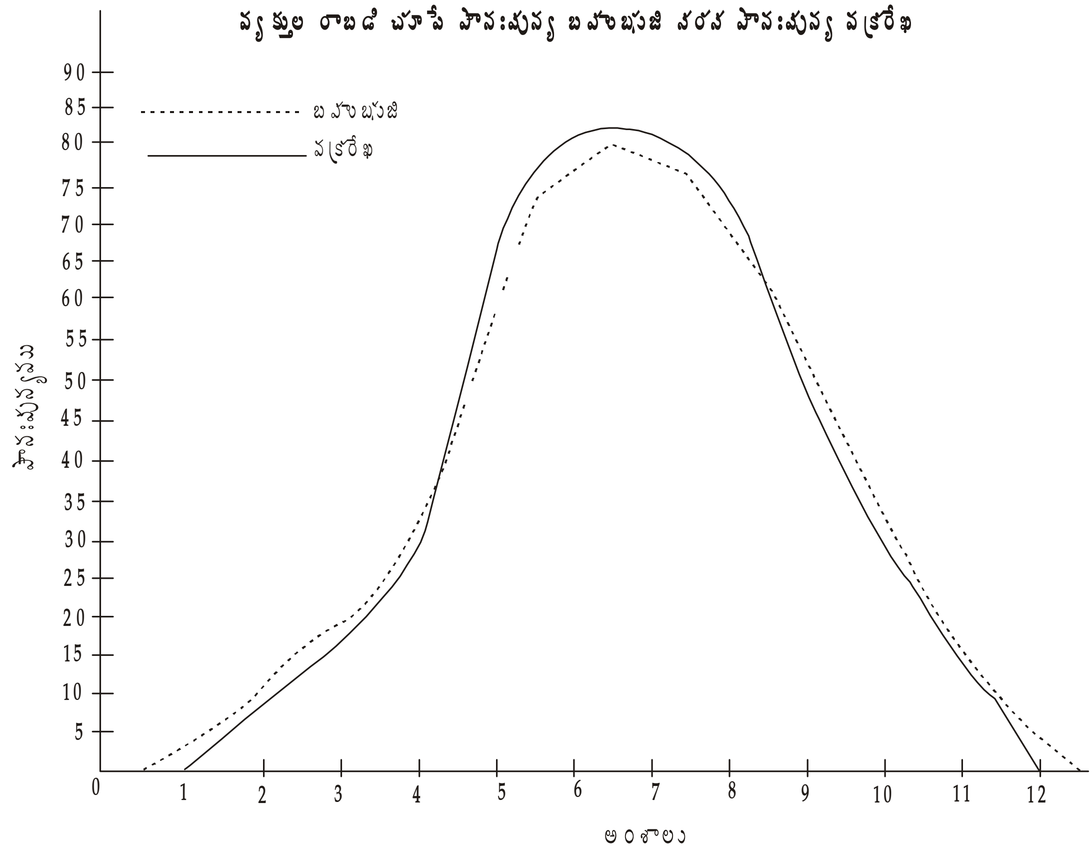


ఉదాహరణ 17 : కింది విభాజనానికి పౌనఃపున్య బహుభుజిని, పౌనఃపున్య వక్రరేఖను సోపాన పటం లేకుండా గీయండి.

అంశాలు	పౌనఃపున్యం
1 - 2	6
2 - 3	16
3 - 4	23
4 - 5	43
5 - 6	74
6 - 7	80
7 - 8	76
8 - 9	63

9 - 10	42
10 - 11	23
11 - 12	9

పై దత్తాంశంలో అంశాలను X అక్షంపైన. పౌనఃపున్యాన్ని Y అక్షంపై తీసుకొని స్కేలును నిర్మించడం జరిగింది. మధ్య బిందువులకు, పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని మొదట బిందువులతో గుర్తించాలి. ఆ బిందువులను స్కేలుతో సరళరేఖ వలె బిందువు నుంచి బిందువులకు కలుపగా వచ్చిన రేఖను పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటాము. ఆ గుర్తించిన బిందువులనే సరస వక్రరేఖవలె గంటాకారంలో కలుపగా వచ్చే రేఖను పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అంటాము. ఈ విధంగా నిర్మించిన రేఖలను కింది పటం తెలుపుతుంది.



6.2.2.4 సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు లేదా ఓజివ్ వక్రరేఖలు : సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలనే ఓజివ్ వక్రరేఖలని కూడా అంటారు. కొన్ని సమయాల్లో మనకు భిన్నమైన సమాచారం కావలసి రావచ్చు. ఉదా॥కు ఒక ఫ్యాక్టరీలో వున్న కార్మికులలో ఎంత మంది 2000 రూపాయల లోపు వేతనం పొందుచున్నారు. ఎంత మంది 2000 రూపాయల పైన వేతనం పొందుచున్నారు. అదే విధంగా ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల్లో ఎంత మందికి 50 లోపు మార్కులు వచ్చాయి, ఎంత మందికి 50 కన్నా ఎక్కువ వచ్చాయి. ఈ విధమైన ప్రశ్నల సమాధానాలు పై రేఖాపటాలు చెప్పలేవు.

పై ప్రశ్నలకు సమాధానాలు ఇవ్వాలంటే సాధారణ పౌనఃపున్యాలు పనికిరావు. పౌనఃపున్యాలను సంచితం చేయవలసి లేదా కలుపవలసి వుంటుంది. అందుచేత ఇచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని సంచిత పౌనఃపున్య పట్టీ రూపంలో అమర్చుకోవాలి. ఈ పట్టీని రేఖాపటంలో చూపగా వచ్చే రేఖలను సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు లేదా ఓజివ్ వక్రరేఖలు అంటాము. ఓజివ్ వక్రరేఖలను రెండు విధాలుగా కనుగొంటాము. ఎ) కంటే తక్కువ పద్ధతి బి) కంటే ఎక్కువ పద్ధతి

ఈ రెండు పద్ధతులలో ఓజివ్ వక్రరేఖలను కనుగొనే విధాన్ని పరిశీలిద్దాం.

ఎ) **కంటే తక్కువ పద్ధతి :** ఈ పద్ధతిలో తరగతులను ఎగువ అవధుల ప్రాతిపదికగా 'కంటే తక్కువ' రూపంలో మార్చటం జరుగుతుంది. అందుకు అనుగుణంగా పౌనఃపున్యాలను కూడా కలపడం జరుగుతుంది. ఈ విధంగా కలపగా వచ్చిన వాటిని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అంటాము. ఆ తరువాత ఎగువ అవధులకు, సంచిత పౌనః పున్యాలకు గల సంబంధాన్ని రేఖాపటంలో చూపడం జరుగుతుంది. ఈ విధంగా రూపొందించిన ఓజివ్ రేఖ క్రమ క్రమంగా పెరుగుతూ పోతుంది. కావున దీనిని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అంటాము.

బి) **కంటే ఎక్కువ పద్ధతి :** ఈ పద్ధతిలో తరగతులను దిగువ అవధి ప్రాతిపదికగా 'కంటే ఎక్కువ' రూపంలో మార్చడం జరుగుతుంది. తరువాత ప్రారంభ తరగతికి మొత్తం పౌనఃపున్యం, తరువాత తరగతి తరగతికి క్రమంగా తగ్గించుకుంటూ పోవడం జరుగుతుంది. కావున దీనిని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అంటారు. తరువాత దిగువ అవధులు, సంచిత పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని రేఖాపటంలో గుర్తించి కలపగా వచ్చిన రేఖ క్రమక్రమంగా తగ్గుతూ వుంటుంది. అందుచేత దీనిని అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ అంటాము.

ఓజివ్ వక్రరేఖల వల్ల ఉపయోగాలు :

1. ఒక నిర్ణీత విలువలోపు గల, ఆపై గల అంశాలు కనుగొనవచ్చు.
2. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ విభాజనాలను పోల్చవచ్చు.
3. మధ్యగతం, మధ్యగతంపై ఆధారపడిన చతుర్థాంశాలు, అష్టాంశాలు మొదలైన వాటిని కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ 18 : కింది విభాజనాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని ఓజివ్ వక్రరేఖలను గీయండి.

లాభాలు (కోట్లలో)	కంపెనీల సంఖ్య
10 - 20	6
20 - 30	8
30 - 40	12
40 - 50	18
50 - 60	25
60 - 70	16
70 - 80	8
80 - 90	5
90 - 100	2

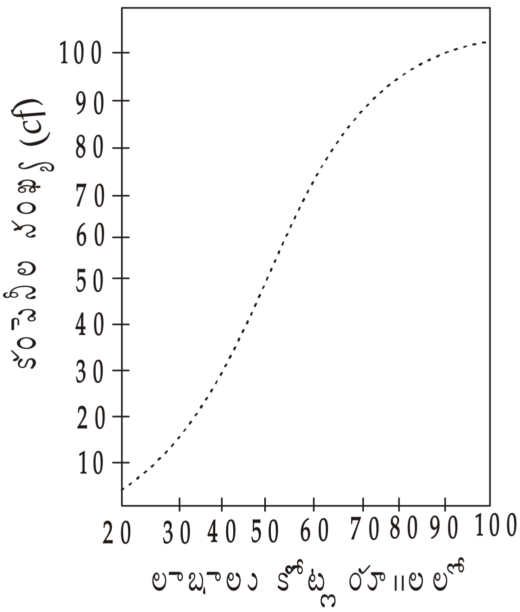
జవాబు : మొదట ఇచ్చిన విభాజనాన్ని కంటే తక్కువ, కంటే ఎక్కువ రూపంలోకి మార్చుకోవాలి.

ఎ) **కంటే తక్కువరూపం :**

లాభాలు కంటే తక్కువ (కోట్లలో)	కంపెనీల సంఖ్య(cf)
20	6
30	14
40	26

50	44
60	69
70	85
80	93
90	98
100	100

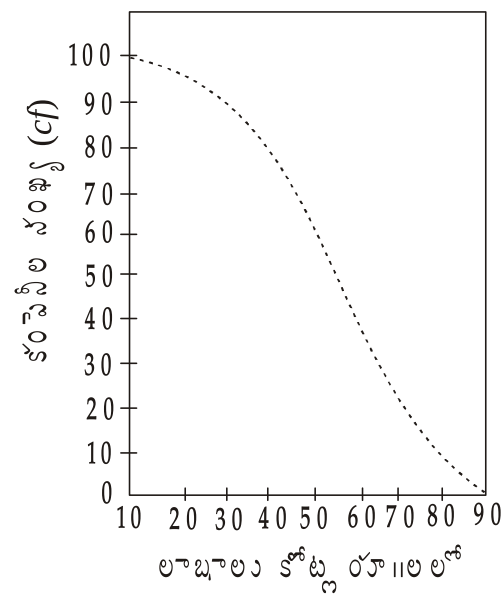
కంటే తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ



బి) కంటే ఎక్కువ రూపం :

లాభాలు కంటే ఎక్కువ (కోట్లలో)	కంపెనీల సంఖ్య
10	100
20	94
30	86
40	74
50	56
60	31
70	15
80	7
90	2

కంటే ఎక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ



ఉదాహరణ 20 : దిగువ విభాజన ప్రాతిపదికగా కింది ప్రశ్నలకు సమాధానం వ్రాయుము.

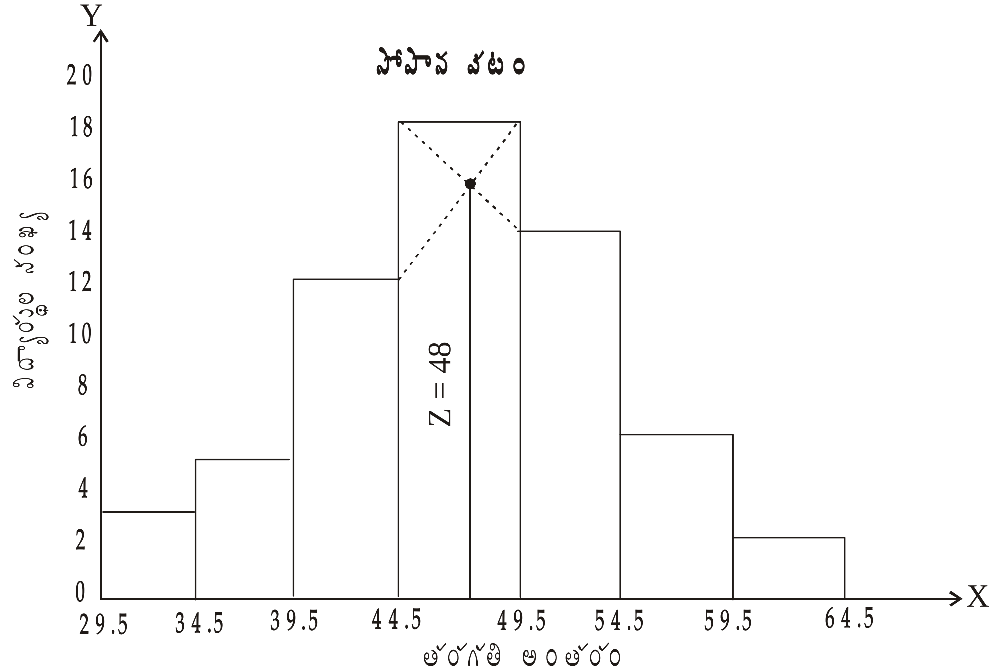
బరువు (కి.గ్రా॥లలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య
30 - 34	3
35 - 39	5
40 - 44	12
45 - 49	18
50 - 54	14
55 - 59	6
60 - 64	2

1. సోపాన పటాన్ని గీచి బాహుళకాన్ని కనుక్కోండి.
2. ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి.
3. Q_1, Q_2, Q_3 లను కనుక్కోండి.

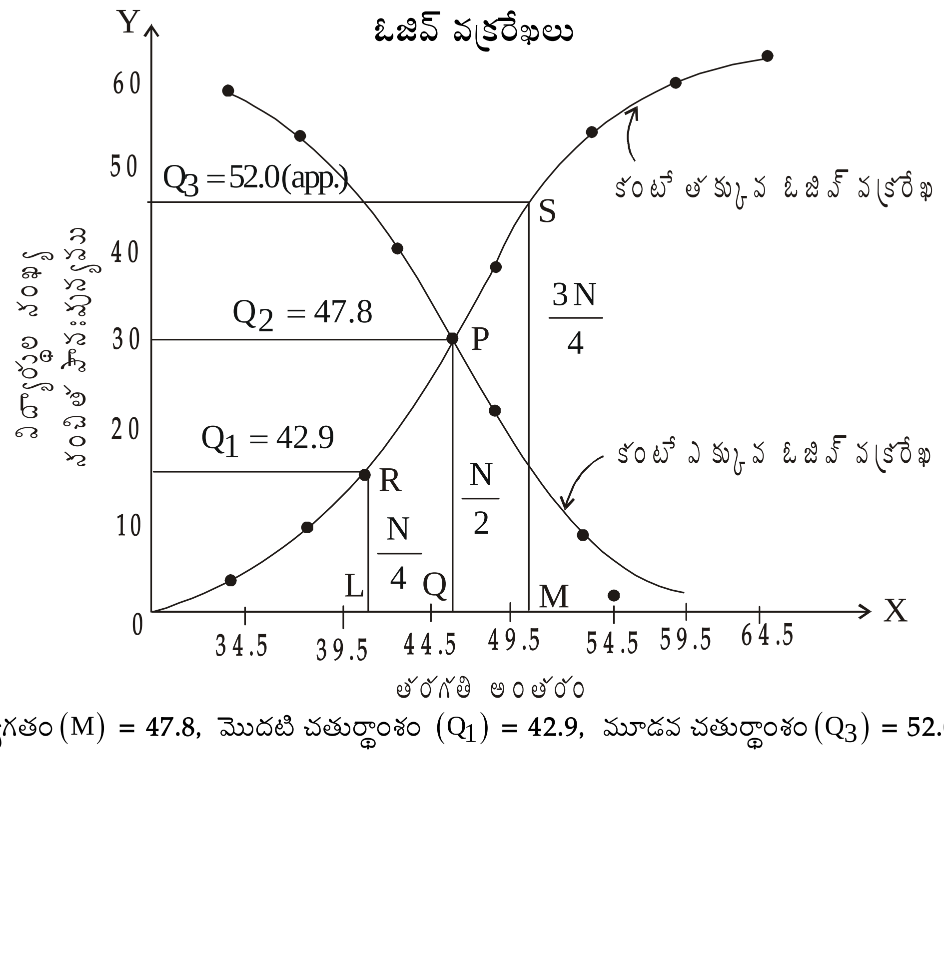
జవాబు : మొదట సమగ్రలోకి తరగతులు మార్చాలి. ఆ తరువాత కంటే తక్కువ, కంటే ఎక్కువ రూపంలోకి మార్చుకుని రేఖాపటాలను గీయాలి.

బరువు (కి.గ్రా)	విద్యార్థుల సంఖ్య	కంటే తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యం	కంటే ఎక్కువ సంచిత పౌనఃపున్యం
29.5 - 34.5	3	3	60
34.5 - 39.5	5	8	57
39.5 - 44.5	12	20	52
44.5 - 49.5	18	38	40
49.5 - 54.5	14	52	22

54.5 - 59.5	6	58	8
59.5 - 64..5	2	60	2



బాహుళకము = 48



మధ్యగతం (M) = **47.8**, మొదటి చతుర్థాంశం (Q_1) = **42.9**, మూడవ చతుర్థాంశం (Q_3) = **52.0**

6.2.3 రేఖాచిత్రపటాల పరిమితులు : దత్తాంశ సమర్పణకు రేఖాచిత్రపటాలు అతి ముఖ్యమైన సాధనాలు. అయితే అన్ని సందర్భములలో, అన్ని పరిస్థితుల్లో ఇతర సమర్పణ సాధనాలకు బదులు వీటిని ఉపయోగించటం సాధ్యం కాదు. అంటే వీటి వల్ల కొన్ని ప్రయోజనాలు ఉన్నను, కొన్ని పరిమితులు కూడా లేకపోలేదు. అంటే రేఖాచిత్ర పటాలను ఉపయోగించే వారికి, వాటి పరిమితులపై కూడా అవగాహన వుంటే వీటిని మరింత ప్రయోజనకరంగా వాడటానికి అవకాశం ఏర్పడుతుంది. వీటి ముఖ్యమైన పరిమితులు ఏమనగా :

1. రేఖా చిత్రపటాల్లో చూపే విలువలు రమారమీ (Approximate) విలువలు ఖచ్చితమైనవి కావు.
2. రేఖా చిత్ర పటాల్లో పరిమిత సమాచారాన్ని మాత్రమే చూపగలము.
3. సాధారణ ప్రజానీకానికి కొంత పరిమాణాత్మక సమాచారం తెలపటానికే ఉపయోగపడతాయి. గణాంక శాస్త్రవేత్తలు విశ్లేషించేందుకు అంతగా పనికిరావు.
4. సమాచారాన్ని తప్పుగా విశ్లేషించేందుకు రేఖా, చిత్ర పటాలకు అవకాశం వుంది.
5. ద్విపరిమాణ, త్రిపరిమాణ చిత్రాలను చూపడం, విశ్లేషించటంలో కొంత క్లిష్టత ఇమిడి వుంది. అందుచేత ఆ విధమైన చిత్రాలను ఉపయోగించడం వీలైనంతవరకు తగ్గించడం మంచిది.

6.3 సారాంశం

దత్తాంశాన్ని సమర్పించే పద్ధతుల్లో రేఖా చిత్రపటాలు ముఖ్యమైనవి. రేఖా చిత్ర పటాలు గ్రాఫ్ పేపరు మీద, ఖచ్చిత స్కేలుతో, వివిధ నియమాలు పాటిస్తూ గీయవలసి వుంటుంది. వాస్తవ ప్రపంచంలో అనేక రేఖాచిత్రాలను ఉపయోగించడం జరుగుచున్ననూ అందులో బహు తరచుగా ఉపయోగించే రేఖా పటాలను 1. కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలు, 2. పౌనఃపున్య రేఖా పటాలని చెప్పవచ్చు. కాలానుగుణంగా రూపొందించే పటాలను కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలుగా చూపడం జరుగుతుంది. కాలశ్రేణుల రేఖాపటాలను ఒక చలరాశిని చూపే పటాలని, రెండు చలరాశులను చూపే పటాలని, వ్యాప్తి రేఖాపటం, మిశ్రమ రేఖాపటం, Z రేఖాపటం అని వివిధ రకాలుగా అవసరతను బట్టి రూపొందించడం జరుగుతుంది. పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని చూపే పటాలను పౌనఃపున్య రేఖాపటాలు అంటాము. అవి సోపాన పటము, పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రరేఖ, ఓజివ్ వక్రరేఖలు. సోపాన పటం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఓజివ్ వక్రరేఖల ద్వారా మధ్యగతాన్ని, మధ్యగతంపై ఆధారపడి రూపొందించే కొలమానాలైన చతుర్థాంశాలు, అష్టాంశాలు మొదలైన వాటిని కనుగొనవచ్చు. అయితే ఈ రేఖాపటాల ఉపయోగానికి కొన్ని పరిమితులు కూడా లేకపోలేదు. రేఖాపటాలు నిర్మించుకునేటప్పుడు పరిమితులను దృష్టిలో వుంచుకోవాలి. అప్పుడే రూపొందించిన రేఖాచిత్రాలు మంచి ఫలితాలనిస్తాయి.

6.4 ముఖ్య పదాలు

1. మిథ్యా ఆధార రేఖ : Y - అక్షంపై స్కేలు '0'తో కాక మరేదైనా సంఖ్యతో ప్రారంభించేందుకు వాడే రేఖను మిథ్యా ఆధార రేఖ అంటారు. ఈ రేఖ వాడితే ప్రారంభించిన అంకె నుంచి మాత్రమే స్కేలును పరిగణించాలి.
2. వ్యాప్తి : అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల మధ్య గల వ్యత్యాసమే వ్యాప్తి.
3. మిశ్రమ రేఖా చిత్రం : ఒకే పటంలో రేఖాపటాన్ని, చిత్ర పటాన్ని చూపటాన్నే మిశ్రమ రేఖా చిత్రం అందురు.
4. **బాహుళకం :** విభాజనంలో ఏ అంశం అతి తరచుగా లభ్యమవుతుందో ఆ అంశాన్నే బాహుళకం అంటారు.
5. మధ్యగతం : విభాజనాన్ని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ విభాజనం దత్తాంశాన్ని రెండు సమభాగాలుగా చేస్తుందో దానినే మధ్యగతం అంటారు.

6.5 నమూనా ప్రశ్నలు

1. రేఖాచిత్ర నిర్మాణంలో పాటించవలసిన సూత్రాలను తెల్పండి.

2. సాధారణ స్కేలు, నిష్పత్తి స్కేలులను తారతమ్యం చేయండి.

3. రేఖాచిత్రాలలోని రకాలను పేర్కొని వాటి ఉపయోగములు, పరిమితులు వ్రాయండి.

4. సోపాన చిత్రమంటే ఏమిటీ? అది నిర్మించడం ఎట్లా? అసమాన తరగతి అంతరాలు గల దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రము గీయడం ఎట్లా?

5. ఇండియాలో ధాన్యపు ఉత్పత్తి, విస్తీర్ణము వివిధ సంవత్సరాలలో ఇచ్చినాము. ఈ దత్తాంశాన్ని చూపుతూ సరి అయిన రేఖాచిత్రము గీయండి.

సంవత్సరము	విస్తీర్ణము (మిలియన్ టన్నులలో)	ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)
1952 - 53	74.1	22.5
1953 - 54	77.3	27.8
1954 - 55	76.1	24.8

6. క్రింది దత్తాంశాన్ని రేఖాచిత్రంలో చూపండి. వివిధ సంవత్సరాలలో ఇండియాలో టోకు ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఇచ్చినారు.

సంవత్సరాలు	ఆహారపదార్థాలు	ఉత్పత్తి సరుకులు
1948	306	286
1949	383	346
1950	391	347
1951	416	354
1952	399	401

7. నిష్పత్తి స్కేలుకు సాధారణ స్కేలుకన్నా అధికంగా వుండే ప్రయోజనాలేవి? కింది దత్తాంశాన్ని సంవర్గమాన మాపక స్కేలుతో రేఖాచిత్రము గీయండి.

సంవత్సరము	విడుదల చేసిన నోట్లు (కోట్ల రూపాయలలో)	చలామణిలో వున్న నోట్లు (కోట్ల రూపాయలలో)
1933 - 34	177	167
1934 - 35	186	172
1935 - 36	196	167
1936 - 37	208	193
1937 - 38	214	185

1938 - 39	207	187
1939 - 40	252	237
1940 - 41	269	258
1941 - 42	421	410
1942 - 43	650	625

8. మొదటి తరగతి రైల్వేలు పనిచేసిన ఫలితాలు రేఖాచిత్రంలో చూపి వ్యాఖ్యానించండి.

సంవత్సరము	పెట్టుబడి	స్థూలరాబడి
1923 - 24	464	70
1924 - 25	473	74
1925 - 26	487	73
1926 - 27	505	72
1927 - 28	594	86
1928 - 29	599	86
1929 - 30	617	84
1930 - 31	627	77
1931 - 32	631	71

9. కింది దత్తాంశానికి సోపాన చిత్రము గీయండి.

వారపు వేతనాలు (రూ॥లు.)	కార్మికుల సంఖ్య
10 - 15	7
15 - 20	19
20 - 25	27
25 - 30	15
30 - 40	12
40 - 50	12
60 - 80	8

10. ఒక కంపెనీలో గంటకు వేతనాలు, కార్మికుల సంఖ్య ఇచ్చినారు. గ్రాఫ్ కాగితంపై సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి గీయండి.

గంటకు వేతనాలు సెంట్లలో (x)	కార్మికుల సంఖ్య (f)
0 - 10	18
10 - 20	196
20 - 30	438
30 - 40	844

40 - 50	744
50 - 60	440
60 - 70	177
70 - 80	52
80 - 90	17
90 - 100	3
100 - 110	1

11. వివిధ కంపెనీల మూలధనం లక్షల రూపాయలలో ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశాన్ని చూపే సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి గీయండి.

వ్యాప్తి (లక్షల రూపాయలలో)	కంపెనీల సంఖ్య
0 - 10	10
10 - 20	12
20 - 30	10
30 - 50	14
50 - 80	7
80 - 100	8
100 పైగా	5

12. క్రింది దత్తాంశంతో సోపాన చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజి, సరస పౌనఃపున్య వక్రము ఓజివ్ రేఖలు సంచిత పౌనః పున్య వక్రరేఖా చిత్రాలు గీయండి.

మార్కులు	పౌనఃపున్యము
0 - 10	4
10 - 20	10
20 - 30	16
30 - 40	22
40 - 50	20
50 - 60	18
60 - 70	8
70 - 80	2

13. బ్యాంక్ ఆఫ్ ఇంగ్లాండ్ బంగారం అమ్మకాలు (విదేశీయ ఖాతాలలో అమ్మినది) ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశాన్ని సంవర్గమాన మాపక స్కేలులో రేఖాచిత్రంలో చూపండి.

సంవత్సరము	పౌనులు (000)
1910	14,448
1911	8,228

1912	9,670
1913	7,943
1914	8,027
1915	43,076
1916	2,360

14. కింది దత్తాంశములో మూడు పట్టణాల సూచీ సంఖ్యలిచ్చినారు (1939 = 100). రేఖా చిత్రము గీయండి.

సంవత్సరము	కాన్పూర్	నాగపూర్	కలకత్తా
1944	314	267	279
1945	308	259	283
1946	328	285	275
1947	378	320	309
1948	471	372	339
1949	478	377	348
1950	434	372	349
1951	451	391	370
1952	441	389	351
1953	453	387	349

15. కింది దత్తాంశంలో క్యూబా, జావా, ఇండియాల పంచదార ఉత్పత్తి (1930-39లలో మిలియన్ల క్వింటాళ్ళలో) ఇచ్చినారు. ఈ దత్తాంశాన్ని చూపే సరిఅయిన రేఖా చిత్రము గీసి ఆయా దేశాల బాంధవ్యాన్ని వ్యాఖ్యానించండి.

సంవత్సరము	క్యూబా	జావా	ఇండియా
1929 - 30	44	29	17
1930 - 31	30	28	20
1931 - 32	25	26	24
1932 - 33	19	14	28
1933 - 34	22	6	30
1934 - 35	25	5	31
1936 - 37	29	14	40
1937 - 38	29	14	32
1938 - 39	26	15	27

16. కింది పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని రేఖాచిత్రంలో చూపండి. సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ కూడా గీయండి.

తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యము	తరగతి అంతరాలు	పౌనఃపున్యము
0 - 5	13	30 - 35	250
5 - 10	42	35 - 40	237
10 - 15	135	40 - 45	135

15 - 20	237	45 - 50	42
20 - 25	250	50 - 55	13
25 - 30	256		

17. కింది దత్తాంశంలో ఇండియాలో కాగితపు ఉత్పత్తి వేల టన్నులలో ఇచ్చినారు. Z రేఖాచిత్రాన్ని గీయండి.

నెలలు	1949	1950	1951
జనవరి	8.1	8.3	10.0
ఫిబ్రవరి	7.7	8.5	9.9
మార్చి	8.7	9.1	11.0
ఏప్రిల్	9.1	8.7	10.5
మే	9.0	9.5	11.2
జూన్	9.1	8.7	10.5
జూలై	9.1	9.3	10.9
ఆగస్ట్	9.0	9.4	10.1
సెప్టెంబరు	9.0	9.4	11.3
అక్టోబరు	8.4	9.0	11.4
నవంబరు	8.2	9.3	11.4
డిసెంబరు	8.9	9.7	12.1

18. కింది విభాజనానికి సోపాన పటాన్ని గీయండి.

ఆదాయం (Rs.)	వ్యక్తుల సంఖ్య	ఆదాయం (Rs.)	వ్యక్తుల సంఖ్య
100 - 149	21	300 - 349	112
150 - 199	32	350 - 399	50
200 - 249	52	400 - 449	42
250 - 299	105	450 - 499	16

19. కింది విభజనానికి సోపాన పటం, పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రరేఖ గీయండి.

వేతనాలు (రూ॥లలో)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40
కార్మికుల సంఖ్య	2	4	11	15
వేతనాలు (రూ॥లలో)	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
కార్మికుల సంఖ్య		18	15	4

20(ఎ). ఓజివ్ వక్రరేఖలు గీచి మధ్యగతం కనుక్కోండి.

వారపు వేతనాలు(రూ॥లలో)	పౌనఃపున్యము	వారపు వేతనాలు	పౌనఃపున్యము
12.5 - 17.5	2	37.5 - 42.5	12
17.5 - 22.5	22	42.5 - 47.5	10

22.5 - 27.5	10	47.5 - 52.5	9
27.5 - 32.5	14	52.5 - 57.5	8
32.5 - 37.5	23		
		మొత్తం	110

(బి). సోపాన పటం గీచి బాహుళకం కనుక్కోండి.

మార్కులు	విద్యార్థులు	మార్కులు	విద్యార్థులు
20 - 29	7	60 - 69	9
30 - 39	11	70 - 79	14
40 - 49	24	80 - 89	2
50 - 59	32	90 - 99	1

6.6 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. B.N. Elhance : Fundamentals of Statistics
2. S.P. Gupta : Statistical Methods
3. C.B. Gupta : An Introduction to Statistical Methods
4. S.C. Gupta : Fundamentals of Statistics.
5. M.C. Shukla and S.S. Gulshan : Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 7

కేంద్ర స్థానపు కొలతలు

పాఠ్యంశ నిర్మాణక్రమం

7.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు క్రింది కొలమానాలను గురించి తెలుసుకొని, గణన చేయగలరు.

* కేంద్రస్థానపు కొలతలు అనగా ఏమి ? ఎన్ని రకాలు.
* అంకమధ్యమం గణన, గుణదోషాలు, ప్రయోజనాలు
* ఉమ్మడి అంకమధ్యమం, భారిత అంకమధ్య గణన
* మధ్యగతం గణన, గుణ దోషాలు, ప్రయోజనాలు
* బాహుళకం గణన, గుణ దోషాలు, ప్రయోజనాలు
* గుణ మధ్యమం గణన, గుణదోషాలు, ప్రయోజనాలు
* హర మధ్యమం గణన, గుణదోషాలు, ప్రయోజనాలు

7.1 విషయపరిచయం

గణాంక విచారణ ఐదు దశల్లో జరుగుతుంది. అవి వరుసగా యోజన, దత్తాంశ సేకరణ, ఎడిటింగ్ మరియు దోషరహితంగా దత్తాంశాన్ని రూపొందించటం, సమర్పణ, విశ్లేషణ మరియు విపులీకరణ. మొదటి నాలుగు దశలలో దత్తాంశ సేకరణ, సమర్పణ వరకు పూర్తవుతుంది. అయితే దత్తాంశాన్ని పట్టికలు, రేఖా చిత్రపటాల ద్వారా సమర్పణ చేసినను వాటి ద్వారా ఒక నిర్ణయం తీసుకోవటం కష్టము. అందుచేతనే దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించి విపులీకరించేందుకు వివిధ విశ్లేషణ మానాలను రూపొందించటం జరిగింది. ఈ విశ్లేషణ మానాలు దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం యిచ్చే ఏక సంఖ్యను ఇవ్వటం జరుగుతుంది. ఈ సంఖ్యను బట్టి దత్తాంశాన్ని గురించి అంచనా వేయడం మరియు సంబంధించిన నిర్ణయాలను తీసికోవటం జరుగుతుంది.

దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించేందుకు రూపొందించిన విశ్లేషణ మానాలు వివిధ రకాలు. అవి : (1) కేంద్రస్థానపు కొలతలు లేదా కేంద్రస్థానపు సగటులు. (2) విస్తరణ మానాలు (3) అసౌష్టవ కొలమానాలు (4) శిఖరత్వ కొలమానాలు మొదలైనవి. ఈ వివిధ విశ్లేషణ మానాలు దత్తాంశ లక్షణాన్ని వివరిస్తాయి. ఈ లక్షణాలపై ఆధారపడి దత్తాంశ స్వభావాన్ని తెలుసుకొని, తగు నిర్ణయాలను తీసుకోవచ్చు. పైన తెల్పిన విశ్లేషణ కొలమానాలలో కేంద్రస్థానపు కొలతలు లేదా కేంద్రస్థానపు సగటులను గూర్చి ఈ పాఠంలో తెలుసుకుందాం.

7.2 కేంద్ర స్థానపు కొలతలు లేదా సగటులు

సుదీర్ఘమైన శ్రేణులను అవగాహన చేసుకోవడానికి, దత్తాంశాన్ని పౌనఃపున్య విభాజనముగా సంక్షిప్త పరచడం మొదటి (దశ) మెట్టు మాత్రమే. పెద్ద సంఖ్యలో వున్న అంకెలను, దత్తాంశాన్ని జ్ఞాపకం ఉంచుకోవడానికి లేదా ఫలితాలను వెలిబ్బుటానికి అవకాశం తక్కువ. అందుచేత అధిక సంఖ్యలో వున్న దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక సంఖ్య కోసం ప్రయత్నాలు జరిగాయి. ఫలితంగా కేంద్రస్థానపు కొలతలు, విస్తరణ మానాలు మొదలైనవి రూపొందించబడ్డాయి. కేంద్రస్థానపు కొలతలనే సగటులు అని లేదా ప్రథమ శ్రేణి సగటులు అంటారు. గణాంక శాస్త్రవేత్తలలో మేటియైన ఇర్వింగ్ ఫిషర్ చెప్పినట్లు "ఎక్కువ దత్తాంశాన్ని స్వీకరించలేనటువంటి మానవ మేధస్సు తాలూకు నిస్సహాయత, తక్కువ స్థిరాంకాలలో దత్తాంశాన్ని విపులంగా వర్ణించగల పద్ధతి కనుగొనుటకు ప్రోత్సహించినది". ముడి దత్తాంశము (Relative data) సంపూర్ణ వర్ణనకు ఒకే ఒక్క విలువ (One single value)లో సంక్షిప్తీకరించడమే గణాంక విశ్లేషణ మౌలిక ఉద్దేశమై వుంది. ఉదాహరణకు, ఒక కంపెనీలో పనిచేసే 80 మంది పనివారి వేతనాలనిచ్చి, ఇంకొక కంపెనీలోని మరొక 80 మంది పనివారల వేతనాలనిచ్చి, రెండు కంపెనీల పనివారల వేతనాలను ప్రత్యక్షంగా సరిపోల్చి (Compare) చెప్పమంటే ఒక నిర్ణయానికి రావడం అసాధ్యమగును. అట్లాగాక ఒక్కొక్క కంపెనీ శ్రేణులకు ప్రాతినిధ్యము వహించే సంఖ్యను తీసుకొంటే సరిపోల్చడం చాలా సులభమవుతుంది. అటువంటి ప్రాతినిధ్యము వహించే విలువనే 'సరాసరి' లేక 'సగటు' అందురు. సగటు విలువ చుట్టూ చలనాలలోని మధ్య స్థానానికి ప్రాతినిధ్యం వహించడం లేదా గుమిగూడి (కేంద్రీకరించి) వుండడం వల్ల వీటిని కేంద్రస్థానపు కొలతయని వ్యవహరింతురు. దత్తాంశాన్ని తగినంతగా, సక్రమంగా వివరించే ఏక విలువ లేక ఏక సంఖ్యగా సగటు ఉపయోగపడును. దత్తాంశములోని చలనాలు ఏ ప్రమాణంలో వుంటే కేంద్రస్థానపు సగటు కూడా అదే పరిమాణములో వుండును. అంటే చలనాలు 'ఎత్తు'కు సంబంధించినవైతే సగటు కూడా ఎత్తు అవుతుంది. చలనాలు విద్యార్థుల మార్కుల గురించి అయితే సగటు కూడా మార్కులవుతాయి. అట్లాగే చలనాలు శాతాలయితే సగటు కూడా శాతమవుతుంది.

7.2.1 కేంద్ర స్థానపు సగటుల ఉద్దేశాలు (Objectives of Central Tendency)

1. సగటుల వలన పెద్ద పరిమాణంలో వున్న దత్తాంశాన్ని సులువుగా అవగాహన చేసుకొనుటకు వీలు పడును. సగటులు ఎక్కువ మొత్తంలో వున్న పరిమాణాత్మక సమాచారాన్ని స్పష్టంగా, క్లుప్తంగా వివరిస్తాయి.
2. సగటు దత్తాంశమును కుదించి (సంక్షిప్త పరచి) చెప్పడానికి చాలా ఉపయోగపడుతుంది.
3. సగటుల వల్ల సరిపోల్చే పద్ధతి సులభమగును.
4. వివిధ శ్రేణుల లేదా తరగతుల అంక గణిత సంబంధాలను కనుక్కోవడానికి యిది చాలా ఉపయోగపడును.

7.2.2 సగటుకుండవలసిన లక్షణాలు

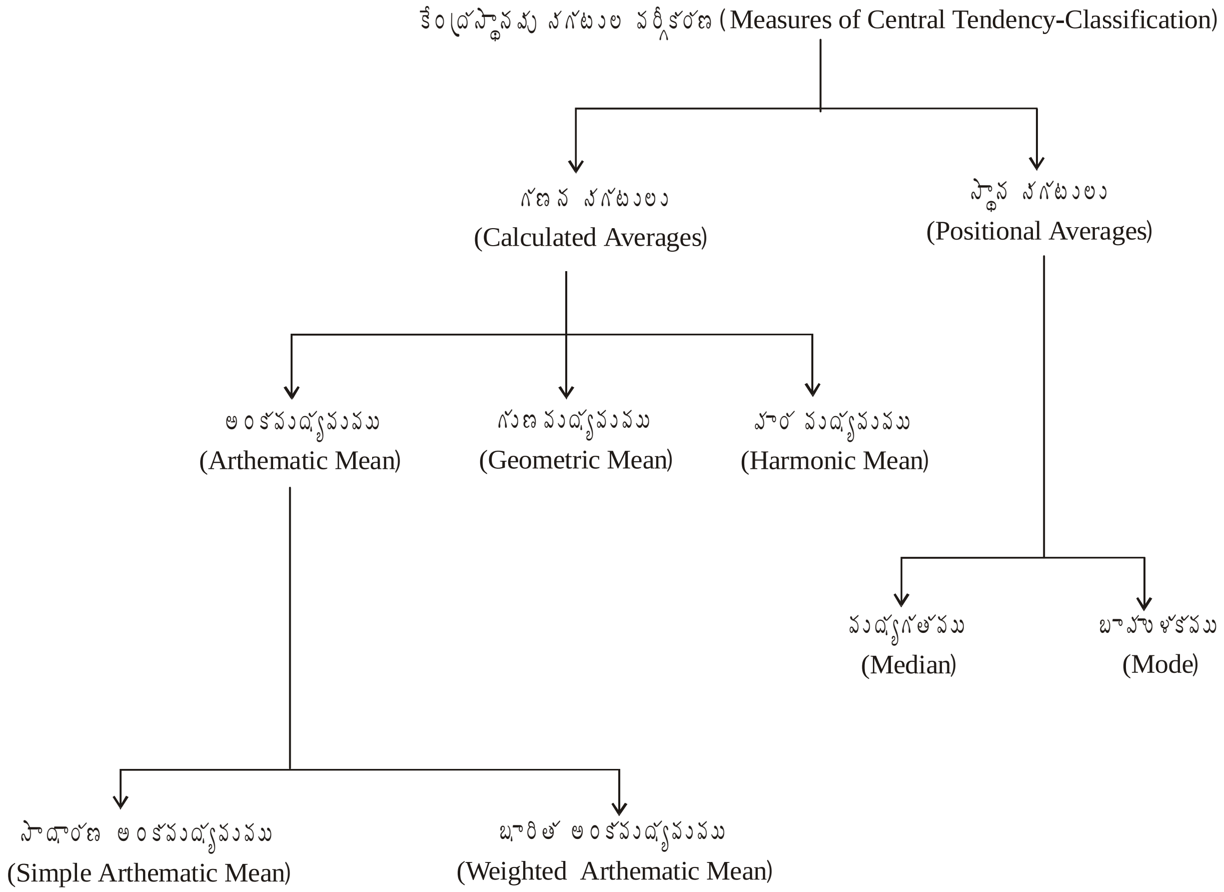
1. సగటును నిర్దుష్టంగా, స్పష్టంగా, ఒకే అర్థము వచ్చే విధంగా చెప్పవలె. సగటు ఎల్లప్పుడూ ఖచ్చితమైన సంఖ్యయై యుండవలె.
2. సమగ్ర పరిశీలనకు (అన్ని అంశాలకు) సగటు ప్రతినిధిగా యుండవలె. అంటే అన్ని అంశాలపై ఆధారపడి గణన చేయగలిగి ఉండాలి. దీనినే మొత్తం విభాజనానికి ప్రాతినిధ్యము వహించే లక్షణము అంటారు.
3. సగటు చాలా సులభంగా అర్థం చేసుకొనేదిగా యుండవలె. అందుకు అవసరమైన అన్ని కచ్చితమైన, సహజ లక్షణాలున్నదై యుండవలె.

4. సగటు సులువుగా గణన చేయగలిగినదై యుండవలె. సౌలభ్యానికి ప్రాధాన్యత కల్పించినప్పటికీ యదార్థత వగైరాలను అలక్ష్యం చేయరాదు.

5. ప్రతిచయన మార్పులకు అతి స్వల్పంగా ప్రభావితము కావలె. ఒకే దత్తాంశము నుండి వేరు వేరు ప్రతిచయనాలు తీసినప్పుడు వాటి సగటులు ఒకే రకంగా వుండును. అటువంటి తేడానే సాంకేతికంగా 'ప్రతిచయన మార్పులు' అంటారు. అటువంటి మార్పులున్న రెండింటిలో స్వల్ప తేడా చూపినది మంచిదిగా గుర్తింపవచ్చును.

6. బీజీయ ప్రస్తావనకు (గణనకు) సమర్థత గలిగినదై వుండవలె. రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణుల సగటులను, వాటి సంఖ్యలను గూడా యిచ్చినపుడు భవిష్యత్తులో ఉమ్మడి శ్రేణుల సగటును చెప్పగలిగినదై యుండవలెను.

7. దత్తాంశములోని అతిపెద్ద, లేదా అతి చిన్న విలువల వల్ల సగటు మార్పు చెందకూడదు.



7.3 అంక మధ్యమము (Arithmetic Mean)

కేంద్రస్థాన కొలతల్లో అత్యంత ప్రధానమైనది అంకమధ్యమము. మనదైనందిన జీవితంలో అతితరచుగా వాడే 'సగటు' లేదా 'సరాసరి'నే గణాంక శాస్త్ర పరిభాషలో (Statistical terminatory) అంకమధ్యమం అంటారు. ఇది అత్యధికంగా ఉపయోగపడి ప్రాముఖ్యాన్ని వహించినది. దీనిని మధ్యమము (Mean) అని కూడా పిలుస్తారు. శ్రేణిలోని అన్ని అంశాల విలువలను కూడి, ఆ

విధంగా కూడగా వచ్చిన మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగించగా వచ్చిన భాగఫలమే అంకమధ్యమం. (Arithmetic Mean is obtained by adding the value of items and dividing the total by the number of items).

స్మిత్, కాఫ్కా (Smith and Kafka) అనే వారు అంకమధ్యమాన్ని ఈ విధంగా నిర్వచించారు. "శ్రేణిలో వున్న అంశాల మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చే వ్యుత్పన్నమే అంకమధ్యమము" (The arithmetic mean is the quotient that results when the sum of the items in the series is divided by the number of items).

అంకమధ్యమము గణన సగటు అంక మధ్యమము రెండు రకాలుగా చెప్పవచ్చు.

1. సామాన్య అంకమధ్యమము (Simple Arithmetic Mean)

2. భారిత అంకమధ్యమము (Weighted Arithmetic Mean)

అన్ని అంశాలు ఒకే ప్రాధాన్యత కలిగినట్లయితే సామాన్య అంకమధ్యమం కనుగొంటాము. అంశాల ప్రాధాన్యతలు భిన్నంగా వుంటే భారిత అంకమధ్యమం కనుగొంటాము. సాధారణంగా అంకమధ్యమం అనే పదాన్ని ఉపయోగిస్తే అది సామాన్య అంకమధ్యమమనే గుర్తించాలి. ప్రస్తుతం సామాన్య అంకమధ్యమాన్ని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

పరిమాణాత్మక దత్తాంశాన్ని లేదా అంకెలలో సమాచారాన్ని మూడు రకాలుగా చెప్పవచ్చునని గత పాఠంలో చెప్పటం జరిగింది. మరో విధంగా చెప్పాలంటే శ్రేణీకరణను ఒకే విధంగా మూడు రకాలుగా చెప్పవచ్చు. అవి : 1. వ్యక్తిగత శ్రేణులు (Individual series), 2. విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Discrete Series), 3. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Continuous Series).

ఈ వివిధ శ్రేణులలో అంకమధ్యమాన్ని ఏ విధంగా గణన చేసేది ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం.

7.3.1 వ్యక్తిగత శ్రేణులు - అంకమధ్యమము - ప్రత్యక్ష పద్ధతి :

దత్తాంశములోని వ్యక్తిగత చలనాలు 6, 11, 16 అయినప్పుడు వాటి అంకమధ్యమము $\frac{6+11+16}{3}=\frac{33}{3}=11$ కు సమానమవుతుంది. వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో అంకమధ్యమాన్ని సాంకేతికంగా చూపవలసి వస్తే - $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అనే N సంఖ్యలు ఉంటే వాటి అంకమధ్యమము

$$\text{అంకమధ్యమము} = \frac{\text{చలనాల సంకలనము (Sum of variables)}}{\text{చలనాల సంఖ్య (No. of the variables)}} \text{ లేదా}$$

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{x_n}$$

అంకమధ్యమానికి సాంకేతికము $\overline{x}$ (x-బార్ అని చదువవలె).

పై దానిని మరింత క్లుప్తంగా చెప్పాలంటే

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{N} \text{ అవుతుంది.}$$

దీనిలో $\overline{x}$ = అంకమధ్యమము (Arithmetic Mean), Σ = సంకలన గుర్తు, Σx = చలనముల లేదా అంశాల మొత్తం, N = చలనాల సంఖ్య (Number of variables)

శ్రేణులలోని అంశాలన్నీ సమానంగా వుంటే వాటి అంకమధ్యమము కూడా సమానమే అవుతుంది. మొత్తం విభాజనములో వున్న ప్రతి ఒక్క చలనానికి బదులు సగటు చేర్చి చూచినపుడు పంపిణీ మొత్తంలో మార్పు రాదు. అందువల్ల సగటును కేంద్ర స్థానముగా గుర్తింపవచ్చు. అనగా 5, 7, 9, 15 చలనాలయినప్పుడు సగటు

$$\overline{x} = \frac{5+7+9+15}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

విభాజనములో వున్న ప్రతి యొక్క చలనానికి బదులు 'సగటు' అంటే 9 చేర్చి చూసినప్పుడు 9+9+9+9=36 అవుతుంది. అంటే విభాజనములో మార్పు లేదు. సాంకేతికముగా $\Sigma \overline{x} = xN$. అందువలన సగటును ప్రతి ఒక్క వ్యక్తికి (per individual) ప్రతి ఒక్క వస్తువుకు ప్రతినిధిగా ఊహించవచ్చు. తలసరి (per capita) సంఖ్య వాస్తవానికి సగటులే.

ఉదాహరణ 1 : క్రికెట్ ఆటలో పాల్గొన్న భారతదేశపు జట్టులోని ఆటగాళ్ళ వయస్సులు 27, 24, 29, 25, 26, 23, 34, 12, 19, 30, 32 సంవత్సరాలయితే, వారి సగటు వయస్సెంత ?

జవాబు : అంకమధ్యపు గణన - ప్రత్యక్ష పద్ధతి.

క్రమసంఖ్య	వయస్సు (సంవత్సరాలలో)(x)
1	27
2	24
3	29
4	25
5	26
6	23
7	34
8	28
9	19
10	30
11	32
-----------	--------------
N = 11	Σx = 267

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లోఅంకమధ్యమము

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{N}$$

ఇక్కడ Σx = చలనాల సంకలనము = 267, N = చలనాల సంఖ్య = 11

$$\therefore \bar{x} = \frac{297}{11} = 27$$

$\therefore$ క్రికెట్ ఆటగాని సగటు వయస్సు = 27 సంవత్సరాలు.

అంకమధ్యపు గణన - విచలనాల పద్ధతి (Deviation Method) : శ్రేణిలో తక్కువ అంశాలున్నప్పుడు ప్రత్యక్ష పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు. కాని ఎక్కువ అంశాలున్నప్పుడు దానిని ఉపయోగించి అంకమధ్యమము కనుగొనడం కష్టము. అటువంటి పరిస్థితులలో దగ్గర పద్ధతి చాలా ఉపయోగకరము. "అంకమధ్యమంను వ్యక్తిగత శ్రేణుల విచనాల బీజీయ సంకలనము సున్నాకు సమానమవుతుంది". అనే ముఖ్య ధర్మము ఆధారంగా సులభ పద్ధతి వ్యాప్తిలోనికి వచ్చినది. ఉదాహరణకు 9, 6, 12, 13 సంఖ్యల అంకమధ్యమము 10, అయితే ఒక్కొక్క చలనము యొక్క విచలనము అంకమధ్యమము నుండి చూస్తే

9 - 10 = -1, 6 - 10 = - 4, 12 - 10 = 2, 13 - 10 = 3

విచలనాలమొత్తాన్ని (-1 + -4 + 2 + 3 = 0) బీజియంగా చూస్తే సున్నాకు సమానము. అనగా వాస్తవ అంకమధ్యమము నుండి తీసుకొన్న విచలనాల మొత్తం సున్నాకు సమానము. కాని మనము తీసుకొన్న (ఊహించిన) అంకమధ్యమము నుండి వచ్చిన విచలనాల మొత్తము సున్నాకు సమానము కాదు కనుక మనము ఊహించిన అంకమధ్యమము నిజమైన అంకమధ్యమము కాదని రూఢియగును. ఒకవేళ సున్నా అయితే ఊహించినదే నిజ అంకమధ్యమము.

దగ్గర పద్ధతిలో మొదట మనం ఒక అంశాన్ని ఊహించిన అంకమధ్యమంగా భావించాలి. ఆ ఊహించిన అంకమధ్యమము నుండి వచ్చిన విచలనాల సంకలనాన్ని, మొత్తం అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే, ఒక్కొక్క అంశానికి, ఊహించి అంకమధ్యమానికి గల సగటు తేడా తెలుస్తుంది. అటువంటి తేడాను ఊహించిన అంకమధ్యమానికి కలిపితే నిజమైన అంకమధ్యమం వస్తుంది.

విభాజనంలోని అంశాలు $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_4$ లు N ఆనుకొని A ఊహించిన అంకమధ్యమము అనుకొందాము. అట్లా అయినప్పుడు $\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$

ఇక్కడ $\Sigma dx = (x_1 - A) + (x_2 - A) + (x_3 - A) \cdots\cdots\cdots (x_n - A)$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma dx}{N}$$

ఊహించిన సగటుకు నిజమైన సగటుకు వున్న తేడ, మొత్తము తేడాను 'N' సంఖ్యతో భాగిస్తే వస్తుందని అర్థమవుతుంది.

ఇక్కడ $\bar{x}$ = నిజమైన అంకమధ్యమము, A = ఊహించిన అంకమధ్యమము

Σdx = ఊహించిన అంకమధ్యమము నుండి వచ్చిన విచలనాల మొత్తము, N = విచలనాల సంఖ్య

ఉదాహరణ 2 : ఒకటో ఉదాహరణలోని దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్య గణన.

జవాబు :

క్రమసంఖ్య	వయస్సు(x)	A = 25 $x - A = dx$
1	27	27 - 25 = +2

2	24	24 - 25 = - 1
3	29	29 - 25 = + 4
4	25	25 - 25 = 0
5	26	26 - 25 = +1
6	23	23 - 25 = - 2
7	34	34 - 25 = + 9
8	28	28 - 25 = + 3
9	19	19 - 25 = - 6
10	30	30 - 25 = + 5
11	32	32 - 25 = + 7
---------		----------------------
N = 11		$\left.\begin{array}{r}\Sigma dx = +31 \\ -\ 9\end{array}\right\} = +22$

ఊహించిన సగటు 25గా తీసుకున్నాము. $\bar{x} = A + \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)$

అక్కడ $\bar{x}$ = అంకమధ్యమము, A = ఊహించిన అంకమధ్యమము

N = చలనాల సంఖ్య, Σdx = ఊహించిన సగటు నుండి వచ్చిన విచలనాల సంకలనము.

పై విలువలను సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించినపుడు

$$\bar{x} = 25 + \left(\frac{22}{11}\right) = 25 + 2 = 27$$

కాబట్టి క్రికెట్ ఆటగాని సగటు వయస్సు 27 సంవత్సరములు. ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో గణన చేసినప్పుడు అంకమధ్యమము దగ్గర పద్ధతిలో గణన చేసినప్పుడు అంకమధ్యమము సమానంగా వున్నాయి.

అంకమధ్యమము - వ్యక్తిగత శ్రేణులు - సోపాన విచలనాల పద్ధతి (Arithmetic Mean - Individual Series Step Derivation Method) : పరిమాణాత్మక దత్తాంశము యొక్క విచలనాలకు సాధారణ లక్షణం (common factor) ఉన్నప్పుడు, విచలనాల సాధారణ లక్షణం తీసుకొని (common factor of the derivation) విచలనాలను భాగిస్తే సోపాన విచలనాలు వస్తాయి. ఈ పద్ధతి వల్ల అంకమధ్యమాన్ని మరింత సులువుగా కనుగొనవచ్చు. ఈ విధానములో అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడానికి యిచ్చిన విలువల నుండి, ఒక చలనం ఊహించిన సగటుగా (A) తీసుకొని, ప్రతి విలువ నుండి ఊహించిన సగటును తీసివేత ($x - A = dx$) విచలనాలను కనుగొనవలెను. విచలనాలను (dx) సాధారణ కారణాంకము (common factor)తో భాగించాలి. ఈ సాధారణ కారణాంకాన్ని c (common factor) గా భావిద్దాము.

విచలనాలను భాగించగా వచ్చే విలువలను $\left(\frac{dx}{c}\right)$ సోపాన విచలనాలుగా Dx గుర్తించవచ్చును. సోపాన విచలనాలను కూడగా వచ్చినది ΣDx అంటారు. చలనాల సంఖ్య = N, పై విధంగా చేసిన తరువాత క్రింది సూత్ర సహాయంతో అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవచ్చు.

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma Dx}{N} \times c$$

$\bar{x} =$ అంకమధ్యమము

$A =$ ఊహించిన సగటు

$\Sigma Dx =$ విచలనాలను, విచలనాల సాధారణ లక్షణం (c)తో భాగించగా వచ్చిన సోపాల మొత్తం

$c =$ విచలనాల సాధారణ లక్షణం (common factor)

$N =$ చలనాల సంఖ్య (Σf)

ఉదాహరణ 3 : ఐదుగురు వ్యక్తుల ఆదాయాలు క్రింది విధంగా వున్నాయి. వారి సగటు ఆదాయమెంత?

వ్యక్తులు	1	2	3	4	5
ఆదాయాలు (రూ॥లలో)	200	400	600	800	1000

వ్యక్తులు	ఆదాయాలు(x) రూ॥లలో	ఊహించిన సగటు ($A = 400$) నుండి విచలనాలు $x - A = dx$	$\frac{dx}{c} = Dx$ విచలనాలను సాధారణ లక్షణం (200)తో భాగించగా వచ్చిన సోపానాలు
1	200	200 - 400 = - 200	$-\frac{200}{200} = -1$
2	400	200 200 = 0	$\frac{0}{200} = 0$
3	600	600 - 400 = + 200	$\frac{200}{200} = +1$
4	800	800 - 400 = + 400	$\frac{400}{200} = +2$
5	1000	1000 - 400 = + 600	$\frac{600}{200} = \frac{+3}{5}$
$N = 5$			$\Sigma Dx = +5$

$A =$ ఊహించిన సగటు = 400,

$\Sigma Dx =$ విచలనాలను, సాధారణ లక్షణం (c)తో భాగించగా వచ్చిన సోపానాల మొత్తం = + 5

$c =$ విచలనాల సాధారణ లక్షణం = 200

$N =$ చలనాల సంఖ్య = 5

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma Dx}{N} \times c$$

$$= 400 + \frac{5}{5} \times 200$$

$$= 400 + 200 = 600$$

అందువలన వారి సగటు ఆదాయము $(\overline{x})$ = రూ. 600/-

7.3.2 అంకమధ్యం - విచ్ఛిన్న శ్రేణులు

ప్రత్యక్ష పద్ధతి : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వున్న చలరాశుల విలువలను, వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యము (frequency) చేత గుణిస్తే, వచ్చిన లబ్దాల (products) సంకలనాన్ని, మొత్తం పౌనఃపున్యముతో భాగిస్తే అంకమధ్యమం వస్తుంది. బీజీయంగా దానిని యిట్లా చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు అంశాలు $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ అనే అంశాల విలువలను, వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యాలు $f_1, f_2, f_3, \cdots\cdot, f_n$ లనుకొంటే అంకమధ్యమము $(\overline{x}) = \dfrac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 + \cdots\cdots + x_n f_n}{N}$

$$= \frac{\Sigma fx}{N}$$

$\Sigma fx =$ చలనాలను వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యాలలో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం, N = మొత్తం పౌనఃపున్యము (Σf)

ఉదాహరణ 4 : ఈ దిగువ యిచ్చిన పట్టీలో ఒక కర్మాగారంలో పని చేసే 100 మంది పనివారాల జీతాలున్నాయి. వారి జీతాల అంకమధ్యమమును గణన చేయండి.

జీతాలు (రూ॥లలో)	40	60	80	100	120	140	160	180	200
పని వారి సంఖ్య	5	7	10	15	20	25	9	6	3

జవాబు :

జీతము (x) రూపాయలలో	పనివారి సంఖ్య (f)	fx
40	5	200
60	7	420

80	10	800
100	15	1500
120	20	2400
140	25	3500
160	9	1440
180	6	1070
200	3	600
	------	-------------
	$N = 100$	$\Sigma fx = 11,940$

$\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$, పై విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$\overline{x} = \frac{11,940}{100} = 119.4$$

కాబట్టి పనివాని సగటు జీతము = రూ. 119.40 పైసలు

అంకమధ్యమము - విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - దగ్గరి పద్ధతి (Arithmetic Mean - Discrete Series - Short Cut Method) : అంకమధ్యమాన్ని విచలన పద్ధతి ద్వారా చేయవచ్చు. ఇవ్వబడిన శ్రేణిలోని ఏదేని ఒక చలనపు విలువకు ఊహించిన అంకమధ్యమముగా (A) తీసుకోవాలి. ఊహించిన అంకమధ్యమానికి, ప్రతిచలనానికి మధ్య గల తేడా విచలనము ($x - A = dx$) కనుగొనాలి. విచలనాలను (dx) అనుబంధ పౌనఃపున్యాల (f)తో గుణించి ($f \times dx = fdx$) గుణలబ్దాల సంకలనము (Σfdx) కనుగొనాలి.

ఈ లబ్దాల సంకలనాన్ని (Σfdx) మొత్తం పౌనఃపున్యంతో (N) భాగించి, భాగఫలమునకు ఊహించిన అంకమధ్యమానికి కలిపితే, వాస్తవ అంకమధ్యమం వస్తుంది. సాంకేతికంగా $\overline{x} = A + \frac{\Sigma f\,dx}{N}$

$\overline{x} =$ అంకమధ్యమము, $A =$ ఊహించిన అంకమధ్యమము

$\Sigma f\,dx =$ ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకొన్న విచలనాలను $(x - A = dx)$ వాటి అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా $(f \times dx)$ వచ్చిన లబ్దాల సంకలనము.

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యము

ఉదాహరణ - 5 : క్రింది దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమాన్ని (అంకగణిత మధ్యమం) గణన చేయండి.

జీతాలు (రూ॥లలో)	40	60	80	100	120	140	160	180	200
పని వారు	5	7	10	15	20	25	9	6	3

జవాబు :

జీతము (x) రూపాయలలో	పనివారి సంఖ్య (f)	ఊహించిన సగటు (A = 100) నుండి విచలనాలు $(x - A = dx)$	$f\,dx$
40	5	40 - 100 = - 60	- 300
60	7	60 - 100 = - 40	- 280
80	10	80 - 100 = - 20	- 200
100	15	100 - 100 = 0	0
120	20	120 - 100 = + 20	+ 400
140	25	140 - 100 = + 40	+ 1000
160	9	160 - 100 = + 60	+ 540
180	6	180 - 100 = + 80	+ 480
200	3	200 - 100 = + 100	+ 300
	------		--------
	$N = 100$		$\left.\begin{matrix}\Sigma f\,dx = +2720 \\ -\ 780\end{matrix}\right\}1940$

అంకమధ్యమము $\bar{x} = A + \left(\dfrac{\Sigma\, fdx}{N}\right)$ విలువలను ప్రతిక్షేపించిన

$$\bar{x} = 100 + \left(\frac{1940}{100}\right)$$

$$= 100 + 19.40 = 119.40$$

కాబట్టి పని వారి సగటు జీతము = రూ. 119.40 పైసలు.

అంకమధ్యమము - విచ్ఛిన్నశ్రేణులు - సోపాన విచలనాల పద్ధతి (Arithmetic Mean - Discrete Series - Step Deviation Method) : దత్తాంశంలోని చలనాల విచలనాలకు సాధారణంగా భావించగల లక్షణాలున్నప్పుడు సోపాన విచలనాల పద్ధతి ద్వారా అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవచ్చు.

(1) ఇచ్చిన విలువలలో ఒక దానిని ఊహించిన అంకమధ్యమము(A)గా తీసుకొనవలెను. ఊహించిన అంకమధ్యమము తప్పనిసరిగా శ్రేణిలోని ఒక చలనముగా (A)గా గ్రహించితే బాగుంటుంది.

(2) చలనాలకు (x) ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా విచలనాలను (x-A = dx)కనుగొనవలెను.

(3) విచలనాలను (dx)సాధారణ కారణాంకము(c)తో భాగించగా వచ్చిన విలువలు $\left(\dfrac{dx}{c} = Dx\right)$ సోపాన విచలనాలగును.

(4) సోపాన విచలనాలను (Dx) అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $(Dx \times f)$ గుణలబ్ధాల సంకలనము $(\Sigma\, f\, Dx)$ కనుగొనవలెను. Dx = సోపాన విచలనమును సూచించును.

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma f \ Dx}{N} \times c$$

$\overline{x} =$ అంకమధ్యమము

$A =$ ఊహించిన అంకమధ్యమము

$\Sigma f \ Dx =$ విచలనాలను సాధారణ కారణాంకము(c)తో భాగించగా వచ్చిన సోపాన విచలనాలను (Dx) అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణింపగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

$N =$ మొత్తము పౌనఃపున్యము

$c =$ విచలనాల సాధారణ కారణాంకము (common factor)

ఉదాహరణ **6 :** దిగువ శ్రేణిలో 60 కుటుంబాల రాబడులు యివ్వబడినవి. సగటు రాబడి కనుగొనండి.

రాబడి రూ॥లలో	40	60	80	100	120	140	160	180	200
కుటుంబాల సంఖ్య	5	7	10	15	20	25	9	9	3

జవాబు :

రాబడి (x) (రూపాయలలో)	కుటుంబాల సంఖ్య (f)	ఊహించిన సగటు ($A = 100$) నుండి విచలనాలు (dx)	విచలనాలను సాధారణ లక్షణం($c = 20$)తో భాగించగా వచ్చిన సోపాన విచలనాలు (Dx)	సోపాన విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యంలో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం (fDx)
40	5	40 - 100 = - 60	- 3	- 15
60	7	60 - 100 = - 40	- 2	- 14
80	10	80 - 100 = - 20	- 1	- 10
100	15	100 - 100 = 0	0	0
120	20	120 - 100 = + 20	+ 1	+ 20
140	25	140 - 100 = + 40	+ 2	+ 50
160	9	160 - 100 = + 60	+ 3	+ 27
180	9	180 - 100 = + 80	+ 4	+ 36
200	3	200 - 100 = + 100	+ 5	+ 15
	--------			-------------
	$N = 100$			$\left.\begin{matrix}\Sigma f \ Dx = +148 \\ -\ 39\end{matrix}\right\} 109$

$\overline{x} = A + \frac{\Sigma f \ Dx}{N} \times c$, విలువలను ప్రతిక్షేపించంగా

$$= 100 + \frac{136}{100} \times 20$$

$$= 100 + 1.36 \times 2$$

$$= 100 + 2.72$$

$$\bar{x} = 102.72$$

కాబట్టి కుటుంబ సగటు రాబడి = రూ. 102.72 పైసలు

7.3.3 అంకమధ్యమము - అవిచ్ఛిన్నశ్రేణులు - ప్రత్యక్ష పద్ధతి (Arithmetic Mean - Continuous Series - Direct Method) :

పరిమాణాత్మక దత్తాంశం పెద్ద పరిమాణంలో ఉన్నపుడు అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడం కష్టము. కాబట్టి దత్తాంశాన్ని వర్గీకృతం చేసి వచ్చిన అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల నుండి అంకమధ్యమాన్ని గణాన్ని చేయడం సమంజసంగా వుంటుంది. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ప్రతి విలువ తన వ్యక్తిత్వాన్ని పోగొట్టుకుంటుంది. దీని వల్ల ప్రతి అంశము తాలూకు కచ్చితమైన విలువను తెలుసుకోవడానికి బదులు, ఆ తరగతిలో ఎన్ని అటువంటి సంఖ్య అంశాల అవధులనే చెప్పగలదు గాని, నిజమైన విలువలను చెప్పలేదు.

నిజమైన విలువలు తెలియక పోవడం వలన వాటి విలువలు ఆయా తరగతుల మధ్య విలువల వద్ద కేంద్రీకృతమైనట్లు భావించడం సాంప్రదాయం. ఈ ఊహకారణరహితం కాదు. ఎందుకంటే మధ్య బిందువు కంటే హెచ్చుగానున్న అంశాల మొత్తం, తక్కువగా వున్న అంశాల మొత్తం తేడా పరిహారాన్ని (Compensate) పొందుతాయి.

ఉదాహరణకు 90 - 100 అవధులు గల ఒక తరగతిలో వేతనాలు 20 మంది కార్మికులకు వస్తే వాళ్ళలో ఎంత మందికి 90, 94 లేదా 97, 98 రూపాయల వేతనం వచ్చిందో స్పష్టంగా తెలుసుకోవడం కష్టం. అందువల్ల ఆ అవధుల మధ్య గల వేతనాలు పొందిన 20 మంది కార్మికుల వేతనాలు సమానంగా విస్తృతి చెందాయని ఊహించి వాటి స్థానీకరణ మధ్య బిందువు 95 వద్ద ఉంటుందని, అటువంటి బిందువును ఆ తరగతి కంతటికి ప్రాతినిధ్యము వహించే విలువగా తీసుకొంటాము. ఇట్లా ఊహించడం వల్ల వచ్చిన దోషం (Error) తరగతి అంతరాలను బట్టి వుంటుంది. అంటే తరగతి అంతరం తక్కువైనప్పుడు దోషం తక్కువగాను, తరగతి అంతరం ఎక్కువైనకొద్దీ దోషం ఎక్కువగాను వుంటుంది.

ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో అంకమధ్య గణనకు

(1) శ్రేణిలోని ప్రతి తరగతి యొక్క మధ్య విలువను కనుగొనవలె. తరగతి ఎగువ అవధి, దిగువ అవధులు కలిసి, రెండుతో భాగిస్తే మధ్య విలువ వస్తుంది (Mid-value). దీనిని 'x' అనుకొనుము.

(2) తరగతుల మధ్య విలువలను, వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి ($f \times x = \Sigma fx$) ఆ గుణ లబ్దాల మొత్తం కనుగొనుము. దానిని Σfx అనుకొనుము.

(3) లాభాల మొత్తమును, మొత్తం పౌనఃపున్యముతో భాగించుము. భాగఫలమే అంకమధ్యమము.

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$\bar{x}$ = అంకమధ్యమము, Σfx = తరగతుల మధ్య విలువలను, అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

N = మొత్తం పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ - 7 : కొంత మంది వ్యక్తుల బరువులు క్రింది పట్టికలో యివ్వబడినవి. వారి సగటు బరువు గణన చేయండి.

బరువు (కి.గ్రా.)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60
వ్యక్తులు	5	10	25	30	20	10

జవాబు :

బరువులు(C.I.) (కి.గ్రా.)	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	మధ్య బిందువు Mid-Value (x)	మధ్య బిందువును, అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాలు(fx)
0 - 10	5	5	5 × 5 = 25
10 - 20	10	15	15 × 10 = 150
20 - 30	25	25	25 × 25 = 625
30 - 40	30	35	35 × 30 = 1050
40 - 50	20	45	45 × 20 = 900
50 - 60	10	55	55 - 10 = 550
	---------		----------
	$N = 100$		$\Sigma fx = 3300$

$\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$, విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\overline{x} = \frac{3300}{100} = 33$$

కాబట్టి ఒక్కొక్క వ్యక్తి, సగటు బరువు = 33 కి.గ్రా.

అంకమధ్యమము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - విచలనాల పద్ధతి (Arithmetic Mean - Continuous Series - Derivation Method) :

అంకమధ్యమాన్ని దగ్గర పద్ధతిలో కూడా కనుక్కోవచ్చు. అందులో విచలనాల పద్ధతిని తెలుసుకుందాం.

(1) ఈ పద్ధతిలో కూడా వివిధ తరగతుల మధ్య బిందువులు (x) కనుగొనవలె, (2) వానిలో ఒకదానిని ఊహించిన అంకమధ్యమము (A)గా గ్రహించవలె, (3) తరగతి మధ్య బిందువులకు, ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా, విచలనాలను ($x - A = dx$) కనుగొనవలె, (4) విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $(f.dx)$ గుణ లబ్దాల సంకలనము (Σfdx) కనుగొనవలె, (5) ఆ గుణాల లబ్దాల మొత్తాన్ని $\left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)$ మొత్తం పౌనఃపున్యంతో భాగించినప్పుడు సగటు విచలనం వస్తుంది.

ఈ సగటు విచలనాన్ని ఊహించిన అంకమధ్యమానికి కలిపితే నిజమైన అంకమధ్యమం వస్తుంది.

సాంకేతికంగా $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\,dx}{N}$

$\bar{x} =$ అంకమధ్యమము

$A =$ ఊహించిన అంకమధ్యమము

$\Sigma fdx =$ విచలనాలను వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశానికి దగ్గర పద్ధతిలో అంకమధ్యమమును గణన చేయండి.

బరువు (కి.గ్రా.)	130 - 140	140 - 150	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
వ్యక్తుల సంఖ్య	3	15	10	8	3	1

జవాబు :

వేతనాలు (రూపాయలలో) C.I.	పని వారు (f)	మధ్య విలువలు M.V. (x)	ఊహించిన అంకమధ్యమం $(A = 155)$ నుండి విచలనాలు (dx)	fdx
130 - 140	3	135	- 20	- 60
140 - 150	15	145	- 10	- 150
150 - 160	10	155	0	0
160 - 170	8	165	+ 10	+ 80
170 - 180	3	175	+ 20	+ 60
180 - 190	1	185	+ 30	+ 30
	--------			-------------
	$N = 40$			$\left.\begin{array}{r}\Sigma fdx = -210 \\ +170\end{array}\right\} -40$

$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$

$= 155 + \frac{-40}{40}$

$\bar{x} = 155 - 1 = 154$

కాబట్టి కర్మాగారములో పనిచేసే వారి సగటు వేతనం = రూ. **154.**

అంకమధ్యమము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - సోపాన విచలనాల పద్ధతి (Arithmetic Mean - Continuous Series - Step Deviation Method) : వ్యక్తిగత విచ్ఛిన్న శ్రేణులలోవలె అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా సోపాన విచలన పద్ధతి ద్వారా అంకమధ్యమమును గణన చేయవచ్చును. దగ్గర పద్ధతిని ఈ సోపాన విచలనాల పద్ధతి యింకా సులభం చేస్తుంది. తరగతుల మధ్య విలువల నుండి ఊహించిన అంకమధ్యమమును తీసివేయగా వచ్చిన, విచలనాలను, వీలైతే తరగతి అంతరముతోగాని (class interval) లేదా సాధారణ లక్షణంతోగాని (common factor) భాగిస్తే సోపాన విచలనం వస్తుంది (Dx).

సోపాన విచలనాలను అనురూప తరగతుల పౌనఃపున్యంతో గుణించగా $(Dx \times f)$ వచ్చిన మొత్తం లబ్ధమును ΣfDx అంటారు.

క్రింది సూత్రం ద్వారా అంకమధ్యమమును కనుగొనవచ్చు.

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\, Dx}{N} \times c$$

$\bar{x}$ = అంకమధ్యమము,

A = ఊహించిన అంకమధ్యమము

ΣfDx = సోపాన విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

N = మొత్తం పౌనఃపున్యము,

c = సాధారణ లక్షణం (common factor) లేదా తరగతి అంతరము (class interval)

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది శ్రేణిలో 40 మంది పనివారి వేతనాలివ్వబడినవి. వారి సగటు వేతనము ఎంత ?

బరువు (కి.గ్రా.)	130 - 140	140 - 150	150 - 160	160 - 170	170 - 180	180 - 190
వ్యక్తులు	3	15	10	8	3	1

జవాబు :

వేతనాలు రూపాయలలో C.I.	పని వారి సంఖ్య (f)	మధ్య బిందువు M.V.(x)	ఊహించిన సగటు $(A = 155)$ నుండి విచలనాలు (dx)	$(c = 10)$ సోపాన విచలనాలు (Dx)	సోపానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన గుణ లబ్ధాలు $f\,Dx$
130 - 140	3	135	- 20	- 2	- 6
140 - 150	15	145	- 10	- 1	- 15
150 - 160	10	155	0	0	0
160 - 170	8	165	+ 10	+1	+ 8
170 - 180	3	175	+ 20	+ 2	+ 6

180 - 190	1	185	+ 30	+ 3	+ 3
	-------- $N = 40$				------------- $\Sigma f\ Dx = +21$ + 17 = - 4

ఊహించిన అంకమధ్యమము(A) = 155 అయితే

అంకమధ్యమము = $\bar{x} = A + \frac{\Sigma\ f\ Dx}{N} \times c$

విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే, $\bar{x} = 155 + \frac{-4}{40} \times 10 \ = 155 - \frac{40}{40} = 155 - 1 = 154$

కాబట్టి పని వాని సగటు = రూ. 154

వివిధ రూపాల్లో తరగతి అంతరాలు ఉంటే అంకమధ్యమము గణన చేయడం :

వివృత అవధులు (Open End Class Intervals) : వివృత అవధులు గల తరగతులలో మొదటి తరగతి దిగువ అవధి (Lower Limit), చివరి తరగతి ఎగువ అవధి (Upper Limit) తెలియవు. అటువంటి పరిస్థితులలో వివృత అవధుల యొక్క (Open Ends) అవధులు గురించి ఊహించిన తరువాత మాత్రమే అంకమధ్యమ గణన సాధ్యపడును. సాధారణంగా అటువంటి ఊహ ప్రారంభ తరగతికి ఎగువన గల తరగతి, చివరి తరగతికి దిగువ వున్నటువంటి తరగతుల అంతరాలపై ఆధారపడి తరగతి అంతరాలను నిర్ణయించాలి.

ఉదాహరణకు తరగతి అంతరాలు

(Below) 20కి లోపు

20 - 40

40 - 60

60 - 80

80 కి పైన (above)

అని యిచ్చినప్పుడు, దత్తాంశములో తరగతి అంతరాలు అన్ని సమానంగా వుండడం వలన, మొదటి తరగతి దిగువ అవధి '0' గాను (0 - 20) చివరి తరగతి ఎగువ అవధి (80 + 20) = 100గాను ఊహించవచ్చు. అవధులు తెలియని పరిస్థితులలో అట్లాంటి ఊహ, సరియైనది, సమంజసమైనది అవుతుంది.

ఒక్కొక్క తరగతి అంతరాలు అసమానంగా (unequal class intervals) ఉంటాయి. అటువంటి పరిస్థితిలో మొదటి తరగతికి అంతరం, రెండో తరగతి అంతరాన్ని బట్టి నిర్ణయించాలి. చివరి తరగతికి దాని వెనుక తరగతి అంతరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొని వివృత అవధులను భర్తీ చేయవలె.

ఉదాహరణకు :

(Below) 30కి లోపు

30 - 50

50 - 60

60 - 70

70 పైన (Above)

పై ఉదాహరణలోని దత్తాంశము అసమానమైన తరగతులు గల వివృత అవధులతో వున్నది. కాబట్టి వాటి అవధులు నిర్ణయించుటకు, మొదటి తరగతికి, తరువాత తరగతి అవధి, అనగా రెండవ తరగతి అవధి (50-30) = 20. కాబట్టి, మొదటి తరగతి దిగువ అవధి నిర్ణయించుటకు ఎగువ అవధిలో నుండి 20 తగ్గిస్తే (30 - 20 = 10) వస్తుంది. అప్పుడు మొదటి తరగతి 10 - 30కి సమానంగా ఊహించవచ్చు. అదే విధంగా చివరి తరగతి ఎగువ అవధి నిర్ణయించుటకు, దాని వెనుక వున్న తరగతి అంతరము తీసుకొనవలసి యుండును. అది 60 - 70 కాబట్టి, తరగతి అంతరం 10కి సమానము. దీనిని చివరి తరగతి దిగువ అవధికి కలిపినపుడు (70 + 10) = 80 వస్తుంది. దానిని ఎగువ అవధిగా ఊహించవచ్చు. కనుక చివరి తరగతి 70 - 80కి సమానంగా ఊహించవచ్చు.

ఉదాహరణ : దిగువ దత్తాంశములో 80 మంది వ్యక్తుల రాబడులున్నాయి. వారి సగటు రాబడి గణన చేయండి.

రాబడి (రూపాయలలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య
(Below) 50కి లోపు	8
50 - 70	12
70 - 100	20
100 - 110	30
110 - 120	7
120 పైన (above)	3

జవాబు : పైన యిచ్చిన దత్తాంశములో తరగతుల అంతరాలు అసమానం. కాబట్టి మొదటి తరగతి అంతరము, దాని తరువాత తరగతి అంతరాన్ని బట్టి నిర్ణయించవలె. అనగా రెండవ తరగతి అంతరమే (70 - 50) = 20. కాబట్టి మొదటి తరగతి 20గా ఊహించిన, మొదటి తరగతి దిగువ అవధి (50 - 20) = 30కి సమానము. అనగా మొదటి తరగతిని 30 - 50గా ఊహించవచ్చును. అలాగే చివరి తరగతి అంతరము, దాని ముందున్న తరగతిని ఆధారంగా నిర్ణయిస్తే (120 - 110) = 10కి సమానమగును. అప్పుడు చివరి తరగతి ఎగువ అవధి (120 + 10) = 130కి సమానము. కనుక చివరి తరగతిని 120 - 130గా ఊహించవచ్చును. ఇప్పుడు ఆ దత్తాంశం యొక్క అంకమధ్యమమును గణన చేయవచ్చును.

రాబడి రూపాయలలో C.I.	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	మధ్య బిందువులు M.V.(x)	ఊహించిన సగటు (A=85) నుండి విచలనాలు (dx)	విచలనాలకు అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా లబ్ధాలు (fdx)
30 - 50	8	40	- 45	360
50 - 70	12	60	- 25	300

70 - 100	20	85	0	0
100 - 110	30	105	+ 20	600
110 - 120	7	115	+ 30	210
120 - 130	3	125	+ 40	120
	--------			-------------
	$N = 80$			$\Sigma fdx = +930$
				-660

				+270

ఊహించిన సగటు 85 అయితే

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma\ fdx}{N}$$

విలువలను ప్రతిక్షేపించగా, $\overline{x} = 85 + \frac{270}{80}$ = 85 + 3.39

$\overline{x}$ = 88.39

కాబట్టి వ్యక్తి సగటు రాబడి = రూ. 88.39 పైసలు

సమగ్ర రూపము (Exclusive Method) : దత్తాంశము సమగ్ర రూపము లేదా మినహాయింపు పద్ధతిలో వున్నప్పుడు ఒక తరగతి ఎగువ అవధి, ఆ తరువాత తరగతి దిగువ అవధిగా వుంటుంది.

వేతనాలు(రూ॥లు)	కార్మికులు
0 - 20	1
20 - 40	4
40 - 60	2
60 - 80	6
80 - 100	7

	20

ఈ ఉదాహరణలో మొదటి తరగతి అంతరం (0 - 20), ఎగువ అవధి 20. అట్లాగే రెండవ తరగతి దిగువ అవధి కూడా 20. ఒక కార్మికుని వేతనం 0 - 19.99 రూపాయలు వుంటే, ఆ అంశము 0 - 20 తరగతిలోకి వస్తుంది. మరొక కార్మికుని వేతనం రూ. 20. అయితే రెండో తరగతిలో వేయాలి. కాబట్టి మొదటి తరగతి '0' కంటే ఎక్కువ. 20 కన్నా తక్కువ, రెండవ తరగతి 20 కంటే ఎక్కువ, 40 కంటే తక్కువ అని అర్థం. ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి విలువ ఏ అంశానికైనా వుంటే ఆ అంశమును ఆ తరగతిలో చూపరాదు.

అసమగ్ర రూపం (**Inclusive Method**) : దత్తాంశ శ్రేణులు అసమగ్ర రూపంలో వున్నప్పుడు ఈ పద్ధతిలో ఒక తరగతి ఎగువ అవధి విలువ ఏ అంశానికైనా వుంటే ఆ అంశాన్ని ఆ తరగతిలోనే చూపవచ్చు.

ఉదాహరణ :

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1 - 5	1
6 - 10	4
11 - 15	9
16 - 20	10
21 - 25	6
26 - 30	5

పైన చూపబడిన విభాజనము నందు తరగతి అంతరాలు అసమగ్ర రూపము(inclusive form)లో వున్నవి. అంటే మొదటి తరగతిలో 1 నుండి 5 వరకు మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులందరినీ చూపడమైనది. రెండో తరగతిలో 6 నుండి 10 మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులున్నారు. ఈ విభాజనంలో 5 - 6ల మధ్య మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులను చేర్చవలసి వచ్చినపుడు వాటి మధ్య బిందువులను తీసుకుంటాము.

కాబట్టి మధ్యవిలువ గణన చేసే నిమిత్తము, 1 - 5 అని చదివినా 0.5 - 5.5 అని చదివినా ఒకటే అవుతుంది. రెండవ తరగతిని 6 - 10అని చదివినా 5.5 - 10.5 అని చదివినా ఒకటే అవుతుంది. అంటే ప్రతి తరగతి దిగువ అవధి నుండి 0.5ను తీసివేసి తరగతి ఎగువ అవధికి 0.5 కలిపి దత్తాంశాన్ని క్రింది విధంగా అవిచ్ఛిన్న క్రమంలో యేర్పాటు చేస్తాము.

మార్కులు	విద్యార్థులు
0.5 - 5.5	1
5.5 - 10.5	4
10.5 - 15.5	9
15.5 - 20.5	10
20.5 - 25.5	6
25.5 - 30.5	5

దత్తాంశం సమగ్ర రూపం (Exclusive form) లేదా అసమగ్ర రూపం (inclusive form)లో యిచ్చిన అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడానికి తరగతులను సరిచేయవలసిన అవసరం లేదు. ముఖ్యంగా అసమగ్ర తరగతులను పునర్నిర్మించినా (Rear-range) నిర్మించకపోయినా మధ్యబిందువుల విలువ సమానంగా వుంటుంది. కాని బాహుళకము, మధ్యగతములను గణన చేయునప్పుడు మాత్రం అసమానాంత తరగతుల అవధులను పైన సూచించిన విధంగా సరిచేయవలసి వుంటుంది.

కంటే తక్కువ (Lessthan), కంటే ఎక్కువ (More than) రూపాలు. దత్తాంశము "కంటే ఎక్కువ"(Morethan) "కంటే తక్కువ" (Less than) అనే రూపాల్లో నున్నప్పుడు అంకమధ్యమం గణన చేయడానికి "కంటే ఎక్కువ", "కంటే తక్కువ" క్రమం తరగతి అంతరాలలోకి వున్న సంచిత పౌనఃపున్యాన్ని సాధారణ పౌనఃపున్యంగా మార్చుకొని దత్తాంశాన్ని పునర్నిర్మించాలి.

ఉదాహరణ : ఒక విద్యాసంస్థలోని 439 మంది విద్యార్థుల బరువులు క్రింది విధంగా వున్నాయి.

బరువులు (కిలోలలో)	విద్యార్థులు
10 కంటే తక్కువ	5
20 కంటే తక్కువ	15
30 కంటే తక్కువ	98
40 కంటే తక్కువ	242
50 కంటే తక్కువ	367
60 కంటే తక్కువ	405
70 కంటే తక్కువ	425
80 కంటే తక్కువ	438
90 కంటే తక్కువ	439

పై దత్తాంశము నందు బరువులు ఎగువ అవధికన్నా తక్కువగా, విద్యార్థులు సంచిత పౌనఃపున్యంగా చూపటం జరిగింది. అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడానికి దీని తరగతి అంతరాలు సాధారణ పౌనఃపున్యంగా మార్చాలి. కాబట్టి తరగతుల అంతరం, అవధులు నిర్ణయించుకొని మొత్తం తరగతిని పునర్నిర్మాణం చేస్తే దత్తాంశం యిలా వుంటుంది.

బరువులు (కిలోలలో) C.I.	విద్యార్థులు (f)	మధ్య విలువ (x)	ఊహించిన సగటు (45) నుండి విచలనాలు (dx)	సోపానాలు $c=10$ (Dx)	సోపానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించవచ్చును $f\ Dx$
0 - 10	5	5	- 40	- 4	- 20
10 - 20	10	15	- 30	- 3	- 30
20 - 30	83	25	- 20	- 2	- 166
30 - 40	144	35	- 10	- 1	- 144
40 - 50	125	45	0	0	0
50 - 60	38	55	10	1	38
60 - 70	20	65	20	2	40
70 - 80	13	75	30	3	39
80 - 90	1	85	40	4	4
	--------				-------------
	$N = 439$				$\left.\begin{array}{l}\Sigma f\ Dx = -360\\ \quad +121\end{array}\right\} -239$

అంకమధ్యమము = $\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\ Dx}{N} \times c$

$\bar{x} =$ అంకమధ్యమము

$A =$ ఊహించిన అంకమధ్యమము

$\Sigma f\ Dx =$ సోపానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా లబ్దాల మొత్తము.

$c =$ సాధారణ కారణాంకము లేదా తరగతి అంతరం

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యము

$\bar{x} = A + \frac{\Sigma f\ Dx}{N} \times c$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\bar{x} = 45 + \frac{-239}{439} \times 10$$

$$= 45 + [-0.544 \times 10] = 45 + (-5.44)$$

$$= 45 - 5.44 = 39.56$$

కాబట్టి ఒక్కొక్క విద్యార్థి సగటు బరువు 39.56 కిలోగ్రాములు.

ఉదాహరణ : ఒక కంపెనీలో పనిచేసే 214 మంది పనివారి వేతనాలు క్రింది పట్టీలో యివ్వబడినవి. వారి వేతన అంకమధ్యమం కనుగొనుము.

వేతనాలు రూపాయలలో (Morethan)	పనివారు
75 కంటే ఎక్కువ	214
85 కంటే ఎక్కువ	212
95 కంటే ఎక్కువ	189
105 కంటే ఎక్కువ	140
115 కంటే ఎక్కువ	77
125 కంటే ఎక్కువ	32
135 కంటే ఎక్కువ	7
145 కంటే ఎక్కువ	8

పై దత్తాంశములో దిగువ అవధులు, పనివారి సంఖ్య సంచిత పౌనఃపున్యము అవరోహణ క్రమంలో వున్నది. కాబట్టి తరగతుల అంతరము, అవధులు నిర్ణయించుకొని, సాధారణ పౌనఃపున్యంలోకి దత్తాంశాన్ని పునర్నిర్మించుకోవలె.

వేతనాలు (రూ॥లలో) C.I.	పనివారు (f)	మధ్య బిందువులు (x)	ఊహించిన అంకమధ్యమము 110 నుండి విచలనాలు (dx)	విచలనాల సాధారణ లక్షణం(10) తో భాగించగా వచ్చిన సోపానాలు (Dx)	సోపాన విచలనాలను (Dx) అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా గుణలబ్ధాలు ($f\ Dx$)
75 - 85	2	80	- 30	- 3	- 6
85 - 95	23	90	- 20	- 2	- 46
95 - 105	49	100	- 10	- 1	- 49
105 - 115	63	110	0	0	0
115 - 125	45	120	10	+ 1	+ 45
125 - 135	25	130	20	+ 2	+ 50
135 - 145	3	140	30	+ 3	+ 9
145 - 155	4	150	40	+ 4	+ 16
	$N = 214$				$\left.\begin{matrix}\Sigma fd' = +360 \\ -101\end{matrix}\right\} 19$

$\overline{x} = A + \frac{\Sigma f\ Dx}{N} \times c$ విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$\overline{x} = 110 + \frac{19}{214} \times 10$$

$$\overline{x} = 110 + (0.88 \times 10) = 110 + 8.8$$

$$\overline{x} = 118.8$$

కాబట్టి కంపెనీలో పనిచేయువారి సగటువేతనం రూ. 118.80 పైసలు.

మధ్యబిందువులు వచ్చినపుడు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో ఒక్కొక్కప్పుడు తరగతులకు బదులుగా మధ్య విలువలను యిస్తే తరగతి అంతరము, తరగతుల దిగువ, ఎగువ అవధులు నిర్ణయించవచ్చును.

మధ్య బిందువు	పౌనఃపున్యము
25	7
75	13
125	15
175	4

225	25
275	10
325	36
375	9
425	16

మొత్తం	135

మొదటి మధ్య బిందువుకు రెండవ మధ్య బిందువుకు తేడా 50, అన్ని బిందువులకు అదే తేడా కనబడుచున్నది. ఈ తేడాను 2చే భాగిస్తే 25 అవుతుంది. దీనిని మధ్య విలువ నుండి తీసివేస్తే తరగతి దిగువ అవధి, మధ్య విలువకు కలిపితే తరగతి ఎగువ అవధి వస్తుంది. ఆ విధంగా తరగతులను పునర్నిర్మాణం చేసుకోవచ్చు.

తరగతుల నిర్మాణం :

మధ్య బిందువు	తరగతులు	పౌనఃపున్యము
25	(25 - 25) 0 - 50 (25 + 25)	7
75	(75 - 25) 50 - 100 (75 + 25)	13
125	(125 - 25) 100 - 150 (125 + 25)	15
175	(175 - 25) 150 - 200 (175 + 25)	4
225	(225 - 25) 200 - 250 (275 + 25)	25
275	(275 - 25) 250 - 300 (275 + 25)	10
325	(325 - 25) 300 - 350 (325 + 25)	36
375	(375 - 25) 350 - 400 (375 + 25)	9
425	(425 - 25) 400 - 450 (425 + 25)	16

కాని దత్తాంశంలో మధ్య బిందువులు యిచ్చినప్పుడు, అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయుటకు తరగతులను యేర్పాటు చేయనవసరం లేదు. కారణమేమంటే అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో అంకమధ్యమం, మధ్య బిందువు ద్వారానే గణన చేస్తాం. మధ్యగతము, బాహుళాలు కనుగొనుటకు దత్తాంశాన్ని పునర్నిర్మాణం చేయవలె.

అంకమధ్యమము : గుణదోషాలు

కేంద్రస్థాన సగటులో అతి తరచుగా ఉపయోగించే సగటు అంకమధ్యమం. ఈ సగటుకు కొన్ని గుణదోషాలు వున్నాయి.

సుగుణాలు

1. ఇది స్పష్టంగా, నిర్దుష్టంగా నిర్వచింపబడిన సగటు. పరిశోధకుడు పక్షపాత బుద్ధితో గణన చేసినా నిస్పక్షపాతంగా గణన చేసినా వచ్చే అంకమధ్యమము ఒక్కటే.

2. గణన సులువు. సామాన్య మానవునకు సగటు అంటే అంకమధ్యమమే అని అర్థము.

3. అంకమధ్యమాన్ని అతి సులువుగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

4. ఇది బీజీయ ప్రస్తావనకు (Algebric treatment) తగియున్నది.

5. సగటు అన్ని అంశాల మీద ఆధారపడవలెననే ముఖ్య లక్షణాన్ని సంతృప్తి పరచుచున్నది. అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యాన్ని యిస్తుంది.

6. అన్ని సగటులలో ప్రతిచయన మార్పులకు అతి తక్కువగా ప్రభావితం అయ్యే సగటు అంకమధ్యమం.

దోషాలు

1. శ్రేణిలో వుండే అతి స్వల్ప, అతి పెద్ద అంశాల వల్ల అంకమధ్యమం ఎక్కువగా ప్రభావితమగును. ఉదాహరణకు 90 సం॥ తాతగారు తన జన్మదినం సందర్భంగా మనుమలందరకూ విందు యేర్పాటు చేసెను. విందులో పాల్గొన్న మనుమల వయస్సు 10, 13, 17, 20 సంవత్సరాలు. వారందరి సగటు వయస్సు = 90 + 10 + 13 + 17 + 20 = $\frac{150}{5}$ = 30, వాస్తవంగా విందుకు హాజరైన వారిలో ఏ ఒక్కరికి 30 సం॥ల వయస్సు లేదు. అందువలన (30 సం॥) అంకమధ్యమం ఆ శ్రేణికి సరియైన ప్రాతినిధ్యము వహించడం లేదు. ఇటువంటి సగటు తప్పుదారి (Misleading) పట్టించేదిగా నున్నది.

2. అంకమధ్యమము ఒక్కొక్కసారి అసహజ (Absend) ఫలితాలనిస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక కళాశాలలో బిఏ, బీయస్సీ, బికాం తరగతులలో విద్యార్థుల సంఖ్య 220 అనుకొంటే ఒక్కొక్క తరగతి సగటు విద్యార్థుల సంఖ్య $\frac{220}{3} = 73.3$. ఇటువంటి ఫలితము చాలా అసహజంగా కనిపిస్తుంది. ఎందుకనగా .3 విద్యార్థులుండడం అసంభవం.

3. ఒక్కొక్కప్పుడు ఒక్క అంకమధ్యమాన్నే తెలుసుకొని, అంశాన్ని తెలుసుకోలేకపోవడం వలన మోసపోవలసిన పరిస్థితి యేర్పడును. కొన్ని సందర్భాలలో అది ప్రమాదకరంగా పరిణమిస్తుంది. ఒక ఈతరాని వ్యక్తి నదిని దాటవలసి వచ్చినపుడు నదిలోతు అంకమధ్యమము 3 అడుగులని తెలుసుకొని నదిని దాటడానికి ఉపక్రమించిన, ఆ నదిలోతు ఒకచోట 8 అడుగులు వుందని తెలియకపోతే ప్రమాదానికి గురి కావలసి వస్తుంది.

4. అంకమధ్యమాన్ని కేవలం పరిశీలన వలన (Mere observation) వల్ల, రేఖాచిత్రపటాల వల్ల తెలుసుకోలేము.

5. శ్రేణిలో ఏ ఒక్క అంశము తెలియకపోయినా అంకమధ్య గణన సాధ్యపడదు.

6. కొన్ని సందర్భాలలో తప్పు నిర్ణయాలకు దారి తీయవచ్చు. ఉదాహరణకు x, y అనే యిద్దరు విద్యార్థుల మార్కులు క్రింది విధంగా వున్నాయని అనుకొందాము.

నెలపరీక్ష	X విద్యార్థి మార్కులు	Y విద్యార్థి మార్కులు
జనవరి	30	50
ఫిబ్రవరి	40	40
మార్చి	50	30

పై శ్రేణులలో యిద్దరి విద్యార్థుల సగటు మార్కులు **40.** దీనిని బట్టి యిద్దరు ఒకే విధంగా చదువుచున్నారని అర్థము. కాని X విద్యార్థి అభివృద్ధిని, Y విద్యార్థి క్షీణతను ఈ సగటులు వెల్లడి చేయడం లేదు.

7. వివృత అవధులున్న తరగతి అంతరానికి అంకమధ్యమం ఉపయోగించటం సరికాదు.

7.3.4 భారిత అంకమధ్యమము : అంకమధ్య గణనలో అంశాలన్నింటికీ సమాన ప్రాముఖ్యము యివ్వబడును. కాని వ్యక్తిగతంగా అంశాలకు వేరు వేరు ప్రాముఖ్యాలున్నపుడు అన్ని అంశాలకు సమాన ప్రాముఖ్యమివ్వడం ఒక రకంగా తప్పుత్రోవ పట్టించడం అవుతుంది. సాపేక్ష ప్రాముఖ్యం (Relative importance) అలక్ష్యం చేయడం వల్ల సగటులోని యదార్థత కనపడదు.

ఉదాహరణకు ఒక పనిని ఒక పురుషుడు, ఒక స్త్రీ, ఒక బాలుడు పూర్తి చేసినారనుకుందాము. మొత్తం పనిని పూర్తి చేయడానికి చెల్లించిన కూలి రూ. **9-00.** ముగ్గురు పనివారికి సమానంగా (సగటున) రూ. **3-00** చొప్పున చెల్లిస్తే, అది సమంజసంగా వుండదు. కారణం ఆ ముగ్గురు పనివారే అయినా, వారి పని యొక్క సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాలు వేరువేరుగా వున్నాయి. కాబట్టి రూ. **9-00** కూలిని వారికి చెల్లించే ముందు వారి వ్యక్తిగత ప్రాముఖ్యాన్ని తెలుసుకొని ఆ మొత్తాన్ని వారికి పంచవలె.

అంటే పురుషుడు చేసే పనిలో $\frac{3}{4}$ వంతు స్త్రీ, పనిలో బాలుడు $\frac{1}{2}$ వంతు, చేయగలరని అనుకొంటే వారు చేసిన మొత్తం పని $1+\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$. లేదా $(4:3:2)=\frac{9}{4}$ అవుతుంది. అప్పుడు మొత్తం కూలిని వాళ్ళు చేసే పని నిష్పత్తిలో పంచినపుడు మగవానికి రూ. **4-00,** స్త్రీకి రూ. **3-00,** బాలునకు రూ. **2-00** చొప్పున చెల్లించవలసియుండును. కాబట్టి వేర్వేరు అంశాల సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాన్ని గుర్తించి అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవలసి వచ్చినపుడు భారిత అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయడం ఎంతయినా అవసరం. దీనిలో అంశాలను ఒకటి కంటే ఎక్కువసార్లు వాటి ప్రాముఖ్యాన్ని బట్టి లెక్కించవలసి వుంటుంది. అంటే సాపేక్షిక ప్రాముఖ్యాన్ని బట్టి భారా(weights)లేర్పడతాయి. అయితే ఇటువంటి భారాలు నిజమైనవే అయి యుండవలసిన అవసరం లేదు.

భారాలు నిజమైనవి గాని, నిర్హేతుకమైనవి (Arbitrary)గాని కావచ్చును. నిజమైన భారాలు లేనప్పుడు నిర్హేతుకమైన లేదా ఊహించిన భారాలు ఉపయోగించవచ్చు. కాని ఫలితంలో కొంత దోషం కనిపిస్తుంది. అయితే అసలు భారాలు లేని సగటు కంటే ఊహించిన భారాలతో గణన చేయడం కొంత మెరుగు. ఇంతేకాకుండా ఊహించిన భారాల వల్ల వచ్చే దోషము సాపేక్షికంగా చాలా తక్కువ. ఊహించిన భారాలనుపయోగించి సగటు గణన చేయవచ్చును గాని, నిజమైన అంశాలకు బదులు నిర్హేతుకమైన అంశాలను ఉపయోగించరాదు.

విభాజనంలోని చలనాలను వాటి భారాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనాన్ని, వాటి మొత్తం భారాలతో భాగిస్తే భారిత అంకమధ్యమము లభ్యమవుతుంది. సాంకేతికముంగా $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అనే N సంఖ్యాలున్న చలనాలు ఉన్నాయని, $w_1, w_2, w_3, \cdots\cdots, w_n$ అనేవి వాటి అనురూప భారాలని అనుకొనినచో వాటి భారిత అంకమధ్యమము

$$\text{భారిత అంకమధ్యమము } (\bar{x}_w) = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + w_3x_3 \cdots\cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots\cdots + w_n}$$

$$\bar{x}_w = \frac{\Sigma wx}{\Sigma w}$$

$\Sigma wx =$ చలనాలను వాటి భారాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్దాల సంకలనము

$\Sigma w =$ భారాల మొత్తము.

ఉదాహరణ : ఈ దిగువ యిచ్చిన పట్టీలో మూడు విశ్వవిద్యాలయాల పరీక్షా ఫలితాలు పొందుపరచడమైనది. దీనిని బట్టి ఏ విశ్వవిద్యాలయం ఎక్కువ ఆధిక్యత సంపాదించినదో సకారణంగా విశదీకరింపుము.

విశ్వవిద్యాలయ పరీక్షలు	ఫలితాలు శాతాలు		
	A విశ్వవిద్యాలయం	**B** విశ్వవిద్యాలయం	**C** విశ్వవిద్యాలయం
M.A.,	70	75	75
M.Sc.,	85	80	65
M.Com.,	80	65	70
B.A.	75	85	80
B.Sc.,	65	75	85
B.Com.	75	70	75

జవాబు : పై ఉదాహరణలో సామాన్య అంకమధ్యమము (Simple Arithmetic Mean) గణన చేస్తే మూడు విశ్వవిద్యాలయాల ఫలితాల సగటు (75) ఒకే విధంగా నున్నది. కారణమేమనగా మూడు విశ్వవిద్యాలయాలకు సమాన ప్రాతినిధ్యమిచ్చి అందులో వున్నవి విద్యార్థుల సంఖ్య సమానంగా వున్నట్లు ఊహించితిమి. కాని అట్లా ఉండడం అరుదు. అందువలన వానికి భారాలివ్వవలె. M.A., M.Sc., M.Com.,లలో విద్యార్థుల సంఖ్య డిగ్రీ తరగతుల కంటే తక్కువగా వుంటుందని, ఆర్ట్స్ తరగతులలో విద్యార్థులు సైన్స్ విద్యార్థుల కంటే ఎక్కువ వుంటారని ఊహించి తగిన రీతిగా భారాలనిచ్చినపుడు భారిత అంకమధ్యమము గణన చేయవచ్చును. విశ్వవిద్యాలయాలలో విద్యార్థుల సంఖ్య కూడా వేరువేరుగా వున్నట్లు ఊహించవలె. పై ఉదాహరణలో భారమివ్వనందువల్లే నిర్హేతుక భారాలు (arbitrary weights) ఊహించి భారిత, అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవలె.

విశ్వవిద్యాలయ పరీక్షలు	ఫలితాల శాతము x_1	A విద్యార్థుల సంఖ్య 100లలో w_1	$x_1 w_1$	ఫలితాల శాతము x_2	B విద్యార్థుల సంఖ్య 100లలో w_2	$x_2 w_2$	ఫలితాల శాతము x_3	C విద్యార్థులు 100లలో w_3	$x_3 w_3$
M.A.	70	5	350	75	4	300	75	6	450
M.Sc.	85	4	340	80	3	240	65	4	260
M.Com.	80	6	480	65	5	325	70	5	350
B.A.	75	7	525	85	6	510	80	7	560
B.Sc.	65	5	325	75	4	300	85	5	425
B.Com.	75	8	300	70	5	350	75	5	375
N = 6	450	35	2,620	450	27	2,025	450	32	2,420

సాధారణ అంకమధ్యమము :

$$\text{A విశ్వవిద్యాలయంలో } \left(\bar{x}_A\right) = \frac{\Sigma x_1}{N} = \frac{450}{6} = 75\%$$

B విశ్వవిద్యాలయంలో $(\bar{x}_B) = \frac{\Sigma x_2}{N} = \frac{450}{6} = 75\%$

C విశ్వవిద్యాలయంలో $(\bar{x}_C) = \frac{\Sigma x_3}{N} = \frac{450}{6} = 75\%$

పైన సూచింపబడిన సాధారణ అంకమధ్యమము మూడు విశ్వవిద్యాలయాలకు సమానంగానున్నది. కనుక వాటి ఆధిక్యత తెలపడం అసంభవము.

భారిత అంకమధ్యమము :

A విశ్వవిద్యాలయము = $\frac{\Sigma x_1 w_1}{\Sigma w_1} = \frac{2620}{35} = 74.86\%$

B విశ్వవిద్యాలయము = $\frac{\Sigma x_2 w_2}{\Sigma w_2} = \frac{2025}{27} = 75\%$

C విశ్వవిద్యాలయము = $\frac{\Sigma x_3 w_3}{\Sigma w_3} = \frac{2420}{32} = 75.63\%$

A, B, C విశ్వవిద్యాలయాలలో భారిత అంకమధ్యమాలు **74.86, 75, 75.63.** 'C' విశ్వవిద్యాలయ భారిత అంకమధ్యమం ఎక్కువ కావున 'C' ఆధిక్యత సాధించినదని చెప్పవచ్చు.

C విశ్వవిద్యాలయంలో డిగ్రీ ఫలితాలు ఎక్కువగా సాధింపబడినందున హెచ్చు భారాలివ్వడమైనది. తత్ఫలితంగా దానికి ఆధిక్యత లభించినది.

భారిత అంకమధ్యమము - ధర్మాలు

1. అన్ని అంశాలకు సమాన భారాలిచ్చినప్పుడు సామాన్య అంకమధ్యమము ($\bar{x}$) = భారిత అంకమధ్యమము($\bar{x}_w$).

2. పెద్ద అంశాలకు చిన్న భారాలు, చిన్న అంశాలకు పెద్ద భారాలు యిచ్చినప్పుడు సామాన్య అంకమధ్యమము ($\bar{x}$)> భారిత అంకమధ్యమము ($\bar{x}_w$) (ఎక్కువగా వుండును).

3. పెద్ద అంశాలకు పెద్ద భారాలు, చిన్న అంశాలకు చిన్న భారాలు యిచ్చినప్పుడు సాధారణ అంకమధ్యమం ($\bar{x}$) < భారిత అంకమధ్యమము ($\bar{x}_w$) తక్కువగా వుండును.

పై ధర్మాలను ఉదాహరణ ద్వారా విశ్లేషించవచ్చును.

అంశాలు	విలువలు	మొదటిధర్మం ఉదాహరణ		రెండవ ధర్మం ఉదాహరణ		మూడవ ధర్మం ఉదాహరణ	
		w	xw	w	xw	w	xw
A	25	5	125	8	200	2	50
B	30	5	150	6	180	4	120

C	40	5	200	4	160	6	240
D	45	5	225	2	90	8	360
$N = 4$	140	20	700	20	630	20	770

సాధారణ అంకమధ్యమము $(\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{140}{4} = 35$

మొదటి ధర్మం : భారిత అంకమధ్యమము = $\frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{700}{20} = 35$

(అన్ని అంశాలకు సమాన భారాలు అంటే సాధారణ అంకమధ్యమము $\bar{x} = 35, \bar{x}_w = 35$) కావున

అంటే సాధారణ అంకమధ్యమము, భారిత అంకమధ్యమానికి సమానము $\left(\bar{x} = \bar{x}_w\right)$.

రెండవ ధర్మం : భారిత అంకమధ్యమము = $\frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{630}{20} = 31.5$

ఈ ఉదాహరణలో పెద్ద అంశాలకు చిన్న భారాలు, చిన్న అంశాలకు పెద్ద భారాలు ఇస్తే భారిత అంకమధ్యమం 31.5. అంటే రెండో ధర్మం $\bar{x} > \bar{x}_w$ అని నిరూపించబడింది.

మూడోధర్మం : భారిత అంకమధ్యమం = $\frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{770}{20} = 38.5$

ఈ ఉదాహరణలో మూడవ ధర్మం $\bar{x} < \bar{x}_w$ గా నిరూపించబడింది $\left(\bar{x} = 35,\ \bar{x}_w = 38.5\right)$.

భారిత అంకమధ్యమము - ఉపయోగాలు

దత్తాంశములో వున్న అన్ని అంశాలకు సమాన ప్రాముఖ్యం లేనపుడు, సామాన్య అంకమధ్యమం నిరుపయోగమగును. అందువలన భారిత అంకమధ్యమము అవసరము. రెండుగాని అంతకంటే ఎక్కువగాని వున్న దత్తాంశమును పోల్చి చెప్పుటకు భారిత అంకమధ్యమము తోడ్పడును. ప్రామాణిక జనన, మరణ రేట్లను గణన చేయుటకు తోడ్పడును. సూచి సంఖ్యల నిర్మాణానికి తోడ్పడును. మాధ్యాల మాధ్యమము (Mean of means) కనుగొనుటకు భారిత అంకమధ్యమము ప్రత్యేకంగా ఉపయోగపడును.

ఉదాహరణ : రెండు కంపెనీలలో A కంపెనీలో సగటు వేతనం రూ. 80-00. B కంపెనీలో సగటు వేతనం రూ. 120-00. (యివ్వబడినవి)

		A కంపెనీ	B కంపెనీ
వేతనాలు	x	రూ. 80	రూ. 120
పనివారు	N	100	200
భారాలు	w	200	200

ఇక్కడ పని వారి సంఖ్య భారాలుగా ఉపయోగిస్తే, Σxw= A కంపెనీ 8000, B కంపెనీ = 24000

భారిత అంకమధ్యమము $\frac{\Sigma xw}{\Sigma w} = \frac{8000+24000}{100+200} = \frac{32000}{300}$ **= 106.67**

కాబట్టి మాధ్యమాల మాధ్యమం అంటే, భారిత అంకమధ్యమము. రెండు కంపెనీల సగటు వేతనం కనుగొనుటకు ఒక్కొక్క కంపెనీ సగటు వేతనాన్ని, ఆ కంపెనీలో పనిచేసే వారితో గుణిస్తే, మొత్తం కంపెనీ చెల్లించే జీతాల బిల్లు (pay bill) తెలుస్తుంది. అప్పుడు రెండు కంపెనీల జీతాల బిల్లులను కలిపి రెండు కంపెనీలలో ఉన్న పని వారి మొత్తం సంఖ్యతో భాగిస్తే, రెండు కంపెనీల సగటు వేతనం తెలుస్తుంది. అటువంటి సగటు, నిజానికి భారిత అంకమధ్యమమే.

7.3.5 ఉమ్మడి అంకమధ్యమము (Combined Average) : ఒక శ్రేణిలోని రెండు విభాగాల సగటులు వేరువేరుగా యిచ్చినట్లయితే ఆ మొత్తం శ్రేణికి సంబంధించిన సగటును కనుగొనుటకు దిగువ సూత్రం వాడాలి.

$$\text{ఉమ్మడి సగటు } \left(\bar{x}_{12}\right) = \frac{N_1 \times \bar{x}_1 + N_2 \times \bar{x}_2}{N_1 + N_2}$$

$\bar{x}_{12}$ = ఉమ్మడి సగటు లేదా ఉమ్మడి అంకమధ్యమము

$\bar{x}_1$ = మొదటి విభాగపు సగటు

N_1 = మొదటి విభాగపు అంశాల సంఖ్య

$\bar{x}_2$ = రెండవ విభాగపు సగటు

N_2 = రెండవ విభాగపు అంశాల సంఖ్య

7.4 గుణమధ్యమము

గణిత సగటులలో రెండోది గుణమధ్యమము. శ్రేణులలోని 'N' అంశాల లబ్దానికి N వర్గమూలాన్ని గుణమధ్యమంగా నిర్వచింపవచ్చును. (Geometric mean is defined as the N th root of the product of N items of the series) ఒకవేళ శ్రేణిలో రెండంశాలే వుంటే గుణమధ్యమాన్ని తెలుసుకొనుటకు రెండంశాల వర్గమూలాన్ని కనుగొంటాము. శ్రేణిలో మూడు అంశాలే వుంటే మూడు అంశాల వర్గమూలాన్ని కనుగొనడం ద్వారా గుణమధ్యమం తెలుసుకొంటాము.

పై నిర్వచనాన్ని సాంకేతికంగా చెప్పవలెనంటే శ్రేణులలో $x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n$ అనే N అంశాలున్నాయనుకొందాము. అప్పుడు గుణమధ్యమము

$$\text{Geometric mean (G.M.)} = \sqrt[N]{x_1 \times x_2 \times x_3 \times \cdots \times x_n} \quad = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)^{1/n}$$

$N = 2$ అనుకొనిన, అవి **4, 16** అయితే ఆ రెండు సంఖ్యల లబ్దాలకు వర్గమూలాలు కనుగొనవలెను. G.M. = $\sqrt{4 \times 16} = \sqrt{64} = 8$ అని చెప్పవచ్చు. శ్రేణిలో గల అంశాలు రెండింటికి మించి వున్నప్పుడు సంవర్గమానాలను (logarithms) ఉపయోగిస్తారు.

$$GM = \text{Antilog } \frac{1}{N}\left(\log x_1 + \log x_2 + \cdots + \log x_n\right)$$

$$GM = \text{Antilog}\ \frac{1}{N}\ \Sigma \log x \ \text{ or } \ \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{N}$$

$\Sigma \log x =$ అంశాల సంవర్గమానాల సంకలనము

$N =$ అంశాల మొత్తము

కాబట్టి గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయడానికి అంశాల సంవర్గ మానాలను సంకలనము చేసి, ఆ మొత్తాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే వచ్చిన ఫలితానికి ప్రతి సంవర్గమానము (Antilog) చూడవలెను. గుణమధ్యమము అంకమధ్యమములో సమానంగాగాని, తక్కువగాకాని వుంటుంది $GM \le AM$.

7.4.1 గుణమధ్య గణన - వ్యక్తిగత శ్రేణులు : శ్రేణిలోని అంశాల విలువలకు సంవర్గమానాలను ($\log x$) కనుగొనవలెను. సంవర్గమానాలను సంకలనము చేయవలె ($\Sigma \log x$) సంవర్గమానాల సంకలనాన్ని అంశాల సంఖ్యతో భాగించవలె $\left(\frac{1}{x}\Sigma \log x\right)$. వచ్చిన ఫలితానికి ప్రతి సంవర్గమానాన్ని చూస్తే గుణమధ్యమం వస్తుంది.

ఉదాహరణ : దిగువ శ్రేణిలో 10 కుటుంబాల రాబడి యివ్వబడినది. రాబడి గుణమధ్యమము కనుగొనుము.

జవాబు :

కుటుంబము	**రాబడి(రూ॥లలో)** x	**సంవర్గమానాలు**($\log x$)
1	15	1.1761
2	70	1.1851
3	85	1.9294
4	500	2.6990
5	75	1.8751
6	8	0.9031
7	45	1.6532
8	250	2.3979
9	40	1.6021
10	36	1.5563
-----------		-----------
$N = 10$		$\Sigma \log x = 17.6373$

$$GM = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{N}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{17.6373}{10}$$

$= \text{Antilog } 1.76373$

GM = రూ. 58.04 పైసలు

ఒక్కొక్కప్పుడు సంవర్గమానాలను సంకలనము చేయునపుడు వచ్చే పూర్ణాంక భాగము (characteristic) ఋణాత్మకంగా (-ve) వుంటుంది. అలాంటప్పుడు సంవర్గమనాల మొత్తాలను అంశాల సంఖ్యతో భాగించడం వీలుపడకపోవచ్చు. కారణము అపూర్ణాంక భాగము లేదా మాంటెస్సా (Mantissa) ఎప్పుడూ ధనాత్మకం విలువ కావడం వలన రెండింటిని సమిష్టిగా భాగించడానికి వీలులేదు. అందువలన తగిన విధంగా భాగఫలమును రాబట్టవలె.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన రెండు శ్రేణులకు గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

క్రమ సంఖ్య	A శ్రేణులు	B శ్రేణులు
1	2574	.8974
2	475	.0570
3	75	.0081
4	5	.5577
5	.8	.0002
6	.08	.0984
7	.005	.0854
8	.0009	.5672

జవాబు : శ్రేణులలోని అంశాలకు సంవర్గమానాలను కనుగొని సంకలనము చేయవలె.

క్రమసంఖ్య	A శ్రేణులు	A శ్రేణుల సంవర్గమానాలు x	B శ్రేణులు	B శ్రేణుల సంవర్గమానాలు x
1	2574	3.4106	.8974	$\bar{1}.9530$
2	475	2.6767	.0570	$\bar{2}.7559$
3	75	1.8751	.0081	$\bar{3}.9085$
4	5	0.6990	.5577	$\bar{1}.7464$
5	.8	$\bar{1}.9031$	.0002	$\bar{4}.3010$
6	.08	$\bar{2}.9031$	.0984	$\bar{2}.9930$
7	.005	$\bar{3}.6990$	.0854	$\bar{2}.9315$
8	.009	$\bar{4}.9542$	.5672	$\bar{1}.7538$
$N = 8$		$\Sigma \log x = 2.1208$		$\Sigma \log x = \overline{10}.3431$

A శ్రేణుల గుణమధ్యమము $= \text{Antilog } \dfrac{\Sigma \log x}{N}$

$$= \text{Antilog}\ \frac{2.1208}{8}$$

$$= \text{Antilog}\ 0.2651$$

$$A \text{ శ్రేణుల } GM = 1.841$$

$$B \text{ శ్రేణుల గుణమధ్యమము } = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma \log x}{N}$$

$$= \text{Antilog}\ \frac{\overline{10}.3431}{8}$$

ఇక్కడ పూర్ణాంక భాగము (Characteristic) ఋణాత్మకము దానిని భాగించే సంఖ్య 8 కంటే హెచ్చుగా వున్నది. అంటే 8 ఒకసారి పోతే యింకా 2 మిగిలిపోతుంది. ఋణాత్మక విలువ మాంటెస్సాకు కలుపరాదు గదా! అయితే 8 సరిగా పోయేటట్లు చేయడానికి ఎంతయితే పూర్ణాంక బాగానికి (Characteristic)కు కలిపినామో అంత విలువ మాంటిసాకు కలుపవలె. అంటే 6ను ఋణాత్మక విలువ పూర్ణాంక భాగానికి కలపడం వల్ల అది $\overline{16}$ (బార్ పదహారు) అగును. 8చే సరిగా రెండుసార్లు పోతుంది. కాని మనము కలిపిన ఋణాత్మకపు $\overline{6}$ కు సమానంగా ధనాత్మకపు విలువ (+6) మాంటెస్సాకు కలుపవలె. అంటే మన విలువ $\overline{10}.3431$ బదులు $\overline{16}+6.3431$ అని తీసుకొనవలెను. కావున

గుణమధ్యమము $= \text{Antilog}\ \frac{\overline{10}.3431}{8}$ బదులు, పైన తెలుసుకొన్న విధంగా సంవర్గమానము వ్రాసుకొంటే

$$= \text{Antilog}\ \frac{\overline{16}.3431}{8}$$

$$= \text{Antilog}\ \overline{2}.7929$$

$$B \text{ శ్రేణుల } GM = 0.6207$$

7.4.2 విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - గుణమధ్యమము : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలోని అంశాల విలువలకు సంవర్గమానాలను $\log x$ కనుగొనవలెను.

ఆ సంవర్గమానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $(f \log x)$ లబ్ధాల సంకలనము $(\Sigma f \log x)$ కనుగొనవలెను.

లబ్ధాల సంకలనమును మొత్తం పౌనఃపున్యము(N)తో భాగించవలె. భాగఫలానికి ప్రతి సంవర్గమానము కనుగొని గుణమధ్యమము గణన చేయవచ్చు.

$$GM = \text{Antilog}\ \frac{\Sigma f \log x}{N}$$

$\Sigma f \log x =$ అంశాల సంవర్గమానాన్ని వాటి అనురూప పౌనఃపున్యంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము.

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యము

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశములో 50 మంది విద్యార్థుల బరువులు వున్నాయి. వాని నుండి వారి బరువు గుణమధ్యమాన్ని కనుక్కోండి.

బరువు (కిలోగ్రాములు)	110	112	115	120	121	128	130	135
విద్యార్థులు	6	8	12	5	4	5	7	3

జవాబు :

బరువు(x) (కేజీలలో)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంవర్గమానాలు $\log x$	సంవర్గమానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాలు $f \times \log x$
110	6	2.0414	12.2484
112	8	2.0492	16.3936
115	12	2.0607	24.7284
120	5	2.0792	10.3960
121	4	2.0828	8.3312
123	5	2.0899	10.4495
130	7	2.1139	14.7973
135	3	2.1303	6.3903
	$N = 50$		$103.7953 = \Sigma f \log x$

గుణమధ్యమము (GM) $= \text{Antilog } \dfrac{\Sigma f \log x}{N}$, విలువలను ప్రతిక్షేపించగా

$$= \text{Antilog } \frac{103.795}{50}$$

$$= \text{Antilog of } \mathbf{2.0747}$$

$$= \mathbf{118.8}$$

విద్యార్థుల బరువు గుణమధ్యమము (GM) = **118.8** కిలోగ్రాములు

7.4.3 అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - గుణమధ్యమము : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలోని తరగతులకు మధ్య బిందువులు (x) కనుగొనవలెను. తరగతుల మధ్య బిందువులకు సంవర్గమానాలు ($\log x$) కనుగొనవలెను. సంవర్గమానాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి ($\log x \times f$) భాగఫలానికి ప్రతిసంవర్గమానము కనుగొనగా వచ్చిన విలువ గుణమధ్యమం అవుతుంది.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన పట్టీలో ఎం.ఎ పరీక్షలో గణాంక శాస్త్రంలో 65 మంది విద్యార్థులకు వచ్చిన మార్కులు ఈ విధంగా వున్నాయి. మార్కుల గుణమధ్యమము గణన చేయండి.

జవాబు :

మార్కులు	విద్యార్థులు
20 - 30	2
30 - 40	23
40 - 50	0
50 - 60	22
60 - 70	11
70 - 80	7

జవాబు :

మార్కులు (CI)	విద్యార్థులు (f)	మధ్యవిలువ (x)	సంవర్గమానాలు ($log\ x$)	సంవర్గమానాలను అనురూప పౌనఃపున్యంతో గుణించగా లబ్దాలు ($f\ log\ x$)
20 - 30	2	25	1.3979	2.7958
30 - 40	23	35	1.5401	15.5143
40 - 50	0	45	1.6532	.0
50 - 60	22	55	1.7494	38.2888
60 - 70	11	65	1.8129	19.9419
70 - 80	7	75	1.8751	13.1257
	$N = 65$			$\Sigma f\ log\ x = 109.6665$

గుణమధ్యమము = $\text{Antilog}\ \dfrac{\Sigma' f' \log x}{N}$, విలువలను ప్రతిక్షేపించగా,

Q® =°^ î¼°=ò $(GM) = \text{Antilog}\ \dfrac{109.6665}{65}$

$= \text{Antilog}\ 1.6872$

$GM = 48.66$

మార్కుల గుణమధ్యమము = 48.66

గుణమధ్యమము - సుగుణాలు

1. ఇది స్పష్టంగా నిర్వచించిన సగటు. దీని విలువ స్థిరంగా వుంటుంది. సగటుకుండవలసిన లక్షణాలు గుణమధ్యమానికి వున్నాయి.
2. గుణమధ్యమము శ్రేణిలోని అన్ని అంశాల మీద ఆధారపడి వుంటుంది.
3. ఇది బీజీయ ప్రస్తావనకు తగివుంది.
4. శాతాలను, నిష్పత్తులను, సూచిసంఖ్యలను, రేట్లను సగటు చేయడంలోను, పెరుగుదల, తరుగుదల గణన చేయడంలోను ఇది ఎక్కువగా ఉపయోగపడుతుంది.
5. గుణమధ్యమముపై విపరీత విలువల ప్రభావము తక్కువగా వుంటుంది.
6. గుణమధ్యమము కనుగొనుటకు ప్రత్యేక సూత్రముతో బాటు చక్కని పద్ధతి కలదు.
7. గుణమధ్యమము చిన్న అంశాలకు ఎక్కువ భారాన్ని, పెద్ద అంశాలకు తక్కువ భారాన్ని ఆపాదిస్తుంది. అందువలన గుణమధ్యమము విలువ అంకమధ్య విలువ కంటే తక్కువగా వుంటుంది.

లోపాలు

1. గుణమధ్యమములో ప్రధాన దోషము దీనిని తేలికగా అర్థం చేసుకోలేము. దీనిని గణన చేయడం కూడా కష్టమే. సంవర్గమానాలు ఉపయోగించడం తెలియనివారు దీనిని గణన చేయలేరు. అందువలన ఎక్కువ ఆచరణలో లేదు.
2. శ్రేణిలో యే ఒక్క అంశమైన '0' అయితే గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయలేము. ఇది గుణమధ్య గణనలో ముఖ్యమైన పరిమితి.
3. ఇది శ్రేణులలోని ఏ విలువను ప్రతిబింబించక పోవచ్చు.
4. ఋణాత్మక విలువలు వున్నప్పుడు కూడా గుణమధ్యగణన సాధ్యం కాదు.

7.5 హరమధ్యమము (Harmonic Mean)

"దత్తాంశములోని విలువల యొక్క వ్యుత్క్రమాల (reciprocals) అంకమధ్యమానికి వ్యుత్క్రమమే హరమధ్యమానికి సమానమనే'' భావమునిచ్చే నిర్వచనాన్ని యూల్, కెండల్ మహాశయులు ప్రతిపాదించిరి. అనగా దత్తాంశములోని వ్యక్తిగత విలువలకు వ్యుత్క్రమాన్ని కనుగొని, వాటి మొత్తానికి అంకమధ్యమాన్ని కనుగొనవలె. అట్లా వచ్చిన అంకమధ్యమానికి మళ్ళీ వ్యుత్క్రమాన్ని కనుగొంటే అది హరమధ్యమానికి సమానమవుతుంది. కాలము-దూరం, కాలం-పని, రేట్లు మొదలైనవి కనుగొనేందుకు ఇది మంచి సగటు. సాంకేతికంగా పై నిర్వచనాన్ని యిలా చూపవచ్చు. $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అనే N సంఖ్యలు గల చలనాలుంటే వాటి హరమధ్యమము తెలుసుకొనుటకు H.M.

$$\text{HM} = \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}}$$

N = అంశాల సంఖ్య, $\Sigma \frac{1}{x} =$ అంశాల వ్యుత్క్రమాల సంకలనము, $HM =$ హరమధ్యమము

7.5.1 హర మధ్య గణన - వ్యక్తిగత శ్రేణులు : దత్తాంశము వ్యక్తిగత శ్రేణులలో ఉన్నప్పుడు హరమధ్యమం గణన చేయుటకు $\frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}}$ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశములో పది కుటుంబాల రాబడులిచ్చినారు. వాటి నుంచి హరమధ్యమాన్ని గణన చేయండి. రాబడి రూ. 15, 70, 85, 500, 75, 8, 45, 250, 40, 36.

జవాబు : హరమధ్యమము గణన చేయడానికి వ్యుత్క్రమాలు అవసరం కాబట్టి అంశాలకు వ్యుత్క్రమాలను కనుగొని సంకలనము చేయవలె.

కుటుంబము	రాబడి (రూ॥లలో) x	వ్యుత్క్రమాలు (Reciprocals) $\left(\frac{1}{x}\right)$
1	15	.06667
2	70	.01429
3	85	.01176
4	500	.00200
5	75	.01333
6	8	.12500
7	45	.02222
8	250	.00400
9	40	.02500
10	36	.02778
$N = 10$		$\Sigma \frac{1}{x} =$ .31205

హరమధ్యమం(HM) $= \frac{N}{\Sigma \frac{1}{x}} = \frac{10}{.31205} = 32.04$ రూపాయలు.

$\therefore$ రాబడి హరమధ్యమము = రూ. 32.04 పైసలు

7.5.2 విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - హరమధ్యమము : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో హరమధ్య గణనకు ప్రతిచలనానికి వ్యుత్క్రమమును కనుగొని $\left(\frac{1}{x}\right)$ వానిని, అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి, లబ్ధాలను $\left(\Sigma \frac{1}{x} \times f \text{ or } \Sigma \frac{f}{x}\right)$ కనుగొనవలెను. పౌనఃపున్యం మొత్తాన్ని ఈ విలువతో భాగిస్తే హరమధ్యమం వస్తుంది.

$$\text{HM} = \frac{N}{\Sigma\left(\frac{f}{x}\right)}$$

HM = హరమధ్యమం, N = పౌనఃపున్యము మొత్తం, $\Sigma \frac{1}{x} \times f$ లేదా $\Sigma \frac{f}{x}$ = అంశాల వ్యుత్క్రమాలను అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశం నుంచి హరమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	10	15	23	28	35	42	50	58
విద్యార్థులు	3	5	10	12	15	9	5	1

జవాబు :

మార్కులు (x)	విద్యార్థులు (f)	వ్యుత్క్రమాలు $\frac{1}{x}$	అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాలు $\frac{1}{x} \times f$ or $\frac{f}{x}$
10	3	.10000	.30000
15	5	.06667	.33335
23	10	.04348	.43480
28	12	.03571	.42852
35	15	.02857	.42855
42	9	.02381	.20829
50	5	.02000	.10000
58	1	.01724	.01724
	$N = 60$		$\Sigma \frac{f}{x} = 2.25075$

$$\text{HM} = \frac{N}{\Sigma \frac{f}{x}}$$

N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం

$\Sigma \frac{f}{x}$ = అంశాల వ్యుత్క్రమాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించ వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము.

$\text{HM} = \frac{60}{2.25075} = 26.66$ మార్కులు.

$\therefore$ మార్కుల హరమధ్యమము = 26.66

7.5.3 అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - హరమధ్యమము : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులకు హరమధ్య గణనకు తరగతులకు మధ్య విలువలు కనుగొనవలెను (x). మధ్య విలువలకు వ్యుత్క్రమాలను $\left(\frac{1}{x}\right)$ కనుగొనవలె. వ్యుత్క్రమాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా $\left(\frac{1}{x} \times f\right)$, గుణ లబ్ధాల సంకలనము $\left(\Sigma \frac{f}{x}\right)$ కనుగొనవలె. ఆ తరువాత పౌనఃపున్యము మొత్తాన్ని ఈ విలువతో భాగిస్తే హరమధ్యమం లభ్యమవుతుంది.

$$\text{HM} = \frac{N}{\Sigma \frac{f}{x}}$$

N = మొత్తం పౌనఃపున్యము

$\Sigma \frac{f}{x} =$ మధ్య విలువలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన పంపిణీ నుండి హరమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

తరగతి	పౌనఃపున్యము
40 - 50	15
50 - 60	19
60 - 70	20
70 - 80	35
80 - 90	25
90 - 100	16

జవాబు :

తరగతి CI	పౌనఃపున్యము (f)	మధ్య విలువ (x)	మధ్యవిలువల వ్యుత్క్రమాలు $\left(\frac{1}{x}\right)$	$\frac{1}{x} \times f$ or $\frac{f}{x}$
40 - 50	15	45	.222	.3330
50 - 60	19	55	.0182	.3458
60 - 70	20	65	.0154	.3080
70 - 80	35	75	.0133	.4655
80 - 90	25	85	.0118	.2950
90 - 100	17	95	.0105	.1680
	N = 130			1.9153

$$\text{HM} = \frac{N}{\Sigma \frac{f}{x}}$$

$$= \frac{130}{1.9153} = 67.89$$

$\therefore$ హరమధ్యమము = 67.89

హర మధ్యమము - ప్రయోజనాలు

1. హరమధ్యమము నిర్దుష్టంగా నిర్వచింపబడిన సగటు
2. ఇది శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడియుండును. కావున అన్ని అంశాలకు ప్రాతినిధ్యం ఇస్తుంది.
3. బీజీయ ప్రస్తావనకు తగియున్నది.
4. విలువల యొక్క వ్యుత్క్రమాల ఆధారంగా గణన చేయడం వలన, చిన్న విలువలకు ఎక్కువ ప్రాధాన్యత కల్పించబడును. అందువలన శ్రేణిలో ఒకటీ లేక రెండు పెద్ద విలువలున్నప్పటికీ వాటి వలన ప్రభావితము కాదు.
5. శ్రేణిలో గల ఒడుదుడుకులకు ప్రభావితము కాదు.
6. కాలం, రేట్లు మొదలగు సమస్యల అధ్యయనానికి సహాయపడును.

లోపాలు

1. హరమధ్యమాన్ని గణన చేయడం సులభంగా అర్థం చేసుకోవడం కష్టము.
2. శ్రేణిలోని యే ఒక్క అంశము '0' అయినా హరమధ్యగణన సాధ్యపడదు.
3. చిన్న అంశాల ఎక్కువ ప్రాధాన్యత యివ్వడం వలన ఆర్థిక దత్తాంశ విశ్లేషణకు ఉపయోగపడవు. అందువలన వ్యాపార సమస్యల పరిష్కారంలో పెద్దగా వినియోగంలో లేదు.
4. శ్రేణిలో ధనాత్మక, ఋణాత్మక విలువలు రెండూ వుంటే హరమధ్యగణన సాధ్యపడదు.

7.6 మధ్యగతము

విభాజనములోని స్థానాన్ని బట్టి నిర్ణయించే సగటులలో మధ్యగతము ఒకటి. ఇచ్చిన విభాజనాన్ని ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ విలువైతే విభాజనాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుందో ఆ విలువను మధ్యగతం అంటారు. మధ్యగతాన్ని "విభాజనపు కేంద్రీయ విలువ'' లేదా విభాజనాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విడగొట్టే విలువ అంటారు. క్రాక్స్టన్, క్రౌడన్ ప్రముఖులు ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించారు. "విభాజనాన్ని యే విలువ రెండు సమ భాగాలుగా విభాగిస్తుందో అంటే ఏ విలువకు అటూ ఇటూ విభాగాన్ని పొందిన అంశాల సంఖ్య సమానంగా వుంటుందో, ఆ విలువను సాధారణంగా మధ్యగతమని పేర్కొనవచ్చును''.

(The mediam is usually defined as that value which divides a distribution so that an equal number of items is an either side of it).

పై నిర్వచనాన్ని స్పష్టంగా అర్థం చేసుకోవడానికి క్రింది ఉదాహరణ పరిశీలింతుము. ఒక తరగతిలో 7గురు విద్యార్థులున్నారని భావింతుము. వారు సాధించిన మార్కులు వరుసగా 70, 30, 20, 60, 50, 40, 10 వారి మధ్యమ మార్కులు కనుగొనుటకు, మొదటి దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమం 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70 లేదా అవరోహణ క్రమం 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10లోగాని అమర్చవలె. ఈ విధంగా అమర్చినపుడు '40', పై ఏడు విలువలను సమానంగా విభజిస్తుంది. అనగా '40' విలువకు పైన మూడు విలువలు, క్రింద మూడు విలువలు (యిరువైపుల) వున్నాయి. కాబట్టి 40 అనే విలువ మధ్యగతమవుతుంది.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : విభాజనం వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో ఉంటే క్రింది సూత్రం ద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కుంటాం.

$$M = \frac{N+1}{2} \text{ వ అంశం}$$

$M =$ మధ్యగతం, $N =$ అంశాల సంఖ్య

7.6.1 మధ్యగతము - వ్యక్తిగత శ్రేణులు : వ్యక్తిగత శ్రేణులలో మధ్యగతమును గణన చేయుటకు అంశాల పరిమాణాన్ని బట్టి, అంశాలను ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో అమర్చుకోవలె. $\frac{N+1}{2}$ సూత్రం ఆధారంగా మధ్యగత స్థానాన్ని గుర్తించవలె. శ్రేణిలో మధ్యగత స్థానంలో వున్న అంశమే మధ్యగతము. $N =$ శ్రేణిలో గల అంశాల సంఖ్య.

ఉదాహరణ : ఒక సంస్థలో పనిచేయుచున్న 11 మంది కార్మికుల వేతనాలు ఈ విధంగా వున్నవి. వీటి మధ్యగత వేతనము కనుగొనుము.

వేతనాలు - రూ॥లలో 60, 55, 45, 70, 75, 80, 50, 90, 100, 85

జవాబు : మధ్యగతాన్ని గుర్తించుటకు దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో అమర్చవలె. $\frac{N+1}{2}$ సూత్రం ద్వారా మధ్యగత స్థానాన్ని గుర్తించవలె. అమర్చబడిన శ్రేణిలో మధ్యగత స్థానంలో గల అంశమే మధ్యగతము.

క్రమ సంఖ్య	**వేతనాలు - ఆరోహణ క్రమము**
1	45
2	50
3	55
4	60
5	70
6	75
7	80
8	85
9	90
10	95
11	100

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N+1}{2} = \frac{11+2}{2} = \frac{12}{2} = 6$ వ అంశము.

పై దత్తాంశములో 6వ అంశపు విలువ = 75. (75కు రెండు వైపుల గల అంశాలు సమానమని గుర్తింపవచ్చును).

$\therefore$ కార్మికుల మధ్యగత వేతనము = 75 రూపాయలు

దత్తాంశము సరిసంఖ్యలోవున్నప్పుడు (Even number) శ్రేణుల మధ్యస్థానంగా నిజమైన విలువలు ఉండడం అసంభవము. అందువల్ల ఏ రెండు విలువల మధ్య, మధ్యస్థానము గుర్తించబడిందో, ఆ విలువల సగటును తీసుకొని మధ్యగతంగా చెప్పవచ్చు.

ఉదాహరణకు దత్తాంశములో 11 అంశాలకు బదులు 12 అంశాలు వుంటే, మధ్యగత స్థానము $= \frac{12+1}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$ వ అంశమవుతుంది. నిజానికి 65వ స్థానములో సంఖ్య మనకు కనబడదు. అప్పుడు 6వ అంశము, 7వ అంశముల పరిణామాలను తీసుకొని, వాటి సగటును గణన చేస్తే వచ్చిన విలువను మధ్యగతమంటారు.

ఉదాహరణ : పదకొండు మంది విద్యార్థులకు ప్రవేశపరీక్షలో వచ్చిన మార్కుల శాతాలు ఈ విధంగా వున్నాయి. వారి మార్కుల మధ్యగత శాతాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు - 35, 48, 50, 30, 55, 60, 75, 50, 65, 52, 100

జవాబు :

క్రమ సంఖ్య	మార్కులు - ఆరోహణ క్రమము
1	30
2	35
3	48
4	50
5	50
6	$\boxed{52}$
7	55
8	60
9	65
10	75
11	100

మధ్యగత స్థానము $(M) = \frac{N+1}{2}$ వ అంశము

$N =$ అంశాల సంఖ్య = 11,

కాబట్టి మధ్యగత స్థానము = $\frac{11+1}{2} = \frac{12}{2} = 6$ వ అంశము.

6వ అంశము 52 కావున

కాబట్టి మధ్యగత మార్కుల శాతము = 52 మార్కులు.

ఉదాహరణ : కింది విలువలకు మధ్యగతాన్ని కనుగొనుము.

391, 384, 591, 407, 672, 522, 777, 753, 2,488, 1,490

జవాబు :

వరుస సంఖ్య	విభాజనం ఆరోహణలో అమర్చగా(x)	వరుస సంఖ్య	విభాజనం ఆరోహణలో అమర్చగా(x)
1	384	6	672
2	391	7	753
3	405	8	777
4	522	9	1,490
5	591	10	2,488

మధ్యగతం(M) = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం = $\frac{10+1}{2}$ = $\frac{11}{2} = 5.5$ వ అంశం.

కావున 5.5వ అంశం = $\frac{5\text{వ అంశం} + 6\text{వ అంశం}}{2} = \frac{591+672}{2} = \frac{1.263}{2} = 631.5$

కావున మధ్యగతము = 631.5

ఇంకో విధంగా 5.5వ అంశము = 5వ అంశం + (6వ అంశము - 5వ అంశము) · 5

= 591 + (672 - 591) · 5

మధ్యగతం = 631.5

7.6.2 మధ్యగతము - విచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Mediam Discrete Series) : విచ్ఛిన్న శ్రేణిలో వున్న దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ లేదా అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయవలె. పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె (Cumulative frequency)

$M = \frac{N+1}{2}$ అంశం అనే సూత్రాన్ని ఉపయోగించి మధ్యగత అంశాన్ని కనుగొనవలె. మధ్యగత అంశము ఏ సంచిత పౌనఃపున్యములో వున్నదో ఆ సంచిత పౌనఃపున్యానికి అనుబంధంగా (ఎదురుగా) వున్న అంశము (చలనము) మధ్యగతము.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశములో 116 మంది పనివారి రాబడులున్నవి. వారి మధ్యగత రాబడి కనుగొనండి.

రాబడి రూ॥లలో	10	20	30	40	50	60	70	80	90
పనివారు	5	8	12	20	30	16	10	7	8

జవాబు :

రాబడి(x)	పనివారు (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
10	5	5
20	8	13
30	12	25

40	20	45
మధ్యగతం $\boxed{50}$	30	75
60	16	91
70	10	101
80	7	108
90	8	116
	$N = 116$	

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N+1}{2}$ వ అంశము.

N = మొత్తం పౌనఃపున్యము

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N+1}{2} = \frac{116+1}{2} = \frac{117}{2} = 58.5$ వ అంశము.

58.5వ అంశము 75వ సంచిత పౌనఃపున్యములో వున్నది. కాబట్టి దాని అనురూప చలరాశి విలువ 50 మధ్యగతమవుతుంది.

$\therefore$ మధ్యగతానికి రాబడి (M) = రూ. 50.00

7.6.3 మధ్యగతము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Median-Continuous Series) : పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె (cf). $\frac{N}{2}$ సూత్రం వినియోగించి మధ్యగత అంశాన్ని కనుగొనవలె. అది ఏ సంచిత పౌనఃపున్యములో వున్నదో గుర్తించి దాని అనుబంధ తరగతిని మధ్యగత తరగతిగా గుర్తించాలి. క్రింది సూత్రాన్ని వినియోగించి మధ్యగతమును కనుగొనవలె.

$$\text{మధ్యగతము (Median)} = \text{M} = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

ℓ_1 = మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి, ℓ_2 = మధ్యగత తరగతి ఎగువ అవధి, f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యము

m = మధ్యగత తరగతికి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము, N = మొత్తం పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశములో నౌకాదళంలో శిక్షణ పొందుచున్న కేడెట్‌ల గ్రేడ్లు యివ్వబడినవి. వారి గ్రేడ్ల మధ్యగతాన్ని గణించండి.

గ్రేడ్లు (CI)	కేడెట్ల సంఖ్య
72 - 74	7
74 - 76	31
76 - 78	42
78 - 80	54

80 - 82	33
82 - 84	24
84 - 86	22
86 - 88	8
88 - 90	4
	225

జవాబు :

గ్రేడ్లు(CI)	కేడెట్లు (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
72 - 74	7	7
74 - 76	31	38
76 - 78	42	80 (m)
(ℓ_1)78 - 80(ℓ_2)	54 (f)	134 మధ్యగత తరగతి
80 - 82	33	167
82 - 84	24	191
84 - 86	22	213
86 - 88	8	221
88 - 90	4	225
	$N = 225$	

మధ్యగత స్థానము లేదా తరగతి = $\frac{N}{2}$ వ అంశము $\qquad$ $N =$ 225 కావున

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2} = \frac{225}{2} = 112.5$ వ అంశము.

112.5 వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 134లో వున్నది. కనుక దాని అనుబంధ తరగతి 78 - 80. మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

ఇప్పుడు సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తే మధ్యగతము $(\mathrm{M}) = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$

M = మధ్యగతం, $\ell_1 =$ మధ్యగత తరగతి దిగువ అవధి = 78, $\ell_2 =$ మధ్యగత ఎగువ అవధి = 80,

f = మధ్యగత తరగతి పౌనఃపున్యము = 54, $\frac{N}{2} =$ మధ్యగత అంశము = 112.5

$m =$ మధ్యగత తరగతికి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము = 80,

$$M = 78 + \frac{112.5 - 80}{54} \times (80 - 78)$$

$$= 78 + \frac{32.5}{54} \times 2$$

$$= 78 + \frac{65.0}{54}$$

$$= 78 + 1.20 = 79.2$$

$\therefore$ నౌకాదళ కేడెట్‌ల గ్రేడుల మధ్యగతము **= 79.2**

తరగతుల అసమగ్రరూపంలో వున్నప్పుడు : మధ్యగత గణన తరగతులు అప్పుడప్పుడు అసమగ్ర రూపంలో వుంటూ వుంటాయి. (inclusive form) అంటే తరగతి దిగువ, ఎగువ అవధులు అదే తరగతికి చెంది యుండును. అట్లాంటప్పుడు తరగతులను తిరిగి సమగ్రలోని వ్రాసుకొని మధ్యగతాన్ని కనుగొనాలి.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది పట్టీలో 199 మంది విద్యార్థులకు ఒక పరీక్షలో వచ్చిన మార్కుల పౌనఃపున్య విభాజనం యివ్వబడినది. వారి మధ్యగత మార్కులు కనుగొని, కృతార్థులు కావడానికి కనీస మార్కులు 35 అయితే, కృతార్థులు కాని వారి శాతాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
1 - 20	21
21 - 30	19
31 - 40	60
41 - 50	42
51 - 60	24
61 - 70	18
71 - 80	15
	199

జవాబు : పై విభాజనమునందు యివ్వబడిన తరగతులు అసమగ్ర రూపంలో వున్నవి. అనగా 21 - 30 మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థులను ఒకే తరగతిలో చూపబడినవి. కాని 30 - 31 మధ్య మార్కులు వచ్చిన వారిని చేర్చుటకు వీలుగా తరగతులను తిరిగి వ్రాసుకోవాలి. మధ్యగతము, బాహుళకము గణన చేయునపుడు దిగువ అవధులు అవసరము. కాబట్టి తరగతులను సమగ్రరూపములోకి తిరిగి వ్రాసుకొనవలసియున్నది.

నిజమైన తరగతులు (CI)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0.5 - 20.5	21	21
20.5 - 30.5	19	40 (m)
(ℓ_1) 30.5 - 40.5 (ℓ_2)	60 (f)	100 మధ్యగత తరగతి

40.5 - 50.5	42	142
50.5 - 60.5	24	166
60.5 - 70.5	18	184
70.5 - 80.5	15	199
మొత్తం	199	

మధ్యగత స్థానము $= \frac{N}{2}$ వ అంశము. N = 199 కావున

మధ్యగత స్థానం = $\frac{199}{2} = 99.5$వ అంశం.

99.5వ అంశము cf 100లో వుంది కావున సంబంధిత తరగతి 30.5-40.5 అనేది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. మధ్యగత తరగతి = 30.5 - 40.5.

$$\text{మధ్యగతం}\,(\mathrm{M}) = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 = 30.5$, $\ell_2 = 40.5$, $f = 60$, $\frac{N}{2} = 99.5$, $m = 40$.

$$\mathrm{M} = 30.5 + \frac{99.5 - 40}{60}(40.5 - 30.5)$$

$$= 30.5 + \frac{59.5}{60} \times 10$$

$$= 30.5 + 9.91 = 40.41$$

$\therefore$ మధ్యగత మార్కులు (M) = 40.41.

మధ్యవిలువలు - మధ్యగత గణన : ఒక్కొక్కప్పుడు అవిచ్ఛిన్నశ్రేణులలో తరగతులకు బదులు మధ్యవిలువలు యివ్వవచ్చు. అలాంటి పరిస్థితిలో తరగతులను పునఃసృష్టించుకొనవలసి ఉండును. మధ్యగతం గణన చేయుటకు మధ్యగత తరగతి, ఆ తరగతి యొక్క దిగువ అవధి, పౌనఃపున్యము మొదలగునవి అవసరము.

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశమునకు మధ్యగతాన్ని గణన చేయండి.

మధ్యగత విలువలు	పౌనఃపున్యము
115	6
125	25
135	48

145	72
155	116
165	60
175	38
185	22
195	3
మొత్తం	390

పైన యిచ్చిన దత్తాంశములో మధ్య విలువలు మాత్రమే యివ్వబడినవి. కాబట్టి తరగతులను పునర్నిర్మించుకోవలె. మధ్య తరగతులు క్రమంగా 115, 125 అయినపుడు, రెండు మధ్య విలువల మధ్య వ్యత్యాసం. కావున తరగతి అంతరము (125 - 115 = 10) 10కి సమానము. దీనిని రెండు సమాన భాగాలుగా చేస్తే $\frac{10}{2}=5$ వస్తుంది. ఈ 5ను మధ్య విలువ నుండి తీసివేస్తే 115 - 5 = 110 దిగువ అవధి, 115 + 5 = 120 చేస్తే ఎగువ అవధి కనుగొనవచ్చు. అట్లా చేస్తే తరగతులు క్రింది విధంగా యేర్పడును.

పునర్నిర్మించబడిన తరగతులు తరగతి అంతరం (CI)	పౌనఃపున్యము(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
110 - 120	6	6
120 - 130	25	31
130 - 140	48	79
140 - 150	72	151
150 - 160	116	267
160 - 170	60	327
170 - 180	38	365
180 - 190	22	387
190 - 200	3	390
	N = 390	

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ వ అంశం, $N=390$ కావున

మధ్యగతస్థానం $=\frac{390}{2}=195$ వ అంశము.

195వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 267లో వున్నది. దాని కనుబంధంగా ఉన్న తరగతి 150 - 160 మధ్యగత తరగతిగా గుర్తింపవచ్చును.

$$M = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 = 150$, $\ell_2 = 160$, $f = 116$, $\frac{N}{2} = 195$, $m = 151$.

$$M = 150 + \frac{195 - 151}{116}(160 - 150)$$

$$= 150 + \frac{44}{116} \times 10$$

$$= 150 + 3.8 = 153.8$$

$\therefore$ మధ్యగతము = 153.8

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశము నుండి మధ్యగతాన్ని గణన చేయండి.

విలువలు	సంచిత పౌనఃపున్యము
158.5 కంటే తక్కువ	3
167.5 " "	11
176.5 " "	28
185.5 " "	50
194.5 " "	74
203.5 " "	90
212.5 " "	97
221.5 " "	99
230.5 " "	100

ఇచ్చిన విభాజనం కంటే తక్కువ రూపంలో వుంది. ఈ రూపంలో ఇచ్చిన అవధులు ఎగువ అవధులు, ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం వుంటుంది. దీనిని తరగతి అంతరం 167.5కు 158.5 మధ్య తేడా 9 కనుక దానిని తరగతి అంతరంగా తీసుకోవాలి. దీనిని ఎగువ అవధి నుంచి తీసివేసి దిగువ అవధిగా తీసుకొని దత్తాంశం పునర్నిర్మించుకోవాలి. పై దత్తాంశాన్ని సాధారణ పౌనః పున్యంలోకి మార్చుకొని తరగతులను పునర్నిర్మించుకొనవలె.

పునర్నిర్మించబడిన తరగతులు(CI)	పౌనఃపున్యము(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
149.5 - 158.5	3	3
158.5 - 167.5	8	11
167.5 - 176.5	17	28
176.5 - 185.5	22	50

185.5 - 194.5	24	74
194.5 - 203.5	16	90
203.5 - 212.5	7	97
212.5 - 221.5	2	99
221.5 - 230.5	1	100
	$N = 100$	

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ వ అంశం, $N = 100$ కావున

$$\text{మధ్యగతస్థానం} = \frac{100}{2} = 50 \text{ వ అంశము.}$$

50వ అంశమున్న సంచిత పౌనఃపున్యము 50లో వున్నది కావున దాని అనుబంధ తరగతి 176.5 - 185.5 అనేది మధ్యగత తరగతి.

మధ్యగత తరగతి = 176.5 - 185.5

$$\text{మధ్యగతం (M)} = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 = 176.5$, $\ell_2 = 185.5$, $f = 22$, $\frac{N}{2} = 50$, $m = 28$.

$$\text{M} = 176.5 + \frac{50 - 28}{22}(185.5 - 176.5)$$

$$= 176.5 + \frac{22}{22} \times 9$$

$$\text{మధ్యగతం (M)} = 176.5 + 9 = 188.5$$

ఉదాహరణ : దిగువ పట్టీలో ఒక జీవిత భీమా కంపెనీలో 940 మంది బుక్ కీపింగ్ మిషన్ ఆపరేటర్లు పనిచేసే స్త్రీల యొక్క వారసర సంపాదన (Weekly earning) యిచ్చినారు. వారి సంపాదనా మధ్యగతాన్ని గణించండి.

వారసరి సంపాదన(రూ॥ లలో)	స్త్రీల సంఖ్య
(more than) 30 కంటే ఎక్కువ	940
32.5 " "	903
35 " "	825
37.5 " "	646

40	"	"	455
42.50	"	"	271
45	"	"	186
47.5	"	"	103
50	"	"	138
52.5	"	"	6
55	"	"	1

(Date from U.S. Bureau of Labour Statistics wages and salaries - 1952)

జవాబు : పై దత్తాంశము కంటే ఎక్కువ రూపంలో ఉంది. ఇచ్చిన పట్టీలో దిగువ అవధులు మరియు సంచిత పౌనఃపున్యము అవరోహణ క్రమములో వున్నది. రెండు దిగువ అవధుల వ్యత్యాసం తరగతి అంతరం. తరగతుల దిగువ అవధులు అంటే తరగతి అంతరం 32.50 - 30 అంటే 2.5ల దిగువ అవధులకు 2.5 కలుపుకొని ఎగువ అవధులు నిర్ణయించుకొని, సాధారణ పౌనఃపున్య విభాజనాన్ని నిర్మించవలె.

వారసరి సంపాదన(CI)	స్త్రీల సంఖ్య(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
30 - 32.50	37	37
32.50 - 35.00	78	115
35.00 - 37.50	179	294
37.50 - 40.00	191	485
40.00 - 42.50	184	669
42.50 - 45.00	85	754
45.00 - 47.50	83	837
47.50 - 50.00	65	902
50.00 - 52.50	32	934
52.50 - 55.00	5	939
55.00 - 57.00	1	940
	$N = 940$	

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ వ అంశం, $N = 940$ కావున

మధ్యగతస్థానం $= \frac{940}{2} = 470$ వ అంశము.

470వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 485లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి 37.50 - 40.00 అనేది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

మధ్యగత తరగతి = 37.50 - 40.00

$$\text{మధ్యగతం } (\mathrm{M}) = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 = 37.50$, $\ell_2 = 40.00$, $f = 191$, $\frac{N}{2} = 470$, $m = 294$.

$$\mathrm{M} = 37.50 + \frac{470 - 294}{191}(40.00 - 37.50)$$

$$= 37.50 + \frac{176}{191} \times 2.50$$

మధ్యగతం $(\mathrm{M}) = 37.50 + 2.30 = 39.80$

$\therefore$ వారసరి సంపాదన మధ్యగతము $(\mathrm{M}) = 39.80$ రూ॥లు.

ఉదాహరణ : దిగువ దత్తాంశములో 1929 సం॥లో అమెరికాలో వేరువేరు రాబడులు గల వ్యక్తుల వివరాలివ్వబడినవి. వారి సగటు రాబడిని గణన చేయండి.

రాబడి వేలడాలర్లలో	వ్యక్తుల సంఖ్య లక్షలలో	సంచిత పౌనఃపున్యము
(Lessthan) 1 కంటే తక్కువ	13	13
1 - 2	90	103
2 - 3	81	184
3 - 5	117	301
5 - 10	66	367
10 - 25	27	394
25 - 50	6	400
50 - 100	2	402
100 - 1000	2	404
	$N = 404$	

గమనిక : సాధారణంగా రాబడుల విభాజనము తరచు గమనించదగ్గ వైషమ్యమున్న విభాజనం (Skew distribution) వుంటుంది. కాబట్టి ఇలాంటి విభాజనానికి మధ్యగతం గణన చేయడం చాలా మంచి పద్ధతి. ఇతర సగటుల కంటే చాలా మంచి సగటు అవుతుంది. పై దత్తాంశములో గల సాధారణ పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేసి మధ్యగతాన్ని గణన చేయబడినది.

మధ్యగత అంశము = $\frac{N}{2} = \frac{404}{2} = 202$ వ అంశం.

202 అనే అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 301లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 3 - 5 అనేది మధ్యగత తరగతి.

మధ్యగత తరగతి = 3 - 5.

$$\text{మధ్యగతం}\,(\mathrm{M}) = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 = 3,\ \ell_2 = 5,\ f = 117,\ \frac{N}{2} = 202,\ m = 184.$

$$\mathrm{M} = 3 + \frac{202 - 184}{117}(5 - 3)$$

$$= 3 + \frac{18}{117} \times 2 = 3 + \frac{36}{117}$$

$$\text{మధ్యగతం}\,(\mathrm{M}) = 3 + 0.3 = 3.3$$

$\therefore$ తలసరి సగటు రాబడి $(\mathrm{M}) = 3300$ డాలర్లు

మధ్యగతము - ప్రయోజనాలు

1. మధ్యగతము నిర్దుష్టంగా నిర్వచింపబడిన సగటు.
2. మధ్యగతాన్ని సులభంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును. గణిత శాస్త్ర పరిజ్ఞానం ఎక్కువగా లేనివారు కూడా దీనిని సులభంగా గణన చేయవచ్చును.
3. మధ్యగతము స్థాన సగటు కావడం వలన అంశాలలో తీవ్ర ఒడుదుడుకులున్నా దీనిని గణన చేయవచ్చును. అసౌష్టవము లేదా వైషమ్యము కలిగియున్న విభాజనాలలో కూడా దీనిని వినియోగింపవచ్చును.
4. వివృత అవధులున్న (open end classes) విభజనాలకు కూడా మధ్యగతాన్ని గణన చేయవచ్చును.
5. మధ్యగతాన్ని పరిశీలన ద్వారా, రేఖా చిత్రాల ద్వారా కూడా గుర్తింపవచ్చును.
6. గుణాత్మక దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించునపుడు అనగా తెలివితేటలు బీదరికము, అంతస్తులు మొదలైనవి తెలుసుకొనుటకు యిది చాలా ఉపయోగపడును.

లోపాలు

1. మధ్యగతము స్థానాన్ని బట్టి నిర్ణయింపబడడం వలన, దత్తాంశములో అంశాల సంఖ్య సరిసంఖ్య అయితే నిజమైన సంఖ్యను కనుగొనలేము.
2. ఇది విపరీత అంశాలను పరిగణనలోనికి తీసుకోదు.
3. దత్తాంశము "కంటే తక్కువ, కంటె ఎక్కువ" అనే రూపాలలో యిచ్చినపుడు పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేసి, "ఆరోహణ", "అవరోహణ" క్రమాలలో అమర్చుకోవడం ఒక్కొక్కప్పుడు చాలా కష్టము.
4. అంశాలు ఒక క్రమ రూపంలో అమర్చినా అప్పుడప్పుడు మధ్యగతం దత్తాంశం మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే సగటుగా వుండకపోవచ్చు. ఉదా : 10, 12, 15, 20, 90 అనే ఐదు సంఖ్యలున్నప్పుడు 15 మధ్యగతం అవుతుంది. కాని దత్తాంశం మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించదు.

5. బీజీయ ప్రస్తావకనకు నిలబడలేదు.

6. దత్తాంశం ఎక్కువ సంఖ్యలో వున్నప్పుడు ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమాలలో అమర్చడం కష్టం.

7.6.4 మధ్యగత సూత్రంపై ఆధారపడిన యితర స్థానపుమానాలు (Other Positional Measures Related to Mediam) :

శ్రేణులను వివిధ సమాన భాగాలుగా విభజించే విలువలను (partitional values) విభజన విలువలనవచ్చును. మధ్యగతమును దత్తాంశాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా చేయు విభజన విలువ (Partitional value) అనవచ్చును. మధ్యగతం మీద ఆధారపడి అనేక కొలమానాలు రూపొందించబడినాయి. అవి : చతుర్థాంశాలు, పంచమాంశాలు, అష్టాంశాలు, దశాంశాలు, శతాంశాలు. వీటిని గురించి ఇప్పుడు తెలుసుకుందాం.

(ఎ) చతుర్థాంశాలు (Quartiles) : ఇచ్చిన విభాజనాన్ని క్రమపద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ విలువ దత్తాంశాన్ని 4 సమాన భాగాలుగా విభజిస్తుందో దానిని చతుర్థాంశం అందురు. అందులో మూడు చతుర్థాంశాలనే కనుగొంటాము.. Q_1, Q_2, Q_3 అని వాటి క్రమాన్ని బట్టి సాంకేతికంగా సూచిస్తాము. 'Q_1'ను దిగువ లేక ప్రథమ చతుర్థాంశమందురు. దత్తాంశములో గల మొదటి 25% అంశాలు, Q_1 స్థాన పరిధిలో వుండును. Q_2 ద్వితీయ చతుర్థాంశము. ఇది మధ్యగతానికి సమానము కావడం వలన ఈ స్థానానికి ఇరువైపుల అంశాలు సమానంగా(50%) వుండును. Q_3 తృతీయ చతుర్థాంశం లేక ఎగువ చతుర్థాంశం అంటారు. దత్తాంశాన్ని 25% అంశాలు దీని పరిధిలో వుండును. మిగిలిన 75% అంశాలు Q_3కి పై భాగాన ఉంటాయి. వీటి గణన మధ్యగత సూత్రాన్ని పోలి వుంటుంది.

చతుర్థాంశాలు - గణన

వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో అంశాల మొత్తానికి ఒకటి కలిపి చతుర్థాంశ స్థానము నిర్ణయిస్తాము. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాత్రం ఒకటి కలపనవసరం లేదు.

వ్యక్తిగత లేదా విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము.

Q_2 లేదా మధ్యగతం

$Q_2 = \frac{N+1}{4} \times 2$ వ అంశం లేదా $\frac{N+1}{2}$ వ అంశం.

$Q_3 = \frac{N+1}{4} \times 3$ వ అంశము

వ్యక్తిగత శ్రేణులలో $N =$ అంశాల సంఖ్య, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో $N =$ పౌనఃపున్యం మొత్తం.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో చతుర్ధాంశ స్థానములు తెలుసుకొన్న తరువాత మధ్యగతంలో ఉపయోగించిన సూత్రాన్ని పోలిన సూత్రాన్నే ఉపయోగిస్తాము. ఇక్కడ సాంకేతికాలకు అర్థము, మనము గణన చేసే మానాన్ని బట్టి వుంటుంది.

Q_1 స్థానం లేదా తరగతి = $\frac{N}{4}$ వ అంశము. ఈ స్థానాన్ని బట్టి Q_1 తరగతి కనుగొంటాము.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

Q_1 = మొదటి చతుర్థాంశము, ℓ_1 = మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి దిగువ అవధి,

ℓ_2 = మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి ఎగువ అవధి, f = మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి పౌనఃపున్యము

m = చతుర్థాంశ తరగతికి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము, $\frac{N}{4}$ = మొదటి చతుర్థాంశ అంశము.

అలాగే ఎగువ చతుర్థాంశానికి సూత్రాన్ని అన్వయించుకొనవచ్చు.

Q_3 స్థానము లేదా తరగతి = $\frac{3N}{4}$ వ అంశము. ఈ స్థానాన్ని బట్టి Q_3 తరగతి కనుగొంటాము.

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

Q_3 = మూడవ చతుర్థాంశము, ℓ_1 = Q_3 తరగతి దిగువ అవధి,

ℓ_2 = Q_3 తరగతి ఎగువ అవధి, f = Q_3 తరగతి పౌనఃపున్యము

m = Q_3 తరగతి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము,

బి. పంచమాంశాలు (Quintiles) : ఇచ్చిన విభాజనాన్ని ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ అంశము మొత్తం శ్రేణులను ఐదు సమానభాగాలుగా చేస్తుంది దానినే పంచమాంశం అంటారు. దానినే పంచమాంశం అంటారు. దత్తాంశంలో నాలుగు పంచమాలను మాత్రమే కనుగొంటాము. సాంకేతికంగా వానిని q_1, q_2, q_3, q_4 అని వాటి క్రమాన్ని బట్టి పిలుస్తారు. q_1, q_2, q_3, q_4 = ఒకటవ, రెండవ, మూడవ, నాలుగవ పంచమాంశాలు.

మధ్యగతము, చతుర్థాంశాల గణనకు ఉపయోగించిన సూత్రాన్ని పోలిన సూత్రాన్ని ఉపయోగించి అంతర్నివేశనం (interpolation) ద్వారా నిజమైన విలువను కనుగొంటాము.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు

$q_1 = \frac{N+1}{5}$ వ అంశము, $q_2 = \frac{N+1}{5} \times 2$ వ అంశము

$q_3 = \frac{N+1}{5} \times 3$ వ అంశము, $q_4 = \frac{N+1}{5} \times 4$ వ అంశము

q_1, q_2, q_3, q_4 = 1వ, 2వ, 3వ, 4వ పంచమాంశాలు.

N = అంశాల సంఖ్య

విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా q_1, q_2, q_3, q_4లను పైన సూచించిన సూత్రం ప్రకారమే కనుక్కోవడం జరుగుతుంది. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో

N = పౌనఃపున్యం మొత్తం. ఈ విలువలను cf లో కనుగొని ఆ cf కు సంబంధించిన అంశాన్ని సంబంధిత పంచమాంశముగా గుర్తిస్తాం.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొదట పంచమాంశ తరగతులను గుర్తించాలి. తరువాత పంచమాంశాలు కనుగొనాలి.

1వ పంచమాంశం

q_1 తరగతి లేదా స్థానం = $\frac{N}{5}$ వ అంశము

$$q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{5} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

2వ పంచమాంశం

q_2 తరగతి లేదా స్థానం = $\frac{2N}{5}$ వ అంశము

$$q_2 = \ell_1 + \frac{\frac{2N}{5} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

3వ పంచమాంశం

q_3 తరగతి = $\frac{3N}{5}$ వ అంశము

$$q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{5} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

4వ పంచమాంశం

q_4 తరగతి లేదా స్థానం = $\frac{4N}{5}$ వ అంశము

$$q_4 = \ell_1 + \frac{\frac{4N}{5} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

సి. అష్టాంశాలు (Octiles) : ఇచ్చిన విభాజనాన్ని ఒక క్రమపద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ అంశము మొత్తం దత్తాంశాన్ని ఎనిమిది సమాన భాగాలుగా చేస్తుందో ఆ అంశాన్నే అష్టాంశం అంటారు. దత్తాంశములో ఏడు అష్టాంశాలను కనుగొంటాము. సాంకేతికంగా వానిని $O_1, O_2, O_3 \cdots, O_7$ అని వాటి క్రమాన్ని బట్టి పిలుస్తారు. దీని గణన కూడా మధ్యగత సూత్రాన్ని పోలిన సూత్రం ప్రకారం జరుగుతుంది. అష్టమాంశ స్థాన నిర్ణయానికి సూత్రాలు.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు

$O_1 = \frac{N+1}{8}$ వ అంశము

$O_2 = \frac{N+1}{8}$ వ అంశము

$O_3 = \frac{N+1}{8} \times 3$ వ అంశము

$O_4 = \frac{N+1}{8} \times 4$ వ అంశము

$O_5 = \frac{N+1}{8} \times 5$ వ అంశము

$O_6 = \frac{N+1}{8} \times 6$ వ అంశము

$O_7 = \frac{N+1}{8} \times 7$ వ అంశము

N = అంశాల సంఖ్య

విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో కూడా అష్టాంశాలను కనుక్కోవటానికి పై సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాయి. కాని, N అంటే పౌనఃపున్యం మొత్తము.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొదట అష్టాంశ తరగతిని కనుక్కోవాలి. తరువాత అష్టాంశాన్ని కనుగొనవలసి వుంది.

1వ అష్టాంశం

O_1 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{N}{8}$ వ అంశము

$$O_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{8} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

2వ అష్టాంశం

O_2 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{2N}{8}$ వ అంశము

$$O_2 = \ell_1 + \frac{\frac{2N}{8} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

3వ అష్టాంశం

O_3 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{3N}{8}$ వ అంశము

$$O_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{8} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

5వ అష్టాంశం

O_5 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{5N}{8}$ వ అంశము

$$O_5 = \ell_1 + \frac{\frac{5N}{8} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

7వ అష్టాంశం

O_7 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{7N}{8}$ వ అంశము

$$O_7 = \ell_1 + \frac{\frac{7N}{8} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

డి. దశాంశాలు (Deciles) : ఇచ్చిన విభాజనాన్ని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ అంశము మొత్తం దత్తాంశాన్ని 10 సమాన భాగాలుగా చేస్తుందో దానినే దశాంశం అంటాము. దత్తాంశంలో 9 దశాంశాలను కనుగొనడం జరుగుతుంది. సాంకేతికంగా వీనిని $D_1, D_2, D_3, \cdots, D_9$ అనే క్రమాన్ని బట్టి పిలుస్తారు. దీని గణన కూడా మధ్యగత సూత్రాన్ని పోలిన సూత్రం ఆధారంగా జరుగుతుంది. దశాంశ స్థాన నిర్ణయానికి సూత్రాలు. వ్యక్తిగత లేదా విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో

వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులు

$D_1 = \frac{N+1}{10}$ వ అంశము

$D_2 = \frac{N+1}{10} \times 2$ వ అంశము. ......

$D_5 = \frac{N+1}{10} \times 5$ వ అంశము

$D_6 = \frac{N+1}{10} \times 6$ వ అంశము ......

$D_9 = \frac{N+1}{10} \times 9$ వ అంశము

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో N = అంశాల సంఖ్య, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మొదట దశాంశ తరగతిని కనుక్కోవాలి. తరువాత దశాంశాన్ని కనుగొనవలసి వుంది.

1వ దశాంశము

D_1 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{N}{10}$ వ అంశము

$$D_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{10} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

6వ దశాంశము

D_6 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{6N}{10}$ వ అంశము

$$D_6 = \ell_1 + \frac{\frac{6N}{10} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

9వ దశాంశం

D_9 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{9N}{10}$ వ అంశము

$$D_9 = \ell_1 + \frac{\frac{9N}{10} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

ఇ. శతాంశాలు (Percentiles) : ఇచ్చిన విభాజనాన్ని ఒక క్రమ పద్ధతిలో అమర్చిన తరువాత ఏ అంశము మొత్తం శ్రేణిని 100 సమాన భాగాలుగా చేస్తుందో దానినే శతాంశం అంటారు. దత్తాంశానికి 99 శతాంశాలను కనుగొనడం జరుగుతుంది. సాంకేతికంగా వీనిని $P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, P_{99}$ అనే క్రమాన్ని బట్టి పిలుస్తారు. దీని గణన కూడా మధ్యగత సూత్రాన్ని పోలిన సూత్రం మీద ఆధారపడి వున్నది. దీని స్థాన నిర్ణయానికి సూత్రాలు :

వ్యక్తిగత, విచ్ఛిన్న శ్రేణులు

$P_1 = \frac{N+1}{100}$ వ అంశము

$P_{21} = \frac{N+1}{100} \times 21$ వ అంశము

$P_{49} = \frac{N+1}{100} \times 49$ వ అంశము

$P_{99} = \frac{N+1}{100} \times 99$ వ అంశము

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో N = అంశాల సంఖ్య, విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో N = పౌనఃపున్యాల మొత్తం.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు

1వ శతాంశం

P_1 స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{10}{100}$ వ అంశము

$$P_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{100} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

30వ శతాంశం

P_{30} స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{30N}{100}$ వ అంశము

$$P_{30} = \ell_1 + \frac{\frac{30N}{100} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

79వ శతాంశం

P_{79} స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{79N}{100}$ వ అంశము

$$P_{79} = \ell_1 + \frac{\frac{79N}{100} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

99వ శతాంశం

P_{99} స్థానం లేదా తరగతి $= \frac{99N}{100}$ వ అంశము

$$P_{99} = \ell_1 + \frac{\frac{99N}{100} - m}{f}\left(\ell_2 - \ell_1\right)$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో చతుర్థాంశాలు, పంచమాంశాలు, అష్టాంశాలు, దశాంశాలు, శతాంశాలను కనుగొనేందుకు ఉపయోగించే అంతర్నివేశ సూత్ర వివరణ మధ్యగత సూత్ర వివరణను పోలి వుంటుంది. ఏ కొలమానం కనుగొనాలో ఆ కొలమాన ప్రాతిపదికగా వివరణ రాసుకోవలసి వుంటుంది.

అర్థశాస్త్రం, వ్యాపార శాస్త్రాలలో దశాంశాలు, శతాంశాల కంటే చతుర్థాంశాలు ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తాము. కాని దశాంశాలు, శతాంశాలు గ్రేడులు, రేట్లు, ర్యాంకులకు సంబంధించిన మానసిక విద్యా విషయక, గణాంకాలలో ఎక్కువగా ఉపయోగపడతాయి. ద్వితీయ చతుర్థాంశము, 4వ అష్టాంశము, పంచమ దశాంశము, 50వ శతాంశము మధ్యగతానికి సమానము.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - వివిధ మానాల గణన :

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశము నుండి, రెండు చతుర్థాంశాలకు 7వ దశాంశాన్ని, 85వ శతాంశాన్ని గణన చేయండి.
అంశాలు : 31, 42, 53, 64, 28, 29, 49, 18, 14, 71, 78, 85, 25, 58, 38, 90, 60, 20, 40, 35, 75, 81, 73, 55.

పై దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో ఏర్పరచి స్థానాలను, విలువలను కనుగొందుము.

జవాబు :

క్రమ సంఖ్య	అంశములు (x)
1	14
2	18
3	20
4	25
5	28
6	29
7	31
8	35
9	38
10	40
11	42
12	49
13	53
14	55
15	58
16	60
17	64
18	71
19	73
20	75
21	78
22	81
23	85
24	90
$N = 24$	

దిగువ చతుర్థాంశం (Q_1)

$Q_1 = \frac{(N+1)}{4}$ వ అంశం,

$= \frac{24+1}{4} = \frac{25}{4} = 6.25$ వ అంశం

6.25 వ అంశం = 6వ అంశము + (7వ అంశం - 6వ అంశం) × 0.25

= 29 + (31 - 29) × 0.25

= 29 + (2 × 0.25)

= 29 + 0.50

6.25 వ అంశం = 29.5. కావున $Q_1 = 29.5$

ఎగువ చతుర్థాంశం (Q_3)

$Q_3 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ 3వ అంశము

$= \left(\frac{24+1}{4}\right)3 = \left(\frac{25}{4}\right)3 = 6.25 \times 3 = 18.75$ వ అంశము

18.75వ అంశం = 18వ అంశము + (19వ అంశం - 18వ అంశం) × 0.75

= 71 + (73 - 71) × 0.75

= 71 + 2 × 0.75

= 71 + 1.50

18.75వ అంశం = 72.5 కావున

$\therefore$ ఎగువ చతుర్థాంశము (Q_3) = 76.5

7వ దశాంశ స్థానము

$D_7 = \left(\frac{N+1}{10}\right) \times 7$ వ అంశం

$= \left(\frac{24+1}{10}\right) \times 7$ వ అంశం

$= \frac{25}{10} \times 7$వ అంశం

$= 2.5 \times 7$వ అంశం

D_7 = 17.5వ అంశము

17.5వ అంశము = 17వ అంశము + (18వ అంశం - 17వ అంశం) × 0.5

= 64 + (71 - 64) × .5

= 64 + (7 × .5)

= 64 + 3.5

17.5వ అంశము= 67.5 కావున D_7 = 67.5

85వ శతాంశ స్థానము (P_{85})

$P_{85} = \left(\frac{N+1}{100}\right)$ 85వ అంశము

$= \left(\frac{24+1}{100}\right) 85$వ అంశం

$= \frac{25}{100} \times 85$వ అంశం

P_{85} = 0.25 × 85 = 21.25 అంశము

21.25వ అంశము = 21వ అంశము + (22వ అంశం - 21వ అంశం) × 0.25

= 78 + (81 - 78) × 0.25

= 78 + (3 × 0.25)

= 78 + 0.75

21.25వ అంశం = 78.75 కావున $P_{85} = 78.75$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - వివిధ మానాల గణన : ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల ఎత్తులు దిగువ పట్టీలో వున్నాయి. దీనిలో రెండు చతుర్థాంశాలు, 3వ అష్టాంశము, 8వ దశాంశము, 95వ శతాంశమును కనుగొనండి.

ఎత్తు (సెం.మీ)	విద్యార్థుల సంఖ్య
157	10
168	13

173	2
152	1
162	25
176	1
170	6
160	12
155	5
172	3
164	38
171	4

జవాబు : దత్తాంశాన్ని ఆరోహణ లేక అవరోహణ క్రమంలో వ్రాసుకొన్న తరువాత సాధారణ పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె. దాని ఆధారంగా వివిధ మానాల స్థానాల విలువలను గుర్తింపవచ్చును.

ఎత్తు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
152	1	1
155	5	6
157	10	16
160	12	28
162	25	53
164	38	91
168	13	104
170	6	110
171	4	114
172	3	117
173	2	119
176	1	120
	$N = 120$	

దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right) \text{వ అంశం}, \quad N = 120$$

$$Q_1 = \frac{120+1}{4} = \frac{121}{4} = 30.25 \text{వ అంశం}.$$

30.25 అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 53లో వున్నది. కనుక దానికి అనుబంధంగా వున్న అంశము విలువ 162 దిగువ చతుర్థాంశమగును.

$\therefore$ దిగువ చతుర్థాంశము (Q_1) = 162 సెంటీమీటర్లు.

ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానము

$$Q_3 = \left(\frac{N+1}{4}\right)3 \text{ వ అంశం}$$

$$= \left(\frac{120+1}{4}\right)3 = 30.25\times 3 = 90.75 \text{ వ అంశం.}$$

90.75 అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 91లో వున్నది. దాని అనుబంధ అంశము 164 ఎగువ చతుర్థాంశమగును.

$\therefore$ ఎగువ చతుర్థాంశము(Q_3) = 164 సెంటీమీటర్లు.

3వ అష్టాంశ స్థానము

$$O_3 = \left(\frac{N+1}{8}\right)3 \text{ వ అంశము}$$

$$= \left(\frac{120\times 1}{8}\right)3 = 15.125\times 3 = 45.375 \text{ వ అంశము.}$$

45.375వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 53లో వున్నది. దాని అనుబంధ చలరాశి విలువ 162. 3వ అష్టాంశము అవుతుంది. O_3 = 162 సెం.మీటర్లు

8వ దశాంశం

$$D_8 = \left(\frac{N+1}{10}\right)8 \text{ వ అంశము}$$

$$= \left(\frac{120+1}{10}\right)8 = 12.1\times 8 = 96.8 \text{ వ అంశము.}$$

96.8వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 104లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ చలనము 168. 8వ దశాంశము అవుతుంది. $D_8 = 168$ సెం.మీటర్లు.

95వ దశాంశ స్థానము

$$P_{95} = \left(\frac{N+1}{100}\right)95 \text{ వ అంశము}$$

$$= \left(\frac{120+1}{100}\right)95 = \frac{121}{100}\times 95 = 1.21\times 95 = 114.95 \text{ వ అంశము.}$$

114.95వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 117లో వున్నది కాబట్టి దాని అనుబంధము విలువ 172.

95వ శతాంశము అవుతుంది.

$P_{95} = 172$ సెం.మీటర్లు.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - వివిధ మానాల గణన : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో స్థానమానాల గణనకు పౌనఃపున్యానికి 1 కలపవలసిన అవసరము లేదు. ఎందుకంటే ఇది అంచనా వేసిన విలువ పూర్తి ఖచ్చితత్వం సాధ్యం కాదు. సంబంధిత సూత్రాల ఆధారంగా స్థానాలను కనుగొని విలువలకు గుర్తింపవచ్చును.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనం నుండి (1) మధ్యగతాన్ని (2) దిగువ చతుర్థాంశాన్ని (3) 7వ దశాంశాన్ని (4) 85వ శతాంశాన్ని గణన చేయండి. గణాంక శాస్త్రంలో 146 మందికి వచ్చిన మార్కులు యివ్వబడినవి.

మార్కులు	విద్యార్థులు	మార్కులు	విద్యార్థులు
10కి లోపు	8	40 - 50	30
10 - 20	12	50 - 60	28
20 - 30	20	60 - 70	12
30 - 40	32	70 పైన	4

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
10కి లోపు	8	8
10 - 20	12	20
20 - 30	20	40
30 - 40	32	72
40 - 50	30	102
50 - 60	28	130
60 - 70	12	142
70 పైన	4	146
	$N = 146$	

(i) మధ్యగతము (M) : మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ అంశము, $N = 146$

$$= \frac{146}{2} = 73\text{వ అంశము}$$

73వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 102లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ తరగతి 40 - 50 మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

మధ్యగత తరగతి = 40 - 50

$$\text{మధ్యగతము } M = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 40;\ \ell_2 = 50;\ \ f = 30;\ \frac{N}{2} = 73;\ m = 72$$

$$M = 40 + \frac{73-72}{30} \times (50-40)$$

$$= 40 + \frac{1 \times 10}{30}$$

$$= 40 + .33$$

M = 40.33 మార్కులు

(ii) దిగువ చతుర్థాంశము (Q_1) : దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము = $\frac{N}{4}$ వ అంశము

$$= \frac{146}{4} = 36.5 \text{ వ అంశము.}$$

36.5వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 40లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 20 - 30దిగువ చతుర్థాంశ తరగతి.

Q_1 తరగతి = 20 - 30

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 20;\ \ell_2 = 30;\ f = 20;\ \frac{N}{4} = 36.5;\quad m = 20$$

$$\therefore Q_1 = 20 + \frac{36.5-20}{20}(30-20)$$

$$= 20 + \frac{16.5 \times 10}{20}$$

$$= 20 + 8.25$$

$Q_1 = 28.25$ మార్కులు

(iii) 7వ దశాంశము (D_7)

7వ దశాంశ స్థానము = $\frac{N}{10} \times 7$వ అంశము

$$= \frac{146}{10} \times 7 \text{ వ అంశము}$$

$$= 14.6 \times 7 = 102.2 \text{ వ అంశము.}$$

102.2వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 130లో వున్నది. కనుక దాని అనుబంధ తరగతి 50 - 60 అనేది 7వ దశాంశ తరగతి.

7వ దశాంశము = $D_7 = \ell_1 + \dfrac{\dfrac{7N}{10} - m}{f}(\ell_1 - \ell_2)$

$\ell_1 = 50;\ \ell_2 = 60;\ f = 28;\ \dfrac{7N}{10} = 102.2;\quad m = 102$

$D_7 = 50 + \dfrac{(102 - 102)}{28}(60 - 50)$

$= 50 + \dfrac{0.2 \times 10}{28}$

$= 50 + 0.07$

$D_7 = 50.07$ మార్కులు

(iv) 85వ శతాంశము (P_{85})

85వ శతాంశ స్థానము = $\dfrac{N}{100} \times 85$ వ అంశము

$= \dfrac{146}{100} \times 85 = 124.1$ వ అంశము

124.1 వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 130లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 50 - 60, అనేది 85వ శతాంశ తరగతి.

85వ శతాంశం (P_{85}) = $\ell_1 + \dfrac{\dfrac{85N}{100} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$

$\ell_1 = 50;\ \ell_2 = 60;\ f = 28;\ \dfrac{85N}{100} = 124.1;\quad m = 102$

$P_{85} = 50 + \dfrac{124.1 - 102}{28}(60 - 50)$

$= 50 + \dfrac{22.1 \times 10}{28}$

$= 50 + 7.89$

$P_{85} = 57.89$ మార్కులు

ఉదాహరణ : క్రింద యిచ్చిన దత్తాంశము నుండి (1) మధ్యగతాన్ని (2) దిగువ చతుర్థాంశాన్ని (3) 6వ దశాంశాన్ని (4) 3వ శతాంశాన్ని కనుగొనండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
(Lessthan)80 కంటే తక్కువ	100
70 " "	90
60 " "	80
50 " "	60
40 " "	32
30 " "	20
20 " "	13
10 " "	5

జవాబు : యివ్వబడిన దత్తాంశము కంటే ఎక్కువ రూపంలో వున్నది. పౌనఃపున్యము అవరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యములో వున్నది. కాబట్టి తరగతి అవధులు, అంతరము యేర్పరచి, సాధారణ పౌనఃపున్య విభాజనంగా వ్రాయవలె. కంటే తక్కువ పద్ధతిలో ఇచ్చిన అవధులు తరగతి ఎగువ అవధులుగా గుర్తించి, తరగతి అంతరం 10 అని గ్రహించి తరగతులను పునర్నిర్మించడమైనది.

మార్కులు తరగతులు పునర్నిర్మించబడినవి (CI)	విద్యార్థులు (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
0 - 10	5	5
10 - 20	8	13
20 - 30	7	20
30 - 40	12	32
40 - 50	28	60
50 - 60	20	80
60 - 70	10	90
70 - 80	10	100
	$N = 100$	

(i) మధ్యగతము (M)

$$\text{మధ్యగత స్థానము} = \frac{N}{2}\text{వ అంశము} = \frac{100}{2} = 50\text{వ అంశము.}$$

50వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 60లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి 40 - 50 అనేది మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

$$M = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 40;\ \ell_2 = 50;\ f = 28;\ \frac{N}{2} = 50;\quad m = 32$$

$$M = 40 + \frac{50-32}{28}(50-40)$$

$$= 40 + \frac{18 \times 10}{28}$$

= 40 + 6.42

M **= 46.42** మార్కులు

(ii**)** దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము (Q_1) **=** $\frac{N}{4}$ వ అంశము

$$= \frac{100}{4} = 25 \text{ వ అంశము}$$

25వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము **32**లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి **30 - 40** అనేది దిగువ చతుర్థాంశ తరగతి అవుతుంది.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 30;\ \ell_2 = 40;\ f = 12;\ \frac{N}{4} = 25;\ m = 20$$

$$Q_1 = 30 + \frac{(25-20)}{12}(40-30) = 30 + \frac{5 \times 10}{12}$$

= 30 + 4.16 = 34.16 మార్కులు

(iii**) 6**వ దశాంశ స్థానము (D_6) **=** $\frac{N}{10} \times 6$ వ అంశం

$$= \frac{100 \times 6}{10} = 60 \text{ వ అంశము.}$$

60 అనే అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 60లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 40 - 50 అనేది D_6 తరగతి అవుతుంది.

$$D_6 = 40 + \frac{60-32}{28}(50-40)$$

$$= 40 + \frac{28 \times 10}{28}$$

$$D_6 = 40 + 10 = 50 \text{ మార్కులు}$$

(iii) 3వ శతాంశ స్థానము (P_3) = $\frac{N}{100} \times 3$ వ అంశం.

$$= \frac{100}{100} \times 3 \text{ వ అంశము.}$$

3వ అంశం సంచిత పౌనఃపున్యము 5లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 0 - 10 అనేది P_3 తరగతి అవుతుంది.

$$P_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{100} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 0; \quad \ell_2 = 10; \quad f = 5; \quad \frac{3N}{100} = 3; \quad m = 0$$

$$P_3 = 0 + \frac{3-0}{5}(10-0)$$

$$P_3 = \frac{10 \times 3}{5} = \frac{30}{5} = 6 \text{ మార్కులు}$$

రేఖా చిత్ర పద్ధతి - మధ్యగత గణన (Calculation of Median by Graphic Method)

రేఖా చిత్ర పటం ద్వారా మధ్యగతం, దాని మీద ఆధారపడిన ఇతర స్థానమానాలను కూడా గణన చేయవచ్చును. ఇందుకు ఓజిల్ వక్రరేఖను (Ogine curve) లేదా సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను గీయవలె. ఈ ఓజివ్ వక్రరేఖలు 'కంటే తక్కువ', 'కంటే ఎక్కువ' అని రెండు రకములు. ఓజివ్ వక్ర రేఖ ద్వారా మధ్యగతాన్ని రెండు రకాలుగా గుర్తింపవచ్చును. అవి ఎ) కేవలం కంటే తక్కువ రేఖ ద్వారా, బి) కంటే తక్కువ, కంటే ఎక్కువ రేఖల రెండింటి ద్వారా.

(ఎ) కంటే తక్కువ ఓజివ్ వక్రరేఖ ద్వారా : సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖనే ఓజివ్ వక్రరేఖ అంటారు. కంటే తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య పట్టీ ఆధారంగా దీన్ని రూపొందిస్తారు. రేఖాపటంలో ఎగువ అవధులకు, సంబంధిత పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని బిందువులతో గుర్తించి వాటిని కలిపితే ఈ రేఖ వస్తుంది. ఈ వక్రరేఖ ఆరోహణ క్రమాన్ని చూపుతుంది (Raising trend). చలనాలను లేదా తరగతి అంతరాలు x - అక్షం (x - axis) మీద , సంచిత పౌనఃపున్యాన్ని y - అక్షం మీద (y - axis) తీసుకోవలె. కంటే తక్కువ సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖను నిర్మించిన తరువాత 'మధ్యగత' బిందువును

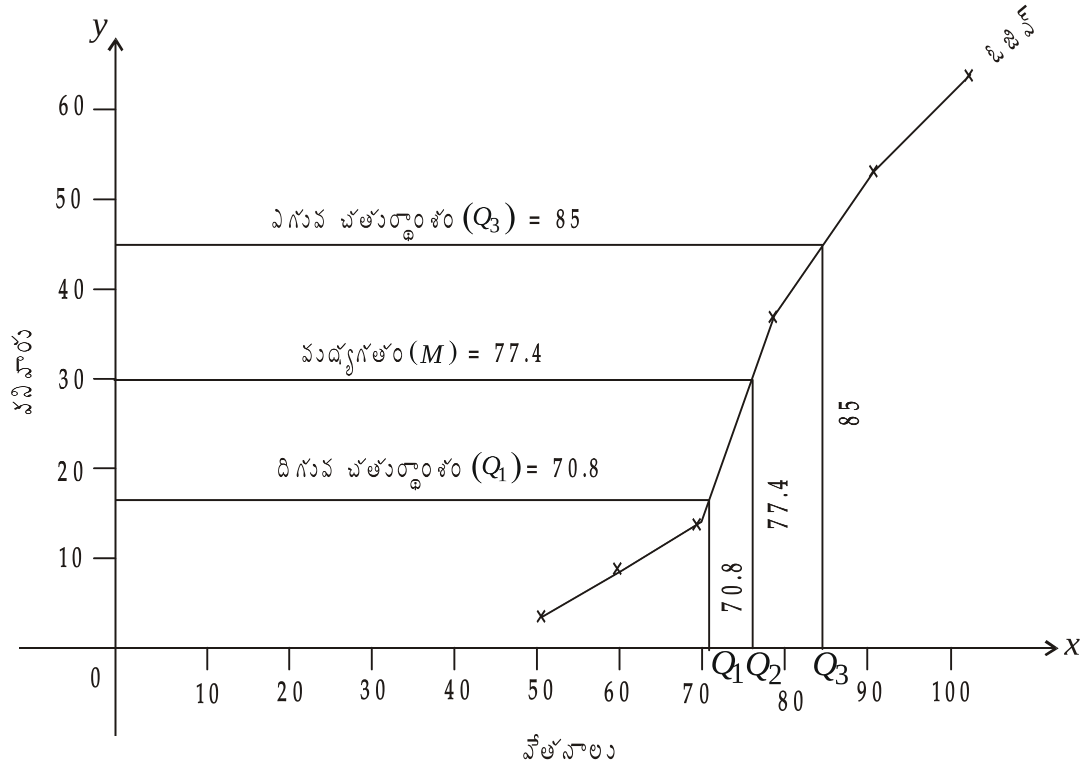
$\frac{N}{2}$ అనే సూత్రం ద్వారా తెలుసుకోవలె. అట్లా తెలుసుకొన్న బిందువును ఊర్ధ్వ లేదా నిలువు అక్షము (vertical axis) అంటే y- అక్షము మీద గుర్తించి, ఓజివ్ రేఖకు పొడిగింపవలె. పొడిగింపబడిన రేఖ ఓజివ్ రేఖను తాకిన బిందువు నుండి x - అక్షానికి (Base) లంబరేఖను గీస్తే అది x- అక్షంపై ఏ బిందువునైతే తాకుతుందో ఆ బిందువు విలువ మధ్యగతానికి సమానమవుతుంది. అట్లాగే మధ్యగత సూత్రంపై ఆధారపడి వున్న ఇతర మానాలు అంటే చుతుర్థాంశాలు, దశాంశాలు, శతాంశాలు మొదలైనవి కూడా ఈ పద్ధతి ద్వారా కూడా కనుక్కోవచ్చు.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశము నుండి మధ్యగతాన్ని ఎగువ, దిగువ చతుర్థాంశాలను రేఖా చిత్రపటం ద్వారా కనుక్కోండి.

వేతనాలు	పనివారి సంఖ్య
40 - 50	1
50 - 60	3
60 - 70	9
70 - 80	23
80 - 90	16
90 - 100	8

జవాబు : సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖ (ఓజివ్ వక్రరేఖ) ద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుగొనవలసియున్నందున దత్తాంశములో యివ్వబడిన సాధారణ పౌనఃపున్యాన్ని ఆరోహణ క్రమంలో సంచిత పౌనఃపున్యము చేయవలె (కంటే తక్కువ). x- అక్షముపై వేతనాలు, y- అక్షముపై పనివారిని తీసుకోవలెను. ఎగువ అవధులకు సంచిత పౌనఃపున్యానికి గల సంబంధాన్ని బిందువులతో గుర్తించి వాటిని కలుపవలె. ఆ తరువాత $\frac{N}{2}$ సూత్రం ద్వారా మధ్యగత బిందువు లేక అంశాన్ని గుర్తించవలె. $\frac{60}{2}=30$, దానిని y- అక్షముపై గుర్తించి ఒక రేఖను ఓజివ్ వైపునకు పొడిగించి, అది ఓజిల్‌ను తాకుతుందో అక్కడి నుండి x- అక్షానికి లంబ రేఖను గీయవలె. అది x- అక్షాన్ని తాకిన బిందువు మధ్యగత విలువను సూచించును. అదే విధంగా $\frac{N}{4}$ ద్వారా దిగువ చతుర్థాంశం, $\frac{3N}{4}$ ద్వారా అయితే ఎగువ చతుర్థాంశం వస్తుంది.

వేతనాలు(C.I.)	పనివారు (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)	
40 - 50	1	1	
50 - 60	3	4	
60 - 70	9	13	$Q_1 = 71$
70 - 80	23	36	$Q_3 = 85$
80 - 90	16	52	Q_2 or Median = 77.4
90 - 100	8	60	



ఓజిల్ నుంచి భూమికి గీచిన లంబరేఖ 77.4 వద్ద భూమిని x - అక్షాన్ని తాకుచున్నది.
కాబట్టి మధ్యగతము 77.4కు సమానము

పై ఉదాహరణలో Q_1, Q_3 స్థానాలకు కూడా గుర్తించడం జరిగింది. Q_1 స్థానము $= \frac{N}{4} = \frac{60}{4} = 15$వ అంశము.

15వ అంశాన్ని y - అక్షంపై గుర్తించి, రేఖను ఓజిల్ రేఖకు పొడిగించి, ఓజిల్‌ను తాకిన బిందువు నుండి x - అక్షానికి లంబరేఖను గీయడం ద్వారా Q_1 విలువ 71గా గుర్తింపవచ్చును. అదే విధంగా Q_3 అంశము $\frac{3N}{4} = \frac{60}{4} = 45$వ అంశం. y - అక్షంపై 45వ అంశము నుండి ఓజిల్‌కు పొడిగింప బడిన రేఖ ఓజిల్‌ను తాకిన బిందువు నుండి x - అక్షానికి లంబరేఖ గీయడం ద్వారా Q_3 విలువ 85గా గుర్తింపవచ్చును.

(బి) "కంటే ఎక్కువ" - "కంటే తక్కువ" ఓజివ్ వక్రరేఖలు (By less than and More than Ogive curves) : తరగతి ఎగువ అవధి ఆధారంగా "కంటె తక్కువ'' రూపంలో మార్చితే వచ్చే పౌనఃపున్యాన్ని ఆరోహణ సంచిత పౌనఃపున్యం అంటారు. తరగతి దిగువ అవధి ఆధారంగా "కంటే ఎక్కువ'' అని పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేస్తే అవరోహణ సంచిత పౌనః పున్యమేర్పడును. ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమంలో గల సంచిత పౌనఃపున్యాలను పటంలో గుర్తిస్తే యేర్పడే రెండు వక్రరేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొంటాయి. ఆ ఖండన బిందువు నుంచి x - అక్షానికి లంబరేఖను గీస్తే అది x - అక్షాన్ని తాకిన బిందువు మధ్యగతాన్ని సూచించును. ఇట్లా గీసిన రేఖల అవధుల ఆధారంగా "కంటే ఎక్కువ'' "కంటే తక్కువ'' అని చదవడం వల్ల ఈ వక్రరేఖలు "కంటే ఎక్కువ'' "కంటే తక్కువ'' వక్రరేఖలుగా సాధారణంగా వాడుకలో వున్నాయి.

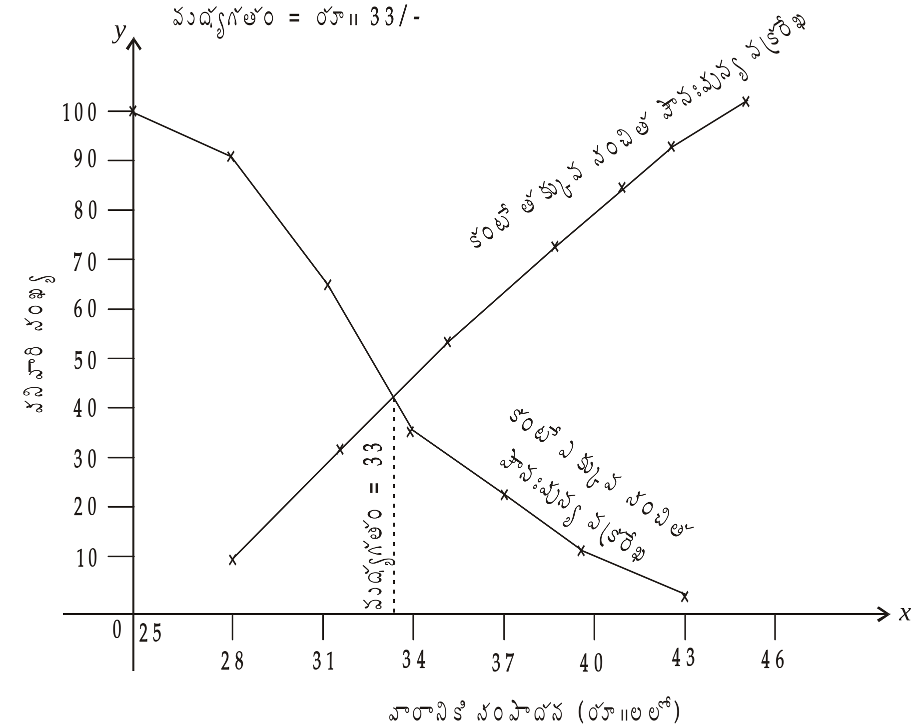
ఉదాహరణ : దిగువ దత్తాంశంలో "కంటే ఎక్కువ" "కంటే తక్కువ" (More than and Less than) సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను గీసి మధ్యగతాన్ని కనుగొనండి.

వారపు సంపాదన (రూ॥లలో)	పనివారి సంఖ్య
25 - 28	10
28 - 31	23
31 - 34	26
34 - 37	19
37 - 40	10
40 - 43	8
43 - 46	4
	$N = 100$

సూత్రాన్ని ఉపయోగించి ఫలితాన్ని సరిచూడండి.

జవాబు : సాధారణ పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేసి ఆరోహణ, అవరోహణ క్రమాలలో రెండు సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు గీస్తే, అవి ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనే బిందువు, మధ్యగత బిందువగును. ఆ బిందువు నుండి x- అక్షానికి లంబరేఖను గీస్తే, మధ్యగతం విలువ తెలుస్తుంది.

వారపు సంపాదన (రూ॥లలో)	పని వారి సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)	
		ఆరోహణలో (కంటే తక్కువ)	అవరోహణలో (కంటే తక్కువ)
25 - 28	10	10	100
28 - 31	23	33	90
31 - 34	26	59	67
34 - 37	19	78	41
37 - 40	10	88	22
40 - 43	8	96	12
43 - 46	4	100	4
	$N = 100$		



రేఖాపటంలో విలువను గణన ద్వారా సరిచూడవచ్చు. ప్రస్తుతం మధ్యగతాన్ని గణన ద్వారా కనుగొందాము.

మధ్యగత స్థానం = $\frac{N}{2} = \frac{100}{2} = 50$ వ అంశం, **50** అనే అంశం cf **59**లో వుంది కావున మధ్యగత తరగతి **31 - 34**

$$M = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 31;\ \ \ell_2 = 34;\ \ f = 26;\ \ \frac{N}{2} = 50;\ \ m = 33$$

$$\text{M} = 31 + \frac{(50-33)}{26}(34-31)$$

$$= 31 + \frac{17 \times 3}{26}$$

$$\text{M} = 31 + 1.96 = 32.96$$

రేఖాపటం ద్వారా సూత్రం ద్వారా మధ్యగతం ఒకే విధంగా ఉంది.

7.7 బాహుళకము (Mode)

మనము 'సగటు విద్యార్థికి' (Average student) 35 మార్కులు వచ్చినపుడు, భారతదేశంలో పురుషుని సగటు ఎత్తు 5'-6" అనినప్పుడు, ఒక ప్రాంతంలో సామాన్య రోగము గుండె జబ్బు అన్నప్పుడు అనుకోకుండా బాహుళకాన్ని గూర్చి మాట్లాడుతున్నానన్నమాట. అంటే 35 మార్కులు వచ్చినవాడు సగటు విద్యార్థి అన్నప్పుడు, ఎక్కువ మందికి 35 మార్కులు వచ్చినవని భారతదేశంలో పురుషుని సగటు వయస్సు 5'-6" అన్నప్పుడు ఎక్కువ మంది పురుషుల ఎత్తు 5'-6" అని, ఒక ప్రాంతంలో సాధారణ రోగం గుండె జబ్బు అన్నప్పుడు ఎక్కువ మంది ఆ రోగానికి గురియైనాదని భావన. ఇలాంటి సందర్భాల్లో ఉపయోగించే సగటు బాహుళకం. బాహుళకము కూడా స్థానాన్ని బట్టి నిర్ణయించబడే సగటు (Positional average).

ఆంగ్ల భాషలో బాహుళకాన్ని మోడ్ (Mode) అంటారు. మోడ్ అనే మాట ల-మోడ్ (La-Mode) అనే ఫ్రెంచి పదం నుండి గ్రహించబడినది. దీని అర్థం ఫాషన్ (Fashion) ఒక శ్రేణిలో అత్యధికంగా పునరావృతమయ్యే విలువను బాహుళకమంటారు. జీజక్ అనే మహాశయుడు బాహుళకాన్ని ఈ విధంగా నిర్వచించెను శ్రేణులలో వున్న అంశాలలో యే విలువ అతి తరచుగా వస్తుందో, మరియు ఏ విలువ చుట్టూ అధికంగా యితర విలువలు పంపిణీ జరుగుతుందో ఆ విలువను బాహుళకమని చెప్పవచ్చు.

కెన్నీ ప్రకారం "పంపిణీలో ఏ చలనము యొక్క విలువ అతి తరచుగా వస్తున్నదో దానిని బాహుళకమంటారు''. దీనిని అత్యధిక సాంద్రత గల బిందువు లేదా పౌనఃపున్య విభాజనములో అత్యధిక పౌనఃపున్యాలు గల విలువ అని చెప్పవచ్చు. గణాంకశాస్త్రవేత్తల అభిప్రాయాలను బట్టి బాహుళక మంటే శ్రేణులలో అత్యధికంగా గోచరించే విలువలనీ, అతి సామాన్యమైన విలువలనీ గ్రహించవచ్చును.

వాస్తవానికి వ్యక్తిగత శ్రేణులలో బాహుళకాన్ని నిర్ణయించలేమని, వ్యక్తిగత శ్రేణులను, విచ్ఛిన్న లేదా అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులుగా తీసుకొని వాటికెదురుగా పౌనఃపున్యాన్ని వ్రాసుకొంటే, అధిక పౌనఃపున్యము గలది. విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో బాహుళకమని, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో బాహుళకపు తరగతని అంటాము.

7.7.1 వ్యక్తిగత శ్రేణులు - బాహుళకము : వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో గణన చేయడం (Mode-Micomputation) వ్యక్తిగత శ్రేణిలో ఏ విలువ హెచ్చుసార్లు లభ్యమౌతుందో దానిని బాహుళకమంటారు. నిజానికి అవి లెక్కించినపుడు వాటి పౌనఃపున్యాన్ని తీసుకుంటాము.

ఉదాహరణ : 68, 72, 85, 94, 72, 100, 94, 115, 72 ఈ సంఖ్యలలో 72 మూడు సార్లు కనిపించడం వల్ల 72ను బాహుళకంగా చెప్పవచ్చు.

ఒకవేళ రెండు అంశాలు సమానంగా లభ్యమైతే ద్విబాహుళకం విభాజనం, రెండుకు మించితే బహు బాహుళకపు విభాజనం అంటారు. ఆ సందర్భాల్లో బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చు. ఆ సందర్భాల్లో తగు సూత్రాన్ని ఉపయోగించి బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చు.

7.7.2 విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - బాహుళకము : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో దత్తాంశాన్ని పరిశీలించడం వల్ల బాహుళకాన్ని నిర్ణయించవచ్చు. అంటే పౌనఃపున్యము అత్యధికంగా ఏ విలువ దగ్గర వున్నదో చూసి లేదా అధిక సాంద్రత వుంటుందో చూచి బాహుళకాన్ని నిర్ణయింపవచ్చు. కాని కొన్ని సందర్భాల్లో పరిశీలన వల్ల కనుగొనలేము కూడా. అందువల్ల ఈ విభాజనానికి వర్గీకృత, విశ్లేషణ పట్టికలను రూపొందించడం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుగొంటాము.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశము నుండి బాహుళకాన్ని కనుగొనండి.

ఆదాయాలు (రూ॥)	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
వ్యక్తుల సంఖ్య	20	30	26	40	35	28	6	1

జవాబు :

వర్గీకృత పట్టీ

రెండు చొప్పున మూడు చొప్పున కూడగా

ఆదాయాలు(x)	వ్యక్తుల సంఖ్య (f)	3	4	5	6	7
	I	**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
3000	20					
		50				
4000	30			76		
			56			
5000	26				(96)	
		(66)				
6000	(40)					(101)
			(75)			
7000	35			(103)		
		63				
8000	28				69	
			34			
9000	6					35
		7				
10,000	1					

వర్గీకృత పట్టికలో రోమన్ అంకెల్లో చూపిన వరుసలో అధిక విలువలను బ్రాకెట్లలో చూపటం జరిగింది. వీటి ఆధారంగా విశ్లేషణ పట్టికలో గణ చిహ్నాలు గుర్తించి అత్యధిక సంఖ్య గణచిహ్నాలు ఎక్కువ గల అంశము ఎక్కువసార్లు పునరావృతమైనదిగా గ్రహించి ఆ విలువను బాహుళకంగా గుర్తింపబడును. వర్గీకృత పట్టీలో I వరుసలో అత్యధిక పౌనఃపున్యం 40 కలిగిన 6000 అంశానికి గణచిహ్నాన్ని మొదట ఇవ్వాలి. II, III వరుసలు రెండు చొప్పున కూడినవి. తరువాత II వరుసలో అత్యధిక విలువ 66. ఇది 26, 40 కూడితే వచ్చింది. కావున 26కు సంబంధించిన 5000కు, 40కి సంబంధించిన 6000కు గణచిహ్నం ఇవ్వాలి. తరువాత IIIవ వరుసలో అత్యధిక విలువ 75. ఇది 40, 35 కూడితే వచ్చింది. కావున 40కి సంబంధించిన 6000కు, 35కు సంబంధించిన 5000కు గణచిహ్నాన్ని ఇవ్వటం జరిగింది. వరుసలో IV, V, VI అనేవి మూడు చొప్పున కూడినవి. నాల్గవ వరుసలో అత్యధిక విలువ 103 అనేది 40, 35, 28 కూడితే వచ్చింది కావున వాటికి సంబంధించిన అంశాలు 6000, 7000, 8000లకు గణచిహ్నాలు ఇచ్చాము. ఈ విధంగా మిగిలిన వాటికి కూడా కొనసాగించాలి.

విశ్లేషణ పట్టిక

అంశాలు(x) → నిలువుగళ్ళు (Coloumns) ↓	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
I			1					
II			1	1				
III				1	1			
IV				1	1	1		
V		1	1	1				
VI			1	1	1			
మొత్తం		0	3	6	3	1	0	0

పై పట్టికలో అధిక గణచిహ్నాలు అంటే ఆరు చిహ్నాలు 6000కు వచ్చాయి. కావున బాహుళకం అవుతుంది.

Z = 6000 రూ॥లు

పౌనఃపున్యం గరిష్టంగా కలిగిన చలనం 6000కు మొదటి గణచిహ్నము యివ్వబడినది.

రెండేసి చొప్పున సంచితమైన పౌనఃపున్యాల గరిష్టపరిమాణం 5000, 6000కు ఒక్కొక్క గణచిహ్నాన్ని కేటాయింపచేసినది. అదే విధంగా అత్యధిక పౌనఃపున్యాల సంకలనాలు ఆధారంగా కేటాయించబడిన చిహ్నాలు 6000 చలనానికి అత్యధికంగా '6' సూచింపబడినది. కనుక 6000 అనే చలనము 6 సార్లు వచ్చినది. కాబట్టి బాహుళకము = రూ. 6000-00.

7.7.3 బాహుళకము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు (Mode-Continuous Series) : బాహుళక విలువ కనుగొనుటకు తరగతి అంతరాలు అసమానంగా వుంటే సమానం చేయాలి. తరగతులు విలీన రూపంలో వుంటే సర్దుబాటు చేసుకోవాలి. విచ్ఛిన్న శ్రేణిలో వలె వర్గీకృత, విశ్లేషణ ద్వారా బాహుళకపు తరగతి నిర్ణయించి తరువాత కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి అంతర్నివేశనం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చును.

$$\text{Mode}(Z) = \ell_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

f_1 = బాహుళకపు తరగతి పౌనఃపున్యము

f_0 = బాహుళకపు తరగతికి దిగువ తరగతి పౌనఃపున్యము

f_2 = బాహుళకపు తరగతికి ఎగువ తరగతి పౌనఃపున్యము

c = తరగతి అంతరము

ℓ_1 = బాహుళకపు తరగతి దిగువ అవధి

పైన తెలిపిన సూత్రంలో $2f_1 - f_0 - f_2 = 0$ అయితే బాహుళకం విలువ అనంతమవుతుంది. ఒకవేళ రుణాత్మక విలువ వస్తే బాహుళకం విలువ దిగువ తరగతిలోకి వెళుతుంది. అందుచేత ఇలాంటి సందార్భాల్లో కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి బాహుళకాన్ని అంచనా వేస్తాము.

$$Z = \ell_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times c$$

పై సూత్రము ద్వారా వచ్చే విలువ షుమారు విలువ మాత్రమే.

కొన్ని సందర్భాల్లో , విశ్లేషణ పట్టిక ద్వారా బాహుళకపు తరగతులు రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలో వస్తాయి. అలాంటి సందర్భాల్లో అంకమధ్యమము, మధ్యగతాల సహాయంతో క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించి బాహుళకాన్ని కనుగొనవచ్చును.

Z = 3(మధ్యగతం) - 2(అంకమధ్యమము)

లేదా

$$Z = 3M - 2\bar{x}$$

ఉదాహరణ : క్రింద యిచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనం నుండి బాహుళకాన్ని కనుగొనండి.

హాజరుకాని రోజులు	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45
విద్యార్థుల సంఖ్య	29	195	241	117	52	10	6	3	2

జవాబు :

వర్గీకృత పట్టీ

			రెండుచొప్పున కూడగా		మూడు చొప్పున కూడగా		
హాజరుకాని రోజులు (x)	విద్యార్థుల సంఖ్య (f) **(I)**		**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
0 - 5	29		224				
5 - 10	195	f_0		(436)	(465)		
10 - 15	(241)	f_1	(358)			(553)	
15 - 20	117	f_2		169			(410)
20 - 25	52		62		179		
25 - 30	10			16		68	
30 - 35	6		9				19
35 - 40	3			5	11		
40 - 45	2						
మొత్తం	655						

విశ్లేషణ పట్టీక

$\longrightarrow$ తరగతి అంతరాలు(CI) నిలువుగళ్ళు (Coloumns) $\downarrow$	**0 - 5**	**5 - 10**	**10 - 15**	**15 - 20**	**20 - 25**	**25 - 30**	**30 - 35**	**35 - 40**	**40 - 45**
I			1						
II			1	1					
III		1	1						
IV	1	1	1						

V		**1**	**1**	**1**					
VI			**1**						
మొత్తం	**1**	**3**	**6**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

విశ్లేషణ పట్టిక ద్వారా 10 - 15 ఎక్కువసార్లు కనబడుచున్నందున (ఎక్కువ గణ చిహ్నాలు లేదా మార్కులు) దానిని బాహుళకపు తరగతిగా గుర్తింపవచ్చును.

$$\text{బాహుళకము } (Z) = \ell_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$\ell_1 = 10, \quad c = 5, \quad f_1 = 241, \quad f_0 = 195, \quad f_2 = 117$$

$$Z = 10 + \frac{241 - 195}{2 \times 241 - 195 - 117} \times 5$$

$$= 10 + \frac{46}{482 - 195 - 117} \times 5$$

$$= 10 + \frac{230}{170}$$

$$Z = 10 + 1.35 = 11.35$$

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశములో బాహుళకాన్ని గణన చేయుము.

మార్కులు	0 - 8	8 - 16	16 - 24	24 - 32	32 - 40	40 - 48	48 - 56	56 - 64
విద్యార్థులు	5	10	18	23	28	6	3	2

వర్గీకృత పట్టిక

				రెండు చొప్పున కూడగా		మూడు చొప్పున కూడగా		
	హాజరుకాని రోజులు (x)	**విద్యార్థుల(I) సంఖ్య (f)**		**II**	**III**	**IV**	**V**	**VI**
	0 - 8	5						
				15				
	5 - 16	10				33		
					28			
	16 - 24	18	f_0				(51)	
				(41)				
(ℓ_1)	24 - 32	23	f_1					(69)
					(51)			
	32 - 40	(28)	f_2			(57)		
				34				
	40 - 48	6					37	
					9			
	48 - 56	3						11
				5				
	56 - 64	2						

విశ్లేషణ పట్టిక

తరగతి → అంతరాలు(CI) నిలువుగళ్ళు (Coloumns) ↓	**0 - 8**	**8 - 16**	**16 - 24**	**24 - 32**	**32 - 40**	**40 - 48**	**48 - 56**	**56 - 64**
I					1			
II			1	1				
III				1	1			
IV				1	1	1		
V		1	1	1				
VI			1	1	1			
మొత్తం	**0**	**1**	**3**	**5**	**4**	**1**	**0**	**0**

పౌనఃపున్య పట్టీలో **24 - 32**వ తరగతికి ఎక్కువ పౌనఃపున్యం ఉన్నందున అది బాహుళకపు తరగతిగా అనిపిస్తుంది. కాని అత్యధిక పౌనఃపున్యము కలిగియున్ననూ దాని చుట్టూ అధిక పౌనఃపున్యం కేంద్రీకృతం కావాలి. దీనిని కనుగొనేందుకు వర్గీకృత - విశ్లేషణ పట్టీలు తయారు చేస్తే **32 - 40** అనేది బాహుళకపు తరగతి అయ్యింది.

$$Z = \ell_1 + \frac{f_1 - f_2}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$\ell_1 = 24, \quad f_1 = 23, \quad f_0 = 18, \quad f_2 = 28, \ c = 8$$

$$= 24 + \frac{23-18}{2\times 23-18-28} \times 8$$

$$= 24 + \frac{5}{46-46} \times 8$$

$$= 24 + \frac{5}{0} \times 8$$

ఈ సూత్రంలో $2f_1 - f_0 - f_2 = 0$ అయ్యింది. ఈ విలువ '0' అయితే బాహుళకాన్ని గణన చేయలేము. అందువల్ల కింది సూత్రం ఉపయోగించి బాహుళకాన్ని కనుగొంటాము.

$$\text{Z} = \ell_1 + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times c$$

$$Z = 24 + \frac{28}{(18+28)} \times 8$$

$$= 24 + \frac{28}{46} \times 8$$

$$= 24 + (0.6 \times 8)$$

$$= 24 + 4.8 = 28.8$$

ఉదాహరణ : దిగువ శ్రేణికి బాహుళకమును గణన చేయుము.

పనిదినాలు	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
వ్యక్తులు	4	6	20	32	33	17	8	2

వర్గీకృత పట్టిక

		రెండు చొప్పున కూడగా		మూడు చొప్పున కూడగా		
పనిదినాలు (x)	వ్యక్తులు(I) (f)	II	III	IV	V	VI
0 - 10	4	10				
10 - 20	6		26	30		
20 - 30	20	(52)			(58)	
30 - 40	32		(65)			(85)
40 - 50	(33)	50		(82)		
50 - 60	17		25		(58)	
60 - 70	8	10				27
70 - 80	2					

విశ్లేషణ పట్టిక

పనిదినాలు(CI)	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80
నిలువుగళ్ళు ↓								
I					1			
II			1	1				
III				1	1			
IV				1	1	1		

V		1	1	1	1	1	1	
VI			1	1	1			
మొత్తం	**0**	**1**	**3**	**5**	**5**	**2**	**1**	**0**

ఇందు రెండు తరగతులు ఎక్కువసార్లు కనబడుచున్నవి. అందువలన రెండు తరగతులు 30-40, 40-50 బాహుళకపు తరగతులు. దీనిని ద్విబాహుళకపు శ్రేణి అందురు. ఈ శ్రేణులలో బాహుళకాన్ని నిర్ణయించడం సాధ్యము కాదు. అందువలన బాహుళక గణనకు దిగువ సూత్రం ఉపయోగింతురు. ఈ సూత్రం $\bar{x}, M, Z$ లకు గల సంబంధంపై రూపొందించినది.

బాహుళకము(Z) = 3 మధ్యగతము - 2 అంకమధ్యమాలు

పనిదినాలు (x)	వ్యక్తులు (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)	మధ్యబిందువు x	విచలనాలు $A=35$ $x-A=dx$	సోపానం $c=10$ Dx	$f\,Dx$
0 - 10	4	4	5	- 30	- 3	- 12
10 - 20	6	10	15	- 20	- 2	- 12
20 - 30	20	30	25	- 10	- 1	- 20
30 - 40	32	62	35	0	0	0
40 - 50	33	95	45	+ 10	+ 1	33
50 - 60	17	112	55	+ 20	+ 2	34
60 - 70	8	120	65	+ 30	+ 3	24
70 - 80	2	122	75	+ 40	+ 4	8
	$N=22$					$\Sigma f\,Dx = \left.\begin{matrix}+99\\-44\end{matrix}\right\}+55$

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}=\frac{122}{2}=61$ అంశము. 61వ అంశము 62వ సంచిత పౌనఃపున్యము 62లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ తరగతి 30-40 మధ్యగత తరగతి అవుతుంది.

మధ్యగత తరగతి = 30 - 40

$$M=\ell_1+\frac{\frac{N}{2}-m}{f}(\ell_2-\ell_1)$$

$$\ell_1=30,\ \ell_2=40,\ f=22,\ c=30$$

$$M=30+\frac{61-30}{32}(40-30)$$

$$M=30+9.6=39.6$$

$$\overline{x} = A + \frac{\Sigma f\ Dx}{N} \times c$$

$$\overline{x} = 35 + \frac{55}{122} \times 10$$

$$= 35 + \frac{550}{122}$$

$$\overline{x} = 35 + 4.5 = 39.5$$

బాహుళకము (Z) = 3 × మధ్యగతం - 2 × అంకమధ్యమం

$$Z = 3M - 2 \cdot \overline{x}$$

$$Z = (3 \times 39.6) - (2 \times 39.5)$$

$$= 118.8 - 79$$

$$Z = 39.8$$

ఉదాహరణ : ఒక పబ్లిక్ పరీక్షకు హాజరైన బాలురకు ఈ దిగువ చూపబడిన మార్కులు వచ్చినాయి. వాటి నుంచి బాహుళకాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	విద్యార్థులు
0 పైన	80
10 "	77
20 "	72
30 "	65
40 "	55
50 "	43
60 "	28
70 "	16
80 "	10
90 "	8
100 "	0

యివ్వబడిన దత్తాంశము కంటే ఎక్కువ రూపంలో వున్నది. కాబట్టి సాధారణ పౌనఃపున్య విభాజనం రూపంలోకి మార్చుకోవలెను. తరువాత వర్గీకృతం, విశ్లేషణ ద్వారా బాహుళక తరగతి కనుగొనవలె.

వర్గీకృత పట్టీ

		రెండు చొప్పున కూడగా		మూడు చొప్పున కూడగా		
=¶~î∅• °(CI)	విద్యార్థులు(f) I	II	III	IV	V	VI
0 - 10	3					
		8				
10 - 20	5			15		
			12			
20 - 30	7				22	
		17				
30 - 40	10					29
			22			
40 - 50	12			(37)		
		(27)				
50 - 60	(15)				(39)	
			(27)			
60 - 70	12					(33)
		18				
70 - 80	6			20		
			8			
80 - 90	2				16	
		10				
90 - 100	8					10
			8			
100 - 110	0					

విశ్లేషణ పట్టిక

మార్కులు	**0-10**	**10-20**	**20-30**	**30-40**	**40-50**	**50-60**	**60-70**	**70-80**	**80-90**	**90-100**	**100-110**
నిలువుగళ్ళు ↓											
I						1					
II					1	1					
III						1	1				
IV				1	1	1					
V					1	1	1				
VI						1	1	1			
మొత్తం	**0**	**0**	**0**	**1**	**3**	**6**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**

50-60 అత్యధికసార్లు కనిపించడం వలన దానిని బాహుళకపు తరగతిగా గుర్తించితిమి.

బాహుళకము = $\ell_1 + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

$\ell_1 = 50, \quad f_1 = 15, \quad f_0 = 12, \quad f_2 = 12, \quad c = 10$

బాహుళకము = $\ell_1 + \dfrac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

$$= 50 + \frac{15-12}{2\times15-12-12} \times 10$$

$$= 50 + \frac{3}{30-12-12} \times 10$$

$$= 50 + \frac{30}{6}$$

$$= 50 + 5 = 55$$

బాహుళకము(Z) = 55 మార్కులు

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన పట్టీ నుంచి బాహుళకాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	విద్యార్థులు
1-5	7
6-10	10
11-15	16
16-20	32
21-25	24
26-30	18
31-35	10
36-40	5
41-45	1
మొత్తం	123

పై పట్టీలో తరగతులు అసమగ్ర రూపంలో వున్నాయి. కాబట్టి తరగతులను పునర్నిర్మించి, వర్గీకృత - విశ్లేషణ ద్వారా బాహుళకపు తరగతి తెలుసుకోవలె.

వర్గీకృత పట్టీ

మార్కులు	విద్యార్థులు	రెండు చొప్పున కూడగా		మూడు చొప్పున కూడగా		
పునర్నిర్మించిన తరగతులలో(CI)	I (f)	II	III	IV	V	VI
0.5 - 5.5	7					
		17				
5.5 - 10.5	10			33		
			26			
10.5 - 15.5	16				(58)	
		(48)				
15.5 - 20.5	(32)					(72)
			(56)			
20.5 - 25.5	24			(74)		
		42				
25.5 - 30.5	18				52	
			28			
30.5 - 35.5	10					33
		15				
35.5 - 40.5	5			16		
			6			
40.5 - 45.5	1					
మొత్తం	131					

విశ్లేషణ పట్టిక

మార్కులు $\longrightarrow$ నిలువుగళ్ళు ↓	0.5-5.5	5.5-10.5	10.5-15.5	15.5-20.5	20.5-25.5	25.5-30.5	30.5-35.5	35.5-40.5	40.5-45.5
I				1					
II			1	1					
III				1	1				
IV				1	1	1			
V			1	1	1				
VI				1	1	1			
మొత్తం	0	1	3	6	3	1	0	0	0

బాహుళకపు తరగతి 15.5 - 20.5

బాహుళకము $(Z) = \ell_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$

$$\ell_1 = 15.5, \quad f_1 = 32, \quad f_0 = 16, \quad f_2 = 24, \; c = 5$$

$$Z = 15.5 + \frac{32-16}{2 \times 32 - 16 - 24} \times 5$$

$$= 15.5 + \frac{16}{64-16-24} \times 5$$

$$= 15.5 + \frac{80}{24} = 15.5 + 3.33$$

$Z = 18.33$ మార్కులు

రేఖా చిత్ర పద్ధతి - బాహుళకము : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వున్న దత్తాంశమునకు సోపాన చిత్రము నిర్మించడం ద్వారా బాహుళకము నిర్ణయింపవచ్చు. "విభాజనము యొక్క సోపాన చిత్రానికి సరస వక్రరేఖను గీస్తే ఏ బిందువు వద్ద ఈ వక్రరేఖ శిఖరాగ్రం అత్యున్నతంగా వుంటుందో ఆ బిందువు వద్ద విలువను బాహుళకంగా నిర్వచించడం సమంజసంగా కనిపిస్తుంది" అంటారు జాన్ ఫ్రూయిడ్ (If we fit a smooth curve to the histogram of a distribution, it seems and reasonable to define the point at which the curve is the highest as the mode of the distribution). కాబట్టి సరస వక్రరేఖను, సోపాన చిత్రం ఆధారంగా చేసుకొని గీసి ఆ రేఖ యొక్క అత్యున్నతమైన బిందువును బాహుళక స్థానంగా గుర్తించి, ఆ బిందువు నుంచి భూమికి లంబరేఖను గీస్తే బాహుళక విలువ తెలుస్తుంది.

బాహుళకాన్ని సోపాన చిత్రం ద్వారా నిర్ణయించ తలంచినపుడు, మొదట తరగతి అంతరాలను x - అక్షం మీద పౌనః పున్యాన్ని y - అక్షము మీద గుర్తించవలె. ప్రతి తరగతి అంతరం భూమిగా, ఆ తరగతి పౌనఃపున్యం (పొడవు)గా భావించి దీర్ఘచతురస్రాలు గీస్తే అవి ఒకదాని సరసన ఒకటి యేర్పడును. ఇవి సోపానాల వలె ఉంటాయి కావున దీనిని సోపాన చిత్రం అంటారు.

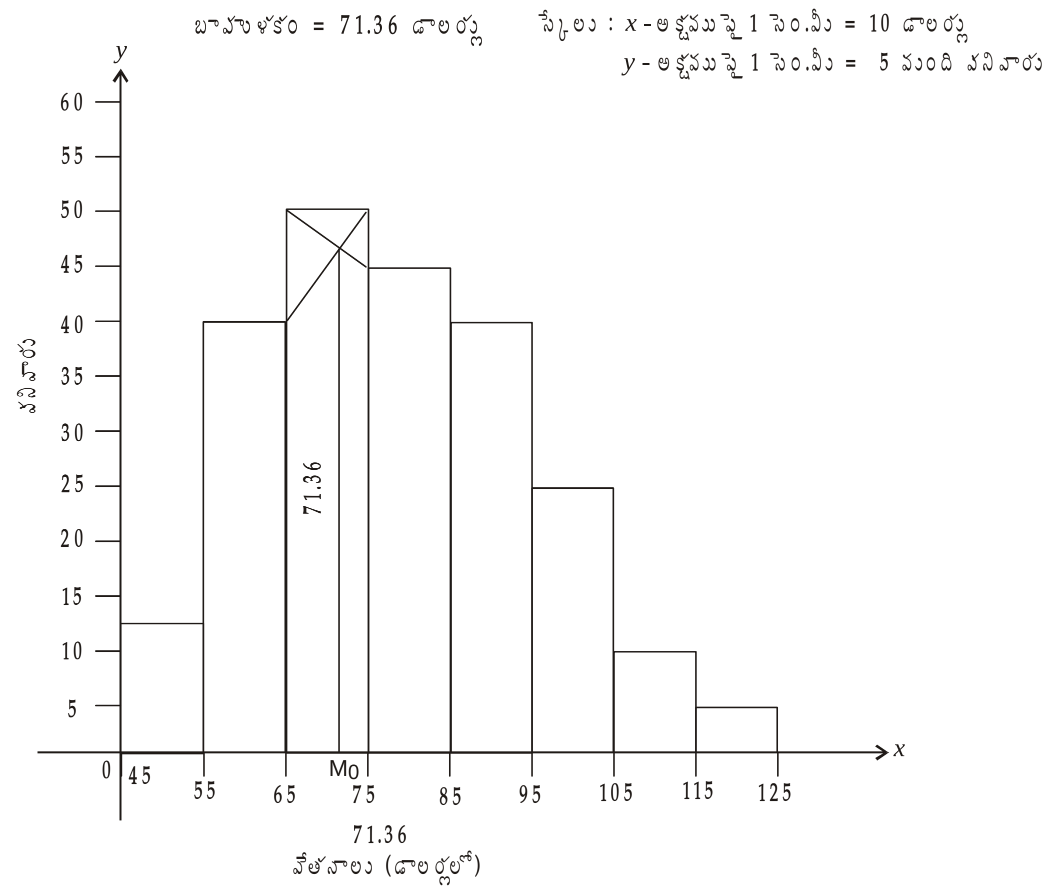
సోపాన చిత్రంలోని గల దీర్ఘచతురస్రాలలో అత్యున్నత దీర్ఘచతురస్రానికి సంబంధించిన తరగతి బాహుళకమైన తరగతి నిర్ణయింపవచ్చు. బాహుళకపు తరగతికి ఎడమవైపు గల చతురస్రపు ఎగువ అవధి చివర నుండి (upper limit corner) బాహుళకపు తరగతి చతురస్రం యొక్క ఎగువ అవధిని కలుపుతూ ఒక సరళరేఖను గీయుము. అట్లాగే బాహుళకపు తరగతికి కుడివైపు గల తరగతి యొక్క చతురస్రపు దిగువ అవధి నుండి బాహుళకపు తరగతి దిగువ అవధిని కలుపుతూ ఒక సరళరేఖను గీయాలి. ఈ రెండు సరళరేఖలు ఒకదానినొకటి ఖండించుకొనును. అట్లా ఖండించుకొన్న బిందువుల నుండి భూమికి (x- అక్షానికి) లంబం గీస్తే అది బాహుళకాన్ని సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశంలో **1964**వ సం॥లో అమెరికాలోని ఒక కార్పోరేషన్ 200 మంది పని వారికి చెల్లించే వేతనాలు సూచింపబడినవి. రేఖా చిత్రం ద్వారా బాహుళకాన్ని గుర్తించండి. దీనిని సూత్రం ద్వారా సరిచూడండి.

వేతనాలు(డాలర్లలో)	45 - 55	55 - 65	65 - 75	75 - 85	85 - 95	95 - 105	105 - 115	115 - 125
పనివారు	14	40	54	46	26	12	6	2

జవాబు : పై దత్తాంశములోని తరగతుల అంతరాలకు సమానమైన వెడల్పు, పౌనఃపున్యాలకు తగినంత ఎత్తులో దీర్ఘచతురస్రాలు నిర్మించడం వలన సోపాన చిత్రం యేర్పడినది. సోపాన చిత్రం ద్వారా బాహుళక నిర్ణయం అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాత్రమే సాధ్యమవుతుందని గుర్తించవలెను.

సోపాన పటం - బాహుళక గణన



రేఖాపటం ద్వారా వచ్చిన బాహుళకాన్ని సూత్రం ద్వారా సరిచూద్దాం. పై విభాజన బాహుళకపు తరగతి **65 - 75.** దీనిని వర్గీకృత, విశ్లేషణ పట్టికల ద్వారా కనుగొనాలి.

$$Z = \ell_1 + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times c$$

$$\ell_1 = 65, \quad f_1 = 54, \quad f_0 = 40, \quad f_2 = 46, \quad c = 10$$

$$Z = 65 + \frac{54 - 40}{2 \times 54 - 40 - 46} \times 10$$

$$= 65 + \frac{14}{108 - 460 - 46} \times 10$$

$$= 65 + \frac{140}{22}$$

$$Z = 65 + 6.36 = 71.36$$

65 - 75 తరగతి అత్యున్నత సోపానాన్ని సూచించుచున్నది. ఈ దీర్ఘచతురస్త్రం బాహుళకపు చతురస్త్రం అవుతుంది. ఈ చతురస్త్ర కుడివైపున మూల బిందువుల నుంచి స్కేలుతో ఎడమ వైపున ఉన్న దీర్ఘచతురస్త్రం తాకే బిందువు వరకు స్కేలుతో కొలవాలి. అదే విధంగా డమవైపు మూల బిందువు నుంచి కుడివైపు చతురస్త్రం తాకే బిందువు వరకు స్కేలుతో కలపాలి. ఈ రెండు రేఖలు ఖండించుకొన్నవి. ఆ ఖండన బిందువు నుండి భూమికి గీయబడిన సరళరేఖ బాహుళకపు విలువ **71.36**గా సూచించుచున్నది. సూత్రం ద్వారా కూడా యిదే విలువ సూచింపబడినది.

బాహుళకము - సుగుణాలు

1) మోడల్ సైజులు, ఫాషన్య అధ్యయనము చేయవలసి వచ్చినపుడు యిది చాలా మంచి సగటు.

2) బాహుళకాన్ని సులభంగా గణన చేయవచ్చును. పరిశీలన వల్ల కూడా (inspection) నిర్ణయింపవచ్చును.

3) అర్థం చేసుకోవడం సులువు.

4) విపరీత విలువల ప్రభావము వలన ప్రభావితము కాదు. విపరీతాంశాలున్నపుడు అంకమధ్యమం కంటే బాహుళకాన్ని ఎన్నుకొందురు.

5) వివృత అవధులు గల శ్రేణులలో కూడా బాహుళకాన్ని గణన చేయవచ్చును.

6) గుణాత్మక దృగ్విషయాలు (qualitative phenomena) వర్ణించవలసి వచ్చినపుడు బాహుళకము ఉపయోగపడును.

7) రేఖాపటం ద్వారా అంటే సోపాన చిత్రం ద్వారా కూడా నిర్ణయింపవచ్చును.

లోపములు

1) బాహుళకము స్పష్టంగా నిర్వచింపబడినది కాదు. అందువల్ల విభిన్న సూత్రాలు వివిధ విలువలు వచ్చే అవకాశం వుంది.

2) అన్ని సందర్భాల్లో బాహుళ గణన సాధ్యం కాదు. కొన్ని సమయాల్లో ద్విబాహుళకాలు, బహుబాహుళకాలు యేర్పడే పరిస్థితి కలదు.

3) గరిష్ఠ పౌనఃపున్యం గల అంశము బాహుళకంగా గుర్తించబడడం వలన శ్రేణిలోని ఇతర అన్ని అంశాలకు ప్రాధాన్యత ఇచ్చినట్లు గుర్తింపలేము.

4) బీజీయ సంకలనానికి సరిపోదు. ఉదాహరణకు ఒక విభాజనంలోని రెండు విభాగాల బాహుళకాలను ఇస్తే ఆ మొత్తం విభాజన బాహుళకాన్ని కనుగొనలేము.

5) అంకమధ్యంతో పోల్చిన బాహుళకం శ్రేణిలోని ఒడుదుడుకులకు ప్రభావితమగును.

ఈ లోపాలున్ననూ వ్యాపార, వాణిజ్య, పారిశ్రామిక రంగాలకు బాహుళకం చాలా ఉపయోగపడును. రెడిమేడ్స్, మోడల్ సైజుల నిర్ణయం, వ్యాపార ఊహలకు మార్గదర్శిగా వుండును.

వివిధ సగటు ప్రాముఖ్యము - ప్రయోజనాలు

ఎ. అంకమధ్యమము : ఉత్పత్తి, రాబడి, ఎగుమతి, దిగుమతి మొదలగు సాంఘిక, ఆర్థిక, వ్యాపార సమస్యల అధ్యయనానికి అంకమధ్యమము ఉపయోగిస్తారు. సాధారణంగా సగటు అని వినియోగిస్తే అది అంకమధ్యమాన్నే సూచించును.

బి. **మధ్యగతము :** ప్రత్యక్షంగా, పరిమాణాత్మకంగా తీసుకోలేని తెలివితేటలు, బీదరికము మంచితనం మొదలైన గుణాత్మక దత్తాంశాన్ని మధ్యగతాన్ని వినియోగించవచ్చు. వివృత అవధులున్న విభజనానికి మధ్యగతము అత్యుత్తమమైన సగటు.

సి. **బాహుళకము :** వ్యాపార, వాణిజ్య రంగాలలో మోడల్ సైజ్ దుస్తులు, జోళ్ళు తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడును.

డి. **గుణమధ్యమము :** సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణము, జనాభా పెరుగుదల తెలుసుకోవడం, శ్రేణుల విస్తరణ అధికంగా వున్నప్పుడు దీనిని వినియోగింతురు.

ఇ. **హరమధ్యమము :** దూరము, కాలము, రేట్లు, ధరలకు సంబంధించినంతవరకు ఇది చాలా ఉపయోగమైన సగటు. చిన్న అంశాలకు పెద్ద భారాలను ఉపయోగించవలసి వచ్చినపుడు యిది చాలా మంచి సగటు.

అన్ని సగటులు ప్రయోజనకరమైనవే. వివిధ సగటులు వివిధ సందర్భాల్లో అత్యుత్తమమైన సగటులుగా ఉంటాయి. ఎన్నుకొనే ముందు ఆయా పరిస్థితులను గుర్తించి అందుకు అనుగుణమైన సగటును ఎంపిక చేసుకోవలసి ఉంటుంది.

7.8 సారాంశం

గణాంక విచారణలో ఐదో దశ విశ్లేషణ, విపులీకరణ. ఈ దశలో వివిధ విశ్లేషణ ప్రమాణాలను కనుగొని వాటిని బట్టి దత్తాంశాన్ని విశ్లేషించడం జరుగుతుంది. ఈ విశ్లేషణ ప్రమాణాల్లో కేంద్రస్థానపు సగటులను ప్రథమ శ్రేణి కొలతలు అంటాము. కేంద్ర స్థానపు కొలతలు రెండు రకాలు. గణన సగటులు మరియు స్థాన సగటులు. అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము, హరమధ్యమాలను గణన సగటులు అంటాము. మధ్యగతం, బాహుళకాలను స్థాన సగటులు అంటాము.

దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించే ఏక సంఖ్యను సగటు అంటాము. మంచి సగటు కొన్ని లక్షణాలను కలిగి వుండాలి. అయితే మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలను అన్నింటినీ కలిగిన సగటు ఏదీ లేదు. కాని వివిధ సందర్భాల్లో వివిధ సగటులు ఉత్తమ సగటులుగా పరిగణించబడతాయి. ఉదా॥ వేతనానికి అంకమధ్యమం, గుణాత్మక అంశాల విషయంలో మధ్యగతం, మోడల్ కనుగొనే విషయంలో బాహుళకం etc. సాధారణంగా అతి తరచుగా ఉపయోగించే సగటు అంకమధ్యమం. ప్రతి సగటుకు కొన్ని గుణదోషాలు ఉన్నాయి. కేంద్రస్థానపు సగటులలో ప్రతి సగటుకు ఒక ప్రత్యేక స్థానం ఉంది. కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాల్లో వాటిని ఉపయోగించడం అనివార్యం. గణాంక విశ్లేషణలో కేంద్రస్థానపు సగటులకు ప్రయోజనం, ప్రాధాన్యత వున్నను వీటి ప్రయోజనం పరిమితమైనది. ఇవి దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యమిచ్చే ఒక సంఖ్యను ఇవ్వగలవు గాని దత్తాంశ పంపిణీ ఏ విధంగా వున్నదీ, దత్తాంశ విస్తృతి తెలియజేయలేవు. అందుచేత ద్వితీయ శ్రేణి సగటులు లేదా విస్తరణ మానాలను కనుగొనటం జరిగింది. వీటిని గురించి తరువాత పాఠంలో చదువుకుందాం.

7.9 ముఖ్యపదాలు

1. **సగటు :** దత్తాంశానికి ప్రాతినిధ్యం వహించు ఏక సంఖ్య.

2. **భారిత అంకమధ్యమం :** విభాజనంలోని వివిధ అంశాల సాపేక్షిత భారాల ప్రాతిపదికగా రూపొందించే అంకమధ్యమాన్నే భారిత అంకమధ్యమం అంటారు.

3. **ఓజివ్ వక్రరేఖలు :** ఓజివ్ వక్రరేఖలనే సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలు అంటారు. వీటి ద్వారా మధ్యగతం, మధ్యగతం మీద ఆధారపడి వున్న కొలమానాలు కనుగొనవచ్చు.

4. హరమధ్యమము : విభాజనంలోని అంశాల వ్యుత్క్రమాల అంకమధ్యమానికి వ్యుత్క్రమమే హరమధ్యమం అంటారు.

5. గుణమధ్యమం : 'N' అంశాల వర్గానికి N వర్గమూలమే గుణమధ్యమం అంటారు.

7.10 నమూనా ప్రశ్నలు

వ్యాసరూప ప్రశ్నలు :

1. కేంద్రస్థానపు కొలతలు అంటే ఏమిటీ ? వాని గణన పద్ధతులను తెల్పుము.
2. మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలను తెల్పి, పై లక్షణాలు గల సగటును సమర్థించండి.
3. సాధారణ సగటు, భారిత సగటు మధ్యగల తేడాలను గుర్తించి, ఏ పరిస్థితులలో ఏ సగటు, వినియోగించవలెనో తెల్పుము.
4. మధ్యగతాన్ని వివిధ శ్రేణుల్లో కనుగొను విధానాన్ని తెలిపి, మధ్యగత గుణ దోషాలనెన్నుము.
5. బాహుళక ప్రయోజనాలు, లోపాలు తెల్పుము.
6. దిగువ విభాజనము నుండి అంకమధ్యమము, మధ్యగతము, బాహుళకాలను కనుగొనండి.

స్త్రీల ఎత్తు (సెం.మీ.లలో)	150	153	156	159	162	165	168
స్త్రీల సంఖ్య	27	146	435	398	210	128	98

7. దిగువ దత్తాంశము నుండి మధ్యగతము, బాహుళకము, రెండు చతుర్థాంశాలు గణన చేయండి.

వయస్సు	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
వ్యక్తులు	50	70	100	180	150	120	70	60

8. దిగువ విభాజనము నుండి రేఖా చిత్రపటం ద్వారా బాహుళకాన్ని కనుగొనండి.

తరగతులు	1-9	9-17	17-25	25-33	33-41	41-49	49-57
పౌనఃపున్యము	20	31	27	15	10	7	8

9. దిగువ యివ్వబడిన దత్తాంశము నుండి రేఖా చిత్ర పటం ద్వారా మధ్యగతము, బాహుళకాలను కనుగొని, గణన చేసి సరిచూడండి.

ఉత్పత్తి	ప్లాంటుల సంఖ్య
0 పైన	216
60 పైన	210
120 పైన	158
180 పైన	98
240 పైన	57

300 పైన	31
360 పైన	13
420 పైన	7

10. (ఎ) గుణమధ్యమ ప్రయోజనాలు, లోపాలు వివరించండి.

    (బి) దిగువ దత్తాంశమునుంచి గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

    6.5, 169.0, 11.0, 112.5, 14.2, 75.5, 35.5, 215.0

11. దిగువ విభాజనము నుండి 3వ దశాంశము, రెండు చతుర్థాంశాలు మధ్యగతము గణన చేయండి. ఫలితాలను రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా సరిచూడండి.

తరగతులు	పౌనఃపున్యము
57.5 - 60.0	6
60.0 - 62.5	26
62.5 - 65.0	190
65.0 - 67.5	281
67.5 - 70.0	412
70.0 - 72.5	127
72.5 - 75.0	38

12. గుణమధ్యమానికి, హరమధ్యమానికి నిర్వచనాలు ఇవ్వండి. దిగువ ఇచ్చిన సాపేక్ష ధరల (price Relatives) నుంచి గుణమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

వస్తువు (Commodity)	సాపేక్ష ధరలు (price Relatives)
గోధుమ	207
బియ్యము	198
పప్పుదినుసులు	156
పంచదార	124
ఉప్పు	197
నూనెలు	196

13. దిగువ ఒక ప్రాంతానికి చెందిన 20 కుటుంబాల రాబడులు యివ్వడం జరిగింది.

    రూ. 2000, 35, 400, 15, 40, 1500, 300, 6, 90, 250

    20, 12, 450, 10, 150, 8, 25, 30, 1200, 60,

    పై రాబడుల నుంచి గుణమధ్యమము, హరమధ్యమము గణనచేయండి.

14. దిగువ యిచ్చిన అంశాల నుంచి -

(1) అంకమధ్యమము (2) గుణమధ్యమము (3) హరమధ్యమాన్ని గణన చేయండి.

"375.5, 153.4, 28.5, 12.01, 4.5, 3.74, 12.79, 35, 41.9, 58"

15. "-- కంటే ఎక్కువ", "-- కంటే తక్కువ" సంచిత పౌనఃపున్య వక్రరేఖలను గీసి, తద్వారా మధ్యగతాన్ని కనుక్కోండి. సూత్రాన్ని ఉపయోగించి మీ ఫలితాన్ని సరిచూచుకోండి.

సరాసరి రాబడులు	పనిచేసే వారి సంఖ్య
25 - 28	10
28 - 31	23
31 - 34	26
34 - 37	19
37 - 40	10
40 - 43	8
43 - 46	4

16. దిగువ దత్తాంశము నుంచి ఓజివ్ వక్రరేఖను (Ogive curve) గీసి, దాని నుంచి మధ్యగతము, రెండు చతుర్థాంశాలు కనుక్కోండి. సూత్రం ద్వారా గణన చేసి మీ ఫలితాలను సరిచూసుకోండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 10	33
10 - 20	108
20 - 30	221
30 - 40	439
40 - 50	526
50 - 60	495
60 - 70	322
70 - 80	153
80 - 90	53
90 - 100	7

17. దిగువ అంశాల నుంచి గుణమధ్యమము, హరమధ్యమము కనుక్కోండి.

1238, 178.7, 89.9, 78.4, 9.7, 0.874, 0.989, 0.012, 0.0008, 0.0009

18. మూడు విశ్వవిద్యాలయాల ఫలితాలు ఈ దిగువ పట్టీలో యివ్వడం జరిగింది. అందులో అత్యున్నతమైన విశ్వవిద్యాలయం ఏదో కనుక్కోండి. మీ సమాధానానికి సరియైన కారణాలివ్వండి.

విశ్వవిద్యాలయ పరీక్ష	ఫలితాల శాతాలు		
	A	B	C
M.A.	80	75	70
M.Sc.	70	70	60
B.A.	65	80	70
B.Sc.	60	60	80
B.Com.,	75	65	70

19. దిగువ పట్టీలో ఇచ్చిన దత్తాంశం నుంచి అంకమధ్యమాన్ని, మధ్యగతాన్ని గణన చేయండి.

ఉత్పత్తి	ప్లాంటుల సంఖ్య
Over 0 - పైన	216
" 60 - పైన	210
" 120 - పైన	156
" 180 - పైన	98
" 240 - పైన	57
" 300 - పైన	31
" 360 - పైన	13
" 420 - పైన	7

20. 1957 సంవత్సరంలో A అనే దేశంలో కుటుంబ యజమానుల వయో విభాజనాలు (Age distributions) యివ్వడం జరిగింది.

కుటుంబ యజమాని వయస్సు	సంఖ్య లక్షలలో
Under - 25 లోపు	22.2
25 - 29	40.5
30 - 34	50.8
35 - 44	104.5
45 - 54	94.7
55 - 64	66.3
65 - 74	41.6
75 - పైన	16.6
	437.5

పై దత్తాంశము నుంచి మధ్యగతాన్ని గణన చేయండి. ఇక్కడ అంకమధ్యమం కంటే మధ్యగతము మిన్న (better) అని అభిప్రాయపడుతున్నారా? అట్లాగయితే కారణాలేమిటీ?

21. 100 టొమాటా మొక్కలలో పూర్తి స్వరూపం గల కాయలను లెక్కించగా ఈ దిగువ యిచ్చిన ఫలితాలు వచ్చినాయి. వాటి నుంచి బాహుళకాన్ని గణన చేయండి.

2	మొక్కలు	0	వున్న టొమోటాలు
5	"	1	"
7	"	2	"
11	"	3	"
18	"	4	"
24	"	5	"
12	"	6	"
8	"	7	"
6	"	8	"
4	"	9	"
3	"	10	"

22. దిగువ యిచ్చిన పౌనఃపున్య విభాజనం నుంచి బాహుళకాన్ని, మధ్యగతాన్ని, రెండు చతుర్థాంశాలను కనుక్కోండి.

తరగతి	పౌనఃపున్యము
1 - 10	9
10 - 19	13
19 - 28	86
28 - 37	239
37 - 46	120
46 - 55	46
55 - 64	12

23. దిగువ విభాజనం నుంచి 3వ దశాంశము, రెండు చతుర్థాంశాలు, మధ్యగతాన్ని గణన చేయండి. మీకొచ్చిన ఫలితాలను రేఖాచిత్ర పద్ధతి ద్వారా సరిచూడండి.

తరగతి	పౌనఃపున్యము
57.5 - 60.0	6
60.0 - 62.5	26
62.5 - 65.0	190
65.0 - 67.5	281
67.5 - 70.0	412
70.0 - 72.5	127
72.5 - 75.0	38

24. దిగువ దత్తాంశములో విద్యార్థులు నెలసరి ఖర్చులు యివ్వడం జరిగింది. వాటి నుంచి గుణమధ్యమము హారమధ్యమము గణన చేయండి.

రూ. 125-00,	130-00,	75-00,	10-00,	45-00
5-00	0-50,	0-40,	500-00,	150-00

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

1. అంకమధ్యమం
2. భారిత అంకమధ్యమం
3. మధ్యగతం
4. బాహుళకం
5. హారమధ్యమం
6. గుణమధ్యమం
7. కేంద్రస్థానపు కొలతలు
8. మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణములు
9. సోపాన పటం
10. ఓజివ్ వక్రరేఖలు

7.11 చదువదగిన గ్రంథాలు

B.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
S.P. Gupta	:	Statistical Methods
C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics
M.C. Shukla & S.S. Gulshan	:	Statistics - Theory and Practice

పాఠం - 8

విస్తరణ మానాలు (Measures of Dispersion)

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

8.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది విస్తరణమానాలను గురించి తెలుసుకుని, గణించగలరు.

* విస్తరణ మానాలు అంటే ఏమిటీ? పరమ, సాపేక్ష విస్తరణ మానాల మధ్య తేడాను తెలుసుకొనుట.
* వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాల గణన పద్ధతి, వ్యాప్తి కొలమానంలో గుణ దోషాలు
* చతుర్థాంశ విచలనం, చతుర్థాంశ విచలన గుణకాల, గణన పద్ధతి, చతుర్థాంశ విచలన కొలమానంలో గుణ దోషాలు
* మాధ్యమిక విచలనం, మాధ్యమిక విచలన గుణకాల, గణన పద్ధతి, మాధ్యమిక విచలన కొలమానంలో గుణదోషాలు
* ప్రామాణిక విచలనం, ప్రామాణిక విచలన గుణకం, విచరణ గుణకం, వీటిని గణించే పద్ధతి, ప్రామాణిక విచలన గుణదోషాలు
* ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం గణన
* లోరెంజ్ వక్ర నిర్మాణం

8.1 విషయపరిచయం

గత పాఠంలో కేంద్రస్థానపు కొలతలు లేదా కేంద్ర స్థానపు సగటులను గూర్చి చదువుకున్నాం. విశ్లేషణ పద్ధతులలో కేంద్రస్థానపు కొలతలు ప్రథమ శ్రేణి సగటులు అని విస్తరణ మానాలను ద్వితీయ శ్రేణి సగటులని అంటారు. కేంద్ర స్థానపు సగటుల ద్వారా దత్తాంశానికి శ్రేణులకు ప్రాతినిధ్యం వహించే ఒక సంఖ్యను మనం రూపొందించడం జరిగింది. అయితే ఆ సంఖ్య శ్రేణులకు సంబంధించిన పంపిణీని లేదా శ్రేణులు కేంద్రస్థానానికి ఏ విధంగా పంపిణీ అయ్యాయి అనే విషయాన్ని గురించి వివరించలేవు. మరో విధంగా, మనం కనుగొనిన కేంద్రస్థానపు కొలత దత్తాంశానికి ఎంత వరకు ప్రాతినిధ్యం వహిస్తుందనే విషయం తెలుసుకోవటం కూడా అవసరం.

శ్రేణులు లేదా పౌనఃపున్య విభాజనాలన్నీ ఒకే విధంగా వుండకపోవచ్చు. వివిధ శ్రేణుల్ని పోల్చవలసి వచ్చినప్పుడు ప్రథమ శ్రేణి సగటులు లేదా కేంద్రస్థానపు సగటులు ఉపయోగపడకపోగా తప్పుదారి పట్టించే విధంగా కూడా వుంటాయి. అందుచేత కేంద్రస్థాన కొలతల ద్వారా తెలుసుకోలేని గుణాలను తెలుసుకునే ఉద్దేశంతో 'విస్తరణ మానాలు' రూపొందించబడ్డాయి. కేంద్ర స్థానపు కొలతకు, అసలు దత్తాంశంలోని విలువలకు గల వ్యత్యాసము లేదా తేడా లేదా విచరణను కనుగొనే మానాలనే విస్తరణ మానాలు అంటారు. విస్తరణ మానాలు ఐదు రకాలు. వ్యాప్తి, చతుర్థాంశ విచలనం, మాధ్యమిక విచలనం, ప్రామాణిక విచలనం, లోరెంజ్ వక్రం. లోరెంజ్ వక్రము రేఖా పద్ధతి, మిగిలినవన్నీ గణన పద్ధతులు. ఈ పాఠంలో మనం విస్తరణ అంటే ఏమిటీ? మరియు వివిధ విస్తరణ మానాలను గూర్చి తెలుసుకుందాం.

8.2 విస్తరణ మానాలు (Measure of Dispersion)

కేంద్రస్థాన సగటులు దత్తాంశానికంతటికీ ప్రాతినిధ్యము వహించే 'ఏక సంఖ్య'. (Single figure)లను రూపొందించగలిగినవి కాని ఆ 'ఒక్క' సంఖ్య దత్తాంశానికి సంబంధించిన పూర్తి సమాచారాన్ని వెల్లడి చెయ్యలేదు. అంటే శ్రేణులలోని అంశాలు ఏ విధంగా పంపిణీ చెందినాయి? అవి కేంద్రస్థాన కొలత చుట్టూ ఎట్లా విస్తృతి చెందాయి? అనే విషయాలను స్పష్టపరచలేవు. సగటు శ్రేణికి ఎంత ప్రాతినిధ్యము వహిస్తుంది అనేది తెలుసుకోవడానికి శ్రేణులను మరికొంత వర్ణించడం తప్పనిసరి అయ్యింది. అందుకోసం విస్తరణను తెలుసుకోవలసిన ఆవశ్యకత వుంది.

ఒక్కొక్కప్పుడు రెండు లేదా మూడు విభాజనాలు కేంద్రస్థానం సమానంగా వుండవచ్చు. కాని ఆ విభాజనాల స్వరూపాలలో (formation) చాలా పెద్ద తేడాలుండవచ్చు. ఉదా ॥ A, B, C అనే మూడు శ్రేణులను కింద చూపడం జరిగింది.

శ్రేణులు	అంశాలు	Total (అంశాల మొత్తం)	$\overline{x}$ (అంకమధ్యమం)
A	15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15, 15,	135	15
B	11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19,	135	15
C	3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27	135	15

పై శ్రేణులలో ఒక్కొక్క దానిలో 9 అంశాలు వున్నవి. అంకమధ్యమం ($\overline{x}$) 15గానే వున్నది. కాని స్వరూపాలలో తేడాలు కలిగియున్నవి. A శ్రేణి స్థిరత్వం కలిగియున్నది. B శ్రేణిలో కొంత విస్తరణ చూడగలము. C శ్రేణిలో ఎక్కువ విస్తరణ స్పష్టమగుచున్నది. C శ్రేణితో పోల్చినప్పుడు B శ్రేణిలో సజాతీయత ఎక్కువగా కనబడుచున్నది. అదే విధంగా C శ్రేణి B శ్రేణి కంటే ఎక్కువ విజాతీయత కనబడుచున్నది. కేంద్రస్థాన విలువకు, అసలు విభాజనంలో గల అంశాలకు వున్న తేడాను విస్తరణ అంటారు. పై విభాజనంలో C విభాజనం హెచ్చు విస్తరణను కలిగిందని చెప్పవచ్చు.

పంపిణీలో విస్తరణ అనే ప్రధాన గుణాన్ని తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగపడే మానాలనే విచరణమానాలు (Measures of Variation) అంటారు. "కేంద్రస్థాన విలువకు అసలు విభాజనంలో గల అంశాలకు వున్న తేడా లేదా విచరణ (Variation) తెలుసుకునే మానాన్ని (Measure) విచారణ మానము లేదా విస్తరణ (Dispersion) అంటారు'' అని మిల్స్ మహాశయుడు నిర్వచించెను.

పౌనఃపున్య విభాజనాలన్ని ఒకే విధంగా వుండడం అరుదు. ఒక్కొక్కప్పుడు వాటిలో ఒకదానితో ఒకటి పోల్చవలసి వచ్చినపుడు కేంద్రస్థాన విలువలు లేక ప్రథమ శ్రేణి సగటులు (Averages of the first order) కొన్ని సందర్భాల్లో తప్పుదారి పట్టించేవిగా వుంటాయి. అటువంటప్పుడు, కేంద్రస్థాన విలువలకు విభాజనంలో గల అంశాలకు తేడాలు తెలుసుకొని తద్వారా విభాజనం యొక్క స్వరూపం తెలుసుకునే పద్ధతిని విస్తరణ (Dispersion) తెలుసుకోవడం అంటారు. వీనిని ద్వితీయశ్రేణి సగటులని (Averages of second order) అని కూడా అంటారు. విస్తరణ ఎంత తక్కువగా వుంటే సగటు ప్రాతినిధ్యం అంత ఎక్కువగా వుంటుంది. విస్తరణనే విచరణ (Variation) లేదా విస్తృతి(Scatter) అని కూడా అంటారు.

8.2.1 విస్తరణ మానాలు - ఉద్దేశాలు (Objectives of Measure of Variation) : కింది లక్ష్యాల సాధన కోసం విస్తరణ మానాలను రూపొందించడం జరిగింది.

(1) సగటు యొక్క విశ్వసనీయత (Reliability) తెలుసుకోవడానికి : సగటు దత్తాంశానికి ఎంత వరకు ప్రాతినిధ్యము వహిస్తుందో విస్తరణ మానాల ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు. విస్తరణ తక్కువైతే సగటు వ్యక్తిగత విలువలకు చాలా సన్నిహితంగా వున్నదని, అప్పుడు సగటును విశ్వసింపవచ్చు. ఒకవేళ విస్తరణ ఎక్కువైతే, సగటు వ్యక్తిగత విలువలకు దూరమై అంత విశ్వసించదగినదిగా వుండదు.

(2) విచరణతత్త్వాన్ని అదుపులో వుంచడానికి : విచరణ తత్వాన్ని నియంత్రించేందుకు యిది పనిచేస్తుంది. ఆరోగ్య విషయాలలో శరీర ఉష్ణోగ్రత లేదా రక్తపోటులలో అధిక విచరణం కనుపించినపుడు అదుపులో వుంచడానికి ప్రయత్నిస్తాము. అలాగే ఉత్పత్తి, యింజనీరింగ్ తదితర సమస్యలలోను విస్తరణమానం ఆధారంగా విస్తృతానికి గల కారణాలను అదుపులో వుంచుతాము.

(3) సరిపోల్చటానికి : విచరణత్వాన్ని అనుసరించి రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణులను సరిపోల్చవచ్చు. ఒక విషయాన్ని గురించి సేకరించిన దత్తాంశం యొక్క స్థిరత్వం తెల్పుటకు ఉపయోగపడును.

8.2.2 ఆదర్శ విస్తరణ మానము - లక్షణాలు (Characteristics of an Ideal Measure of Dispersion) : మంచి సగటుకు ఉండవలసిన లక్షణాలే మంచి లేదా ఆదర్శ విస్తరణ మానము లక్షణాలుగా చెప్పవచ్చు. అవి :

(1) అది స్పష్టంగా నిర్వచింపబడవలె.

(2) సులభంగా అర్థం చేసుకొనుటకు, గణన చేయుటకు వీలు కలిగియుండవలె.

(3) శ్రేణిలోని అన్ని చలనాలపై ఆధారపడియుండవలె.

(4) బీజీయ ప్రస్తావనకు లేదా గణితశాస్త్ర ప్రక్రియకు అనువైనదిగా యుండవలె.

(5) ప్రతిచయనంలో ఉండే ఒడుదుడుకులకు అతి స్వల్పంగా మాత్రమే ప్రభావితమయ్యేదిగా వుండవలె.

(6) శ్రేణిలో గల విపరీతాంశాల ప్రభావానికి ప్రభావితము కానిదై వుండవలె. ఈ లక్షణాలు కలిగివున్న విస్తరణమానాన్ని ఆదర్శ విస్తరణ మానంగా చెప్పవచ్చు.

8.2.3 విస్తరణ మానాలు : విస్తరణమానాల స్వరూపాలు రెండు విధాలుగా వుంటాయి. చలరాశులను సరిపోల్చే స్థితినిబట్టి పరమ లేదా సాపేక్ష మానాలను ఉపయోగించడం జరుగుతుంది.

(1) పరమ విస్తరణ మానాలు **(Absolute measures of Dispersion) :** అసలు దత్తాంశము ఏ గణాంక ప్రమాణాలలో వున్నదో పరమ మానాలు కూడా ఆ గణాంక ప్రయాణంలోనే ఉంటాయి. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలోని విద్యార్థుల సగటు బరువు 40 కి.గ్రా. అయితే దాని విస్తరణ కూడా కిలోగ్రాములలో చెప్పబడును. అలా చెప్పడాన్ని పరమ విస్తరణ మానమంటారు. అందువల్ల విస్తరణ మానం ఆధారంగా దత్తాంశాలను సరిపోల్చడం అన్ని సందర్భాల్లో సాధ్యపడదు.

(2) **సాపేక్ష మానాలు (Relative Measures of Dispersion) :** సాపేక్షిక విస్తరణ మానాన్ని విస్తరణ గుణకం (Coefficient) అని కూడా వ్యవహరిస్తారు. సగటుకు, విస్తరణకు మధ్య గల నిష్పత్తే సాపేక్షిక మానము. పరమ విస్తరణ కొలతలను ఒక కేంద్ర స్థానపు కొలతతో లేదా మరేదైనా విలువతో భాగిస్తే వచ్చే విలువ సాపేక్ష విస్తరణ కొలత. సాధారణంగా సాపేక్షిక విస్తరణ కొలతలను కనుక్కోవడానికి ఏ కేంద్రస్థాన కొలతలను తీసుకుంటామో దానితోనే పరమ విస్తరణ కొలతలను భాగించడం జరుగుతుంది. పరమ విస్తరణ మానం ద్వారా వచ్చు విలువ శుద్ధ సంఖ్య. శ్రేణులను సరిపోల్చుటకు అన్ని సందర్భాల్లో సాపేక్ష మానాలు తోడ్పడును.

8.3 వివిధ విస్తరణ మానాలు (Measures of Dispersion)

విస్తరణ మానాలు ఐదు రకాలు. విస్తరణ మానాల పరమ, సాపేక్ష స్వరూపాన్ని కింద చూపడం జరిగింది.

పరమ మానాలు	సాపేక్ష మానాలు
(1) వ్యాప్తి (Range)	(1) వ్యాప్తి గుణకం
(2) చతుర్థాంశ విచలనము (Quantile Deviation)	(2) చతుర్థాంశ విచలన గుణకం
(3) మాధ్యమ విచలనము (Mean deviation)	(3) మాధ్యమిక విచలన గుణకం
(4) క్రమ లేదా ప్రామాణిక విచలనము (Standard deviation)	(4) క్రమ లేదా ప్రామాణిక విచలన గుణకం లేదా విచరణ గుణకం,
(5) లోరెంజి వక్రము (Loreng Curve)	(5) ఇది రేఖా చిత్ర పద్ధతి.

మొదటి రెండు స్థానాలలో విచలనాలపై ఆధారపడడం వలన వానిని స్థానపరమైన కొలత ప్రమాణాలందురు.

చివరిదైన లోరేంజి వక్రము గ్రాఫ్ పద్ధతిలో శ్రేణులలోని చలనాన్ని అధ్యయనం చేయును.

8.3.1 వ్యాప్తి (Range) : దత్తాంశములో గల "అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల తేడాను వ్యాప్తి" అని యూల్, కెండాల్ మహాశయులు నిర్వచించిరి. (Range is defined as "the difference between the greatest and the lowest value"). ఉదాహరణకు : ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే కూలివాని వేతనాలు వారంలో రూ. 3, 2, 4, 5, 3, 7 అయిన, వాని రాబడి వ్యాప్తి = (7 - 2) = 5 (Range) అనగా అత్యధిక రాబడి రూ. 7॥ నుంచి అతి స్వల్ప రాబడి రూ. 2 తీసివేస్తే రూ. 5॥లను వ్యాప్తి అంటాము.

వ్యాప్తి $= X_{max} - X_{min}$

X_{max} = శ్రేణిలోని గరిష్ట విలువ, X_{min} = శ్రేణిలోని కనిష్ట విలువ

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో వ్యాప్తి = అత్యధిక తరగతి యొక్క ఎగువ అవధి - అత్యల్ప వ్యవధి యొక్క దిగువ అవధి

వ్యాప్తి అనేది నిరపేక్షమైన విస్తరణ మానము. దత్తాంశము యే కొలత ప్రమాణంలో వుంటే వ్యాప్తి కూడా అదే కొలత ప్రమాణంలో వుండును. అందువల్ల రెండు శ్రేణులు ఒకే కొలత ప్రమాణంలో వున్నప్పుడు మాత్రమే వానిని పోల్చుటకు వీలు పడుతుంది. కాని వేరు వేరు కొలత ప్రమాణాలలో గల శ్రేణులను పోల్చుటకు సాపేక్ష విస్తరణ మానమును వినియోగించవలె. దానిని వ్యాప్తి గుణకమందురు.

8.3.1 వ్యాప్తి గుణకము (Coefficient of Range) :

విభాజనంలోని అత్యధిక $\left(X_{max}\right)$, అత్యల్ప విలువల $\left(X_{min}\right)$ మధ్య వ్యత్యాసాన్ని ఆ రెండింటి మొత్తంతో భాగిస్తే వచ్చు విలువను వ్యాప్తి గుణకం అంటారు. ఇది వ్యాప్తికి సాపేక్ష మానం.

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}}$$

X_{max} = శ్రేణిలోని అత్యధిక / గరిష్ట విలువ

X_{min} = శ్రేణిలోని అత్యల్ప / కనిష్ట విలువ

8.3.1.2 వ్యాప్తి - సుగుణాలు

1) విస్తరణను గణన చేయు సులభమైన విధానము కాని దీనిని ఒక బండ పద్ధతి అంటారు.

2) అర్థం చేసుకోవడం కూడా సులువు.

3) ఇది నిర్దిష్టముగా నిర్వచింపబడినది.

4) గణన చాలా సులువు కావున విస్తరణను అతి త్వరితంగా కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ - 1 : దిగువ దత్తాంశము నుంచి వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాన్ని గణన చేయండి.

నెలలు	నెలవారీ ఆదాయము (రూ॥లలో)
1	139
2	150
3	151
4	151
5	157
6	158
7	160
8	161
9	162
10	162
11	173
12	175

జవాబు : అత్యధిక ఆదాయము $\left(X_{max}\right)$ = రూ. 175-00

అత్యల్ప ఆదాయము (X_{min}) = రూ. 139-00

వ్యాప్తి = $X_{max} - X_{min}$ = 175 - 139 = రూ. 36

వ్యాప్తి గుణకము = $\dfrac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \dfrac{175-139}{175+139} = \dfrac{36}{314} = 0.115$

ఉదాహరణ 2 : కింది సమాచారానికి వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

అంశములు	పౌనఃపున్యం
5	7
6	12
7	20
8	18
9	10
10	4

వ్యాప్తి (Range) = అత్యధిక విలువ (X_{max}) - అత్యల్ప విలువ (X_{min})

X_{max} = 10, X_{min} = 5

వ్యాప్తి = 10 - 5 = 5

వ్యాప్తి గుణకం = $\dfrac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \dfrac{10-5}{10+5}$

వ్యాప్తి గుణకం = $\dfrac{5}{15} = 0.33$

ఉదాహరణ 3 : కింది సమాచారానికి వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

మార్కులు	విద్యార్థుల సంఖ్య
0 - 10	4
10 - 20	5
20 - 30	7
30 - 40	10
40 - 50	6
50 - 60	2

వ్యాప్తి (Range) = అత్యధిక విలువ (X_{max}) - అత్యల్ప విలువ (X_{min})

X_{max} = 60, X_{min} = 0

వ్యాప్తి = 60 - 0 = 60 మార్కులు

$$\text{వ్యాప్తి గుణకం} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{60-0}{60+0}$$

వ్యాప్తి గుణకం = 1.

ఉదాహరణ 4 : 50 మంది వయస్సు వివరాలు దిగువ శ్రేణిలో యివ్వబడినవి. వారి వయస్సు వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకాన్ని గణన చేయండి.

వయస్సు	16 - 20	21 - 25	26 - 30	31 - 35
వ్యక్తులు	10	15	17	8

జవాబు : వయస్సుకు సంబంధించిన చలాంకము అసమగ్రరూపంలో పంపిణీ చేయబడినది. దానిని సమగ్రరూపంలోకి మార్చవలె.

అప్పుడు మొదటి తరగతి 15.5 - 20.5

చివరి తరగతి 30.5 - 35.5

అత్యధిక విలువ (X_{max}) = 35.5

అత్యల్ప విలువ (X_{min}) = 15.5

వ్యాప్తి = $X_{max} - X_{min}$ = 35.5 - 15.5 = 20 సం॥లు

$$\text{వ్యాప్తి గుణకము} = \frac{X_{max} - X_{min}}{X_{max} + X_{min}} = \frac{35.5-15.5}{35.5+15.5} = \frac{20}{51} = 0.39$$

8.3.1.3 లోపములు

1. వ్యాప్తి శ్రేణిలో గల అన్ని చలనాలపై ఆధారపడదు. కేవలం అత్యధిక, అత్యల్ప చలనాలపై మాత్రమే ఆధారపడం వలన వానిలో యేర్పడే ఒడుదుడుకులకు ప్రభావితమగును. అందువలన విశ్వసనీయమైన విస్తరణ మానంగా పరిగణింపలేము.
2. ప్రతిచయనంలోని ఒడుదుడుకులకు విపరీతంగా ప్రభావితమగును.
3. వ్యాప్తి అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల మధ్య దత్తాంశ నిర్మాణాన్ని లేక పంపిణీని పరిగణనలోనికి గ్రహింపదు. అందువలన దీని విశ్వసనీయత పరిమితము.
4. వివృత అవధులు గల పౌనఃపున్య విభాజనాలలో వినియోగించడం సాధ్యపడదు.
5. గణిత విశ్లేషణకు నిలువలేదు.
6. ప్రతిచయన పరిమాణాన్ని బట్టి మార్పు చెందుచుండును.
7. W.I. King చెప్పినట్లు దీనిని ఆచారణాత్మక ప్రమాణంగా గ్రహింపలేము.

8.3.1.4 ఉపయోగాలు : పైన పేర్కొన్నట్లుగా తక్కువ సుగుణాలు, ఎక్కువ లోపాలు వున్ననూ, వాస్తవ ప్రపంచంలో వ్యాప్తి వల్ల అనేక ప్రయోజనాలున్నవి.

1. స్టాక్ మార్కెట్‌లో మార్పులు, ద్రవ్యరేట్లు, విదేశ మారకపు రేఖకు సంబంధించిన విస్తరణ అధ్యయనానికి ఉపయోగపడును.
2. వస్తూత్పత్తికి సంబంధించిన పరిశ్రమలలో క్వాలిటీ కంట్రోలునకు అనగా కంట్రో చార్ట్ ఆఫ్ రేంజి (Control Chart of Range) ద్వారా సహాయపడును.
3. దైనందిన కార్యకలాపాలైన డిపార్టుమెంటల్ స్టోర్‌లో రోజువారీ విక్రయాలు, ఒక ఫ్యాక్టరీలో పనిచేసేవారి వేతనాలు తదితర అంశాలలో మార్పుల అధ్యయనానికి తోడ్పడును.
4. వాతావరణ మార్పుల అధ్యయనానికి సహాయపడును.

8.3.2 చతుర్థాంశ విచలనము (Quartile Deviation or Semi-Inter-Quartile Range) : వ్యాప్తి విపరీతాంశాలకు ఎక్కువగా ప్రభావితం కావడం, ప్రతిచయన చాంచల్యాలకు గురికావడం మొదలగు లోపాలను కలిగియుండడం వలన వీనిని కొంత వరకు తొలగించుటకు చతుర్థాంశ విచలనము రూపొందించడం జరిగింది. చతుర్థాంశ విచలన గణనలో దిగువ 25% అంశాలు ఎగువ 25% అంశాలు వదలి మధ్య గల 50% అంశాలు గణనలోనికి గైకొనబడును. మధ్య వున్న 50% అంశాలలో సామాన్యంగా విపరీత విలువలు గల అంశాలుండవు.

ప్రథమ, తృతీయ చతుర్థాంశాల (Q_1 and Q_3) మధ్య వున్న తేడానే చతుర్థాంశక వ్యాప్తి లేదా ఇంటర్ క్వార్టయిల్ రేంజి (Inter quartile range) అంటారు. ఈ విలువలో సగభాగాన్ని అర్థచతుర్థాంశక వ్యాప్తి (Semi-inter Quartile / Range) అంటారు. సర్ ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ (Sir Francis Galton) దీనికి చతుర్థాంశ విచలనమని (Quartile Deviation) అని పేరు పెట్టారు. దీనిని QDతో సూచిస్తారు. రెండు చతుర్థాంశాల మధ్య వ్యాప్తిలో అర్థభాగం తీసుకుంటాము. కాబట్టి దీనికి సెమి యింటర్ క్వార్టయిల్ రేంజి అనే పేరు వున్నది.

చతుర్థాంశ విచలనము లేదా సెమీ ఇంటర్ క్వార్టయిల్ రేంజ్ $(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Q.D. = చతుర్థాంశ విచలనము (Quartile Deviation)

Q_1 = దిగువ చతుర్థాంశము (Lower Quartile)

Q_3 = ఎగువ చతుర్థాంశము (Upper Quartile)

8.3.2.1 చతుర్థాంశ విచలన గుణకం : చతుర్థాంశ విచలనము విస్తరణ యొక్క నిరపేక్షమానము రెండు శ్రేణులలో గల సాపేక్ష మార్పుల అధ్యయనానికి సాపేక్ష విస్తరణ మానము అవసరము. చతుర్తాంశ విచలనము యొక్క సాపేక్ష మానాన్నే చతుర్థాంశ విచలన గుణకమందురు.

$$\text{Coef.Q.D.} = \frac{\frac{Q_3 - Q_1}{2}}{\frac{Q_3 + Q_1}{2}} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

Coef. Q.D. (Coefficient of quantile deviation) = చతుర్థాంశ విచలన గుణకం

చతుర్థాంశ విచలనము విభాజనంలో మధ్యగతము నుండి Q_1, Q_3 లు సగటున ఎంత తేడా కలిగియున్నది తెల్పును.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - చతుర్థాంశ విచలన గణన :

గణన విధానము : 1. శ్రేణిలోని అంశాలను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చుకోవలె. 2. $\frac{N+1}{4}$ సూత్ర సహాయంతో దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము, $\left(\frac{N+1}{4}\right)3$ సూత్ర సహాయంతో ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానాలను గుర్తించవలె. 3. ఆ స్థానాలలో వున్న అంశాల విలువలను Q_1, Q_3 లుగా తెలుసుకుంటాము. 4. దిగువ సూత్రం ద్వారా చతుర్థాంశ విచలనము గణన చేయవలె.

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ఉదాహరణ 5 : దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి చతుర్థాంశ విచలనము, విచలన గుణకము కనుక్కోండి.

బాలుర ఎత్తులు సెం.మీ॥లలో 152, 160, 164, 171, 150, 154, 167, 157, 175, 170, 176

జవాబు : బాలుర ఎత్తులను ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చవలె.

క్రమసంఖ్య(S.No.)	బాలుర ఎత్తు సెం.మీ॥లలో(x)
1	150
2	152
3	154
4	157
5	160
6	164
7	167
8	170
9	171
10	175
11	176

దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము $(Q_1) = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము.

$N = 11$ కాబట్టి $Q_1 = \frac{11+1}{4} = \frac{12}{4} = 3$ వ అంశము.

3వ అంశము = 154, కాబట్టి $Q_1 =$ 154 సెం॥మీటర్లు.

ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానము $(Q_3) = \left(\frac{N+1}{4}\right)3$ వ అంశము.

$$= \left(\frac{11+1}{4}\right)3 = \frac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{4}} \times 3 = 9 \text{ వ అంశము.}$$

9వ అంశము = 171, కాబట్టి $Q_3 = 171$ సెం.మీటర్లు

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{171-154}{2} = \frac{17}{2} = 8.5 \text{ సెం.మీ.}$$

$$\text{Coef.Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{171-154}{171+154} = \frac{17}{325} = 0.052$$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - చతుర్థాంశ విచలన గణన : (1) విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో చతుర్థాంశ విచలనము కనుక్కోవడానికి పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె. **2.** $\frac{N+1}{4}$ సూత్రం ద్వారా దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము (Q_1), దాని అనుబంధ అంశము ద్వారా దిగువ చతుర్తాంశ విలువ కనుగగొనవలె. **3.** $\left(\frac{N+1}{4}\right)3$ సూత్రం ద్వారా ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానము, దాని అనుబంధ అంశము ద్వారా ఎగువ చతుర్థాంశ విలువ కనుగొనవలె. ఆ తరువాత క్రింది సూత్రము ఉపయోగించాలి.

చతుర్థాంశ విచలనము $(Q.D) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము $(\text{Coef.Q.D.}) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

ఉదాహరణ 6 : దిగువ దత్తాంశము నుండి చతుర్థాంశ విచలనము, విచలన గుణకము గణన చేయండి.

వారం సంపాదన రూ॥లలో	20	25	30	35	40
కార్మికుల సంఖ్య	2	4	6	4	4

జవాబు :

వారం సంపాదన (x)	కార్మికుల సంఖ్య (f)	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)
20	2	2
25	4	6
30	6	12
35	4	16
40	4	20

దిగువ చతుర్థాంశ స్థానము $(Q_1) = \frac{N+1}{4}$ వ అంశము, $N = 20$, Q_1 స్థానం = $\frac{20+1}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$వ అంశము. ఇది సంచిత పౌనఃపున్యము 6లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ అంశము విలువను 25 చతుర్థాంశ విలువగా గుర్తించవలె.

కాబట్టి $Q_1 = 25$

ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానము $(Q_3) = \left(\frac{N+1}{4}\right)3$ వ అంశం. $= \left(\frac{20+1}{4}\right)3$ వ అంశము

$$= \frac{21}{4} \times 3 \text{ వ అంశము}$$

$$Q_3 = 5.25 \times 3 = 15.75 \text{ వ అంశము}$$

15.75వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 16లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ అంశము 35ను చతుర్థాంశ విలువగా గుర్తించవలె. కాబట్టి $Q_3 = 35$

చతుర్థాంశ విచలనము $(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$Q.D. = \frac{35-25}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము $(Coef.QD) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$Coef.Q.D. = \frac{35-25}{35+25} = \frac{10}{60} = 0.16$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు : చతుర్థాంశ విచలన గణన

గణన విధానము : **1.** మొదట పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేయవలె, **2.** $\frac{N}{2}$ సూత్రం సహాయంతో Q_1 తరగతి గుర్తించవలె, **3.** Q_1 తరగతిని కనుగొన్న తరువాత దిగువ సూత్రము వినియోగించవలె.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$\ell_1 =$ మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి దిగువ అవధి, $\ell_2 =$ మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి ఎగువ అవధి, $f =$ మొదటి చతుర్థాంశ తరగతి పౌనఃపున్యము, $N =$ పౌనఃపున్యం మొత్తం, $m =$ దిగువ చతుర్థాంశ తరగతికి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనః పున్యము

4. Q_3 తరగతిని $\frac{3N}{4}$ సూత్ర సహాయంతో గుర్తించవలె. ఆ తరువాత $Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$ సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

$\ell_1 =$ ఎగువ చతుర్థాంశ తరగతి దిగువ అవధి, $\ell_2 =$ ఎగువ చతుర్థాంశ తరగతి ఎగువ అవధి.

$f =$ ఎగువ చతుర్థాంశ తరగతి పౌనఃపున్యము, $N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యం,

$m =$ ఎగువ చతుర్థాంశ తరగతికి దిగువ తరగతి సంచిత పౌనఃపున్యము.

ఉదాహరణ 7 : కింది సమాచారానికి చతుర్థాంశ విచలనము, విచలన గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

X :	10-20	20-30	30-40	40-60	60-70	70-80
f :	12	19	5	10	9	6

జవాబు : చతుర్థాంశ విచలనం, విచలన గుణకం గణన

X	f	c.f.
10 - 20	12	12
20 - 30	19	31
30 - 40	5	36
40 - 60	10	46
60 - 70	9	55
70 - 80	6	61

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q_1 స్థానం $\frac{N}{4}$ వ అంశం = $\frac{61}{4}$ = 15.25 వ అంశం.

15.25వ అంశం cf 31లో ఉంది. కావున Q_1 తరగతి = 20 - 30

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 20,\ \ell_2 = 30,\ \frac{N}{4} = 15.25,\ m = 12,\ f = 19$$

$$\therefore Q_1 = 20 + \frac{15.25 - 12}{19} \times (30 - 20) = 20 + 1.71 = 21.71$$

Q_3 స్థానం $\frac{3N}{4}$ వ అంశం $= \frac{3 \times 61}{4} = 45.75$వ అంశం. cf 46లో ఉంది కావున దాని అనుబంధ తరగతి 40-60 అనేది Q_3 తరగతి అవుతుంది.

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 40,\ \ell_2 = 60,\ \frac{3N}{4} = 45.75,\ c.f. = 36, f = 10$$

$$Q_3 = 40 + \frac{45.75 - 36}{10} \times (60 - 40) = 40 + 19.5 = 59.5$$

$$\text{Q.D.} = \frac{59.5 - 21.71}{2} = \frac{37.79}{2} = 18.895$$

$$\text{Coef. Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{59.5 - 21.71}{59.5 + 21.71} = \frac{37.79}{81.21} = 0.465$$

ఉదాహరణ 8 : దిగువ దత్తాంశము నుండి చతుర్థాంశ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

వయస్సు (సం॥లలో)	20 లోపు	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-పైన
పనివారు	21	28	35	40	48	36	29	17	10	6

జవాబు : దత్తాంశము వివృత తరగతులలో యివ్వబడినందున చతుర్థాంశ విచలనము కనుగొనడం ద్వారా మాత్రమే విస్తరణను కనుగొనగలము. ఈ విధమైన తరగతులకు ఉత్తమమైనది చతుర్థాంశ విచలనము.

వయస్సు(సం॥లలో)(C.I.)	పనివారు(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
20 లోపు	21	21
20 - 25	28	49
25 - 30	35	84
30 - 35	40	124
35 - 40	48	172
40 - 45	36	208
45 - 50	29	237
50 - 55	17	254
55 - 60	10	264
60 పైన	6	270
	270	

Q_1 స్థానం లేదా తరగతి = $\frac{N}{4}$ వ అంశం, $N = 270$

Q_1 స్థానం $= \frac{270}{4} = 67.5$ వ అంశం

67.5 అనే అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 84లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ తరగతి 25-30 అనేది Q_1 తరగతి అవుతుంది.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 25,\ \ell_2 = 30,\ f = 35,\ \frac{N}{4} = 67.5,\ m = 49$$

$$Q_1 = 25 + \frac{67.5 - 49}{35}(30 - 25) = 27.6$$

Q_3 స్థానం లేదా తరగతి = $\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 270}{4} = 202.5$వ అంశం.

202.5 అనే అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము **208**లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి **40 - 45** అనేది Q_3 తరగతి అవుతుంది..

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 40,\ \ell_2 = 45,\ f = 36,\ \frac{3N}{4} = 202.5,\ m = 172$$

$$= 40 + \frac{202.5 - 172}{36}(45 - 40) = 40 + 4.2$$

$$Q_3 = 44.2$$

చతుర్థాంశ విచలనము $(Q.D) = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{44.2 - 27.6}{2} = \frac{16.6}{2} = 8.3$ సం॥లు

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము $(Coef.Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$Coef.Q.D. = \frac{44.2 - 27.6}{44.2 + 27.6} = \frac{16.6}{71.8} = 0.23$$

ఉదాహరణ 9 : ఒక సంవత్సరము శస్త్రచికిత్స కోసం హాస్పటల్లో చేరిన వారి వయస్సు, సంఖ్య దిగువ దత్తాంశములో యివ్వబడినవి. వాటి నుండి వారి వయస్సు యొక్క చతుర్థాంశ విచలనము, దాని గుణకాన్ని గణన చేయుము.

వయస్సు (సం॥లలో)	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54	55-59	60-పైన
పనివారు	17	43	21	16	24	48	52	40	12

జవాబు : ఇవ్వబడిన దత్తాంశము అసమగ్రరూపములో వున్నది. కాబట్టి సమగ్రరూపంలోకి మార్చుటకు తరగతులను పునర్నిర్మించవలె. పౌనఃపున్యాన్ని సంచితం చేసి Q_1, Q_3 అంశాలను కనుగొనవలె.

వయస్సు(సం॥లలో)(C.I)	వ్యక్తులు(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
19.5 - 24.5	17	17
24.5 - 29.5	43	60
29.5 - 34.5	21	81

34.5 - 39.5	16	97
39.5 - 44.5	24	121
44.5 - 49.5	48	169
49.5 - 54.5	52	221
54.5 - 59.5	40	261
59.5 ఆ పైన	12	273
	273	

Q_1 స్థానం = $\frac{N}{4}$ వ అంశం, $N = 273$ కావున

Q_1 స్థానం $= \frac{273}{4} = 68.25$ వ అంశం

68.25 అనే అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము **81**లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి **29.5 - 34.5** Q_1 తరగతి అవుతుంది.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 29.5,\ \ell_2 = 34.5,\ f = 21,\ \frac{N}{4} = 68.25,\ m = 60$$

$$Q_1 = 29.5 + \frac{68.25 - 60}{21}(34.5 - 29.5)$$

$Q_1 = 29.5 + 1.96 \ = 31.46$ సంవత్సరాలు

Q_3 స్థానం = $\frac{3N}{4}$ వ అంశం $= \frac{3 \times 273}{4} = 204.75$ వ అంశం.

204.75 అనే అంశము సంచిత పౌనఃసపున్యము **221**లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి **49.5 - 54.5** Q_3 తరగతి అవుతుంది.

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 49.5,\ \ell_2 = 54.5,\ f = 52,\ \frac{3N}{4} = 204.75,\ m = 169$$

$$Q_3 = 49.5 + \frac{204.75 - 169}{52}(54.5 - 49.5)$$

$Q_3 = 49.5 + 3.44 = 52.93$ సంవత్సరాలు

చతుర్థాంశ విచలనము (Q.D.) = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{52.93 - 31.46}{2} = \frac{21.47}{2}$ = **10.74** సంవత్సరములు

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము $(\text{Coef.Q.D.}) = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$$\text{Coef.Q.D.} = \frac{52.93 - 31.46}{52.93 + 31.46} = \frac{21.43}{84.39} = 0.25$$

ఉదాహరణ 10 : దిగువ దత్తాంశమునకు చతుర్థాంశ విచలనము, దాని గుణకము కనుగొనుము.

అంశములు	సంచిత పౌనఃపున్యము
3 కంటే తక్కువ	1
5 కంటే తక్కువ	3
7 కంటే తక్కువ	6
9 కంటే తక్కువ	11
11 కంటే తక్కువ	15
13 కంటే తక్కువ	18
15 కంటే తక్కువ	20

జవాబు : కంటే తక్కువ రూపంలో ఉన్న దత్తాంశమునకు తరగతులను పునర్నిర్మించి, సాధారణ పౌనఃపున్యము రాబట్టి చతుర్థాంశ విచలనము, దాని గుణకము కనుగొందుము. తరగతుల ఎగువ అవధులివ్వబడినవి కనుక దిగువ అవధులు, తరగతి అంతరం రెండుగా గుర్తించి తరగతులు నిర్మించవచ్చు.

తరగతులు(CI)	పౌనఃపున్యము(f)	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)
1 - 3	1	1
3 - 5	2	3
5 - 7	3	6
7 - 9	5	11
9 - 11	4	15
11 - 13	3	18
13 - 15	2	20
	N = 20	

దిగువ చతుర్థాంశ స్థానం $(Q_1) = \frac{N}{4}$ వ అంశం, $N = 20$ కావున

Q_1 స్థానం $= \frac{20}{4} = 5$వ అంశము

5వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 6లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి 5-7 అనేది దిగువ చతుర్థాంశ తరగతి అవుతుంది.

$$Q_1 = \ell_1 + \frac{\frac{N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 5,\ \ell_2 = 7,\ f = 3,\ \frac{N}{4} = 5,\ m = 3$$

$$Q_1 = 5 + \frac{5-3}{3}(7-5) = 5 + \frac{2}{3} \times 2 = 5 + 1.3 = 6.3$$

ఎగువ చతుర్థాంశ స్థానం $(Q_3) = \frac{3N}{4}$ వ అంశం

$$= \frac{3 \times 20}{4} = 15 \text{ వ అంశము.}$$

15వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 15లో వున్నది. కావున దాని అనుబంధ తరగతి 9-11 అనేది ఎగువ చతుర్థాంశ తరగతి అవుతుంది.

$$Q_3 = \ell_1 + \frac{\frac{3N}{4} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 9,\ \ell_2 = 11,\ f = 4,\ \frac{3N}{4} = 15,\ m = 11$$

$$Q_3 = 9 + \frac{15-11}{4}(11-9)$$

$$Q_3 = 9 + 2 = 11$$

చతుర్థాంశ విచలనం = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{11 - 6.3}{2} = \frac{4.7}{2} = 2.35$

చతుర్థాంశ విచలన గుణకము = $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{11 - 6.3}{11 + 6.3} = \frac{4.7}{17.3} = 0.272$

8.3.2.2 చతుర్థాంశ విచలనము - సుగుణాలు

చతుర్థాంశ విచలనం వ్యాప్తితో పోల్చితే ఎంతో మెరుగైన కొలమానం. ఈ కొలమానం వల్ల కింది సుగుణాలున్నాయి.

(ఎ) వ్యాప్తి కేవలం దత్తాంశంలోని రెండు విలువలు అంటే అత్యధిక, అత్యల్ప విలువల ఆధారంగా విస్తరణను గణన చేయును. కాని చతుర్థాంశ విచలనము శ్రేణిలోని మధ్య గల 50% అంశాలను గణనలోనికి గైకొనడం వల్ల వ్యాప్తి కంటే మెరుగైన విస్తరణ మానంగా గుర్తింపవచ్చును.

(బి) చతుర్థాంశ విచలనము శ్రేణిలో ఎగువ 25% దిగువ 25% అంశాలను గణన లోనికి గైకొనకపోవడం వలన విపరీతాంశాల ప్రభావమునకు గురికాదు.

(సి) విస్తృత అవధులు గల దత్తాంశము నుండి విస్తరణను గణన చేయగల ఏకైక అత్యుత్తమ కొలమానము చతుర్థాంశ విచలనము.

(డి) దీనిని సులభంగా గణన చేయవచ్చు, అర్థం చేసుకొనవచ్చు,

(ఇ) ఎక్కువ అసౌష్టవ లేదా వైషమ్యం గల దత్తాంశాలను కూడా ఈ విస్తరణమానం గణన చేయవచ్చును.

8.3.2.3 లోపాలు

(1) శ్రేణిలోని మధ్య వుండే 50% అంశాలను మాత్రమే గణనలోనికి గైకొనడం వలన అన్ని అంశాలపై ఆధారపడిన విస్తరణమానము కాదు.

(2) ప్రతిచయన ఒడుదుడుకులకు ఎక్కువగా గురియగును.

(3) బీజీయ ప్రస్తావనకు నిలబడదు.

(4) ఇది నిజానికి విస్తరణ మానము కాదు. సగటు చుట్టు వున్న విస్తరణను చూపడం లేదు. దూరాన్ని మాత్రమే చూపుచున్నది. చతుర్థాంశ విచలనము సగటు నుండి తీసుకొన్నది కాదు. ఇది కేవలం స్థాన నిర్ణయం వల్ల యేర్పడిన మానం కాబట్టి కొంత మంది గణాంక శాస్త్రవేత్తలు చతుర్థాంశ విచలనము భాగత్వపు (Partition) లేదా విభజన మానం కాని, విస్తరణ మానం కాదు అనే అభిప్రాయమును తెల్పిరి.

10 - 90 శతాంశ వ్యాప్తి (10 - 90 Percentile Range) : చతుర్థాంశ విచలనము వలె శతాంశ వ్యాప్తిని కూడా గణన చేస్తాము. ఇందు దిగువ 10% అంశాలను, ఎగువ 10% అంశాలను విడచిపెట్టి విస్తరణను గణన చేస్తారు. అనగా శ్రేణిలోని 80% అంశాలు గణనలోనికి గ్రహిస్తారు. ఇందు 10వ శతాంశము, 90వ శతాంశములను తీసుకుని వాటి మధ్య వ్యాప్తిని గణన చేస్తారు.

10 - 90 శతాంశ వ్యాప్తి = $P_{90} - P_{10}$

$P_{90} = 90$ వ శతాంశము, $P_{10} = 10$ వ శతాంశము

10.90 సెమీ. పర్సెన్‌టైల్ రేంజి = $\dfrac{(P_{90} - P_{10})}{2}$

శతాంశ వ్యాప్తి గుణకము = $\dfrac{\dfrac{(P_{90} - P_{10})}{2}}{\dfrac{(P_{90} + P_{10})}{2}} = \dfrac{P_{90} - P_{10}}{P_{90} + P10}$

శతాంశ వ్యాప్తి శ్రేణిలోని 80% అంశాలను గణనలోనికి గైకొనడం వలన చతుర్థాంశ విచలనము కంటే మెరుగైనదని గ్రహింపవచ్చును. ఇది విపరీతాంశాల వల్ల ప్రభావితం కాదు. చతుర్థాంశ వ్యాప్తికి గల లోపాలనే శతాంశ వ్యాప్తి కూడా ఎదుర్కొనుచున్నది. అందువలన దీని ఉపయోగం చాలా తక్కువ. దీనిని ఎక్కువగా విద్యాసంబంధమైన గణాంకాలలో (Educational Statistics)లో ఉపయోగిస్తారు.

8.3.3 మాధ్యమిక విచలనము (Mean Deviation) : వ్యాప్తి, చతుర్థాంశ విచలనము, శతాంశ వ్యాప్తి అనేవి స్థాన నిర్ణయమానాలు. వీటిని నిజమైన విస్తరణ మానాలుగా గుర్తింపలేము. సగటు నుండి విచలనాలను తీసుకొనక పోవడం వలన సగటు చుట్టు వున్న విస్తృతిని ఇవి చూపలేవు. విభాజనపు ఆకృతిని క్షుణ్ణంగా అర్థం చేసుకొనుటకు విచలనాలను సగటు నుండి తీసుకొనవలె. అట్లా తీసుకొని రూపొందించిన మానాలు మాధ్యమ విచలనము (Mean Deviation), ప్రామాణిక విచలనము (Standard Deviation). వీటిలో మాధ్యమిక విచలనాన్ని గూర్చి తెలుసుకుందాం.

"గుర్తును అలక్ష్యం చేసి కేంద్రస్థానపు విలువల నుండి వివిధ అంశాలకు వున్న విచలనాల అంకమధ్యమాన్ని శ్రేణుల మాధ్యమ విచలనంగా నిర్వచింపవచ్చు". మాధ్యమిక విచలనాలను కేంద్రస్థానపు కొలతలైన అంకమధ్యమము మధ్యగతము, బాహుళకములలో ($\bar{x}$ or M or Z) దేనినుంచైనా తీసుకొనవచ్చు. అంకమధ్యమము నుండి తీసుకొనే విచలనాల సంకలనము సున్నాకు సమానముగాను, బాహుళకం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలు గరిష్టంగాను ఉంటాయి. మధ్యగతం నుండి తీసుకొన్న విచలనాల సంకలనము కనిష్టముగా వుంటుంది. కనుక మధ్యగతం మాధ్యమ విచలన గణనకు ఉత్తమమైనదిగా భావించడం జరుగుతుంది.

వ్యక్తిగత శ్రేణులు : అయితే మాధ్యమిక విచలన గణనకు అతి తరచుగా ఉపయోగించే సగటు అంకమధ్యమం గుర్తులను వదలి సగటు నుంచి తీసుకొన్న విచలనాల మొత్తాన్ని ఆ అంశాల సంఖ్యతో భాగిస్తే మాధ్యమిక విచలన గుణకం వస్తుంది.

$$M \cdot D(\delta) = \frac{\Sigma|X - \text{సగటు}|}{N}$$ ఇక్కడ $N =$ అంశాల సంఖ్య,

$\Sigma|X - \bar{X}|$ = గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి సగటు నుంచి తీసుకున్న విచలనాల సంకలనము

M.D లేదా δ = మాధ్యమిక విచలనం N = అంశాల సంఖ్య

$\Sigma|X - \text{సగటు}|$ = గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి సగటు నుండి తీసుకొన్న విచలనాల మొత్తం (సగటు అంటే $\bar{x}$ లేదా M లేదా Z కావచ్చు).

మాధ్యమ విచలనాన్ని సగటు విచలనం అని కూడా అందురు. ఇది పరమమానము.

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో వివిధ సగటుల ద్వారా మాధ్యమిక విచలన సూత్రాలు

అంకమధ్యమము నుంచి :

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\Sigma|x - \bar{x}|}{N}$$

$\delta_{\bar{x}}$ = అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం, $\Sigma|x - \bar{x}|$ = గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి అంకమధ్యమము నుంచి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం, $N =$ అంశాల సంఖ్య, $\bar{x} =$ అంకమధ్యమం.

మధ్యగతము నుంచి :

$$\delta_M = \frac{\Sigma|x - M|}{N}$$

δ_M = మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం, $\Sigma|x-M|$ = గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి మధ్యగతం నుంచి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం. N = అంశాల సంఖ్య, M = మధ్యగతము.

బాహుళకము నుంచి :

$$\delta_z = \frac{\Sigma|x-z|}{N}$$

δz = బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం, $\Sigma|x-z|$ = గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి బాహుళకం నుంచి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం. N = అంశాల సంఖ్య, z = బాహుళకం.

8.3.3.1 మాధ్యమిక విచలన గుణకం : మాధ్యమ విచలనము "పరమ విస్తరణ మానము'' (Absolute measure of dispersion). దీని సాపేక్ష మానం మాధ్యమిక విచలన గుణకం. దీని సాపేక్షిక మానము (Relative measure) గణన చేయుటకు మాధ్యమ విచలనాన్ని సగటుతో $(x \text{ or } M \text{ or } Z)$ భాగించవలె. మాధ్యమ విచలనాన్ని గణన చేయుటకు ఏ సగటు ఉపయోగించబడిందో మాధ్యమ విచలన గుణకాన్ని (Coefficient of mean deviation) కనుక్కొనేటప్పుడు అదే సగటు ఉపయోగించవలె.

$$\text{మాధ్యమ విచలన గుణకము } (\text{Coef.}\delta) = \frac{MD}{\text{Average}}$$

$$\text{Coef.}\,\delta = \frac{\text{మాధ్యమ విచలనము}}{\text{సగటు}}$$

$$\text{అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమిక విచలన గుణకం } (\text{Coef.}\delta_{\bar{x}}) = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}}$$

$$\text{మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలన గుణకం } (\text{Coef.}\delta_M) = \frac{\delta_M}{M}$$

$$\text{బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలన గుణకం } (\text{Coef.}\delta_Z) = \frac{\delta_Z}{Z}$$

ఉదాహరణ 11 : దిగువ ఇవ్వబడిన వ్యక్తిగత శ్రేణులు దత్తాంశం నుండి అంకమధ్యమం మధ్యగతం ద్వారా మాధ్యమిక విచలనాన్ని, దాని గుణకాన్ని గణన చేయండి. విభాజనాన్ని మొదట ఆరోహణ క్రమంలో అమర్చడం జరిగింది.

సంవత్సరము	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
దిగుమతులు (మి.టన్నులలో)	1.6	1.8	2.6	2.7	2.8	3.7	2.1	4.7	3.9	2.5

జవాబు : యివ్వబడిన దత్తాంశమునకు మాధ్యమ విచలనము, గుణకము - అంకమధ్యమము, మధ్యగత పరంగా గుణించుటకు పట్టిక నిర్మించబడినది.

సంవత్సరము (Sl.No.)	దిగుమతులు (మిలియన్ టన్నులలో) ఆరోహణ క్రమములో	విచలనాలు అంకమధ్యమము నుంచి $\lvert x-\bar{x}\rvert$	విచలనాలు మధ్యగతము నుంచి $\lvert x-M\rvert$
1	1.6	1.24	1.05
2	1.8	1.04	0.85
3	2.1	0.74	0.55
4	2.5	0.34	0.15
5	2.6	0.24	0.05
6	2.7	0.14	0.05
7	2.8	0.04	0.15
8	3.7	0.86	1.05
9	3.9	1.06	1.25
10	4.7	1.86	2.05
$N=10$	$\Sigma x = 28.4$	$\Sigma\lvert X-\bar{X}\rvert = 7.56$	$\Sigma\lvert X-M\rvert$

(1) అంకమధ్యమము $(\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{N}$

$$\bar{x} = \frac{28.4}{10} = 2.84$$

(2) మధ్యగతము **=** $\frac{N+1}{2}$ వ అంశము, $N=10$

$$= \frac{10+1}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 \text{ వ అంశము}$$

5.5వ అంశము = $\frac{(5\text{వ అంశం} + 6\text{వ అంశం})}{2}$

$$= \frac{2.6+2.7}{2} = 2.65 \text{ వ అంశం}$$

మధ్యగతము (M) = **2.65**

అంకమధ్యమము నుంచి మాధ్యమ విచలనము $\delta\bar{x} = \frac{\Sigma\lvert X-\bar{X}\rvert}{N}$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{7.56}{10} = 0.756$$

మధ్యగతము నుంచి మాధ్యమ విచలనము $(\delta_M) = \frac{\Sigma\lvert X-M\rvert}{N} = \frac{7.20}{10} = 0.72$

మాధ్యమ విచలనాలు మధ్యగత పరంగా తక్కువగా వున్నది.

(1) మాధ్యమ విచలన గుణకము $\left(\text{Coef}.\delta_{\overline{X}}\right) = \frac{\delta_{\overline{X}}}{\overline{x}} = \frac{0.756}{2.84} = 0.2662$

(2) మాధ్యమ విచలన గుణకము $\left(\text{Coef}.\delta_{M}\right) = \frac{\delta_M}{M} = \frac{0.72}{2.65} = 0.2717$

$\delta_{\overline{x}} =$ అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమి విచలనం, $\text{Coef}.\delta_{\overline{x}} =$ అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమిక విచలన గుణకం

$\delta_M =$ మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం $\text{Coef}.\delta_M =$ మాధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలన గుణకం

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మాధ్యమ విచలన గణన : అంకమధ్యమము నుండి లేక మధ్యగతము నుండి తీసుకొన్న విచలనాలను వాటి యొక్క అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్ధాలను సంకలనము చేసి మొత్తం పౌనఃపున్యముతో భాగిస్తే విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాధ్యమ విచలనము వస్తుంది.

అంకవ ుధ్యమం నుంచి మాధ్యమ విచలనము $\left(\delta_{\overline{x}}\right)$

$$\delta_{\overline{x}} = \frac{\Sigma f\,|x-\overline{x}|}{N}$$

$\delta_{\overline{x}}$ **=** అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం, $N=$ మొత్తం పౌనఃపున్యం

$\Sigma f\,|x-\overline{x}|$ **=** గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను అనుబంధపౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం $\left(\delta_M\right)$

$$\delta_M = \frac{\Sigma f\,|x-M|}{N}$$

$\delta_M =$ మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం

$N =$ పౌనఃపున్యం మొత్తం

$\Sigma f\,|X-M| =$ గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి మధ్యగతం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను బంధ పౌనః పున్యంతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

$M =$ మధ్యగతం

బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం $\left(\delta_Z\right)$

$$\delta_Z = \frac{\Sigma f\,|X-Z|}{N}$$

$\delta_Z =$ బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యం

$\Sigma f\,|X-Z|$ **=** గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి బాహుళకం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

$$\delta_Z = \frac{\Sigma f\,|X-Z|}{N}$$

ఉదాహరణ 12 : ఒక తరగతిలో బాలుర బరువులు క్రింది పట్టీలో యివ్వబడినవి. వాని నుండి మాధ్యమ విచలనాన్ని విచలన గుణకాన్ని గణన చేయండి.

బరువు (కి.గ్రా.లలో)	43	45	47	49	51	53	55	57	59
బాలుర సంఖ్య	12	15	23	35	25	17	8	5	3

జవాబు :

బరువులు కి.గ్రా x	బాలుర సంఖ్య f	fx సంచిత పౌనఃపున్యం	cf	విచలనాలు అంకమధ్యమం నుండి $f\|x-\bar{x}\|$	$f\|x-\bar{x}\|$	మధ్యగతం నుండి విచలనాలు $\|x-M\|$	$f\|x-M\|$
43	12	516	12	6	72	6	72
45	15	675	27	4	60	4	60
47	23	1081	50	2	46	2	46
49	35	1765	85	0	0	0	0
51	25	1275	110	2	50	2	50
53	17	901	127	4	68	4	68
55	8	440	135	6	48	6	48
57	5	285	140	8	40	8	40
59	3	177	143	10	30	10	30
	N = **143**	Σf_x = **7065**			$\Sigma f\|x-\bar{x}\| = \mathbf{414}$		$\Sigma f\|x-M\| = \mathbf{414}$

అంకమధ్యమం :

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{7065}{143} = 49$$

అంకమధ్యమం నుండి మధ్యమ విచలనము

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{\Sigma f|x-\bar{x}|}{N}$$

$$\delta_{\bar{x}} = \frac{414}{143} = 2.9$$

మధ్యమ విచలన గుణకము (అంకమధ్యమము నుండి)

$$\text{Coef.}\ \delta_{\bar{x}} = \frac{\delta\bar{x}}{\bar{x}} = \frac{2.9}{49} = 0.06$$

మధ్యగతం : $M = \frac{N+1}{2}$ అంశము, $N = 143$

$$M = \frac{143+1}{2} = \frac{144}{2} = 72 \text{ వ అంశము}$$

72వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము **85** లో వున్నది. దాని అనుబంధ చల రాశి విలువ **49** మధ్యగతమగును. $M = 49$

(2) మధ్యగతం నుండి మధ్యమ విచలనం

$$\delta_M = \frac{\Sigma f\,|x - M|}{N}$$

$$\delta_M = \frac{414}{143} \times 414 = 2.9$$

(2) మధ్యమ విచలన గుణకం (మధ్యగతం నుంచి)

$$\text{Coef}.\delta_{\overline{x}} = \frac{\delta_M}{M} = \frac{2.9}{49} = 0.06$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాధ్యమిక విచలనాన్ని గణించే సూత్రాలు

అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం $(\delta_{\overline{x}})$

$$\delta_{\overline{x}} = \frac{\Sigma f\,|x - \overline{x}|}{N}$$

మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం (δ_M)

$$\delta_M = \frac{\Sigma f\,|x - M|}{N}$$

బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలనం

$$\delta_Z = \frac{\Sigma f\,|x - z|}{N}$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో x అంటే మధ్య విలువలు సూత్రంలోని గుర్తుల వివరణ విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో ఇచ్చిన వివరణయే. సాధారణంగా మాధ్యమిక విచలనాన్ని బాహుళకం నుంచి గణన చేయడం జరగదు. అందుచేత బాహుళకం నుంచి మాధ్యమిక విచలనాన్ని గణన చేసే ఉదాహరణ చూపలేదు.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మధ్యమ విచలనము - మధ్యగతము నుండి : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతుల మధ్య విలువలను x గా భావిస్తాము. పౌనఃపున్యము సంచితము చేసి $\frac{N+1}{2}$ సూత్రం ద్వారా మధ్యగత స్థానాన్ని, మధ్యగత తరగతిని గుర్తించి మధ్యగతాన్ని కనుగొనవలె. మధ్యవిలువలకు, మధ్యగతానికి గల తేడా లేదా విచలనాలు గుర్తులను వదలివేసి $|x - M|$ కనుగొనుము. $|\;|$ గుర్తును మాడ్యులస్ అంటారు. మధ్యగతం నుంచి $|x - M|$ విచలనాలు అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి గుణ లబ్దాల సంకలనము $\Sigma f\,|x - M|$ కనుగొనవలె. తరువాత మధ్యమ విచలనము, గుణకము కనుగొనవలె.

ఉదాహరణ 13 : దిగువ దత్తాంశము నుండి మధ్యమ విచలనము, దాని గుణకము గణన చేయండి.

తరగతులు	0 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 25
బాలుర సంఖ్య	3	4	5	4	3

జవాబు :

తరగతులు CI	పౌనఃపున్యము f	మధ్య విలువలు x	సంచిత పౌనఃపున్యము (cf)	గుర్తులను వదలివేసి మధ్యగతం నుంచి విచలనాలు $\lvert x-M \rvert$	సంకలనాలు $f\lvert x-M \rvert$
0 - 5	3	2.5	3	10	30
5 - 10	4	7.5	7	5	20
10 - 15	5	12.5	12	0	0
15 - 20	4	17.5	16	5	20
20 - 25	3	22.5	19	10	30
	$N=19$				$\Sigma f\lvert x-M \rvert = 100$

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ అంశము, $N=19$

మధ్యగత స్థానము $=\frac{19}{2}=9.5$వ అంశము

9.5వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 12లో వున్నది. కాబట్టి దాని అనుబంధ తరగతి 10 - 15 మధ్యగత తరగతి అవుతుంది. Median class $=10-15$

$$M=\ell_1+\frac{\frac{N}{2}-m}{f}(\ell_2-\ell_1)$$

$$\ell_1=10,\ \ell_2=15,\ f=5,\ \frac{N}{2}=9.5,\ m=7$$

$$M=10+\frac{9.5-7}{5}(15-10)$$

$$M=12.5$$

మాధ్యమ విచలనము $(\delta_M)=\frac{\Sigma f\lvert x-M \rvert}{N}$

$$(\delta_M)=\frac{100}{19}=5.26$$

మాధ్యమ విచలన గుణకము $(\text{Coef. } \delta_M)=\frac{\delta_M}{M}$

$$\text{Coef. } \delta_M=\frac{5.26}{12.5}=0.42$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - మాధ్యమ విచలనము - అంకమధ్యమము నుండి : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతుల మధ్య విలువలను x గా భావించాలి. $\frac{\Sigma fx}{N}$ సూత్రం సహాయంతో అంకమధ్యమం $(\overline{x})$ కనుగొనవలె. గుర్తులను అలక్ష్యం చేసి ప్రతి అంశానికి అంకమధ్యమానికి గల తేడా లేదా విచలనము $|x-\overline{x}|$లను కనుగొనవలె. విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి గుణలబ్ధాల సంకలనము $\Sigma f|x-\overline{x}|$ కనుగొనవలె. ఆ తరువాత క్రింది సూత్రం ద్వారా మాధ్యమిక విచలనం గణించాలి.

$$\delta_{\overline{x}} = \frac{\Sigma f|x-\overline{x}|}{N}$$

ఉదాహరణ 14 : దిగువ శ్రేణి నుండి అంకమధ్యపరంగా మాధ్యమ విచలనము, దాని గుణకము గణన చేయుము.

తరగతులు	5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
పౌనఃపున్యము	4	6	10	6	4

జవాబు :

తరగతులు CI	పౌనఃపున్యము f	మధ్య విలువ x	fx	$\lvert x-\overline{x}\rvert$	$f\lvert x-\overline{x}\rvert$
5 - 15	4	10	40	20	80
15 - 25	6	20	120	10	60
25 - 35	10	30	300	0	0
35 - 45	6	40	240	10	60
45 - 55	4	50	200	20	80
	N = 30		$\Sigma fx = 900$		$\Sigma f\lvert x-\overline{x}\rvert = 280$

అంకమధ్యమము $(\overline{x}) = \frac{\Sigma fx}{N}$

$$\overline{x} = \frac{900}{30} = 30$$

అంకమధ్యమం నుంచి మాధ్యమ విచలనము $(\delta\overline{x}) = \frac{\Sigma f|x-\overline{x}|}{N}$

$$= \frac{280}{30} = 9.3$$

మాధ్యమ విచలన గుణకము $(\text{Coef. } \delta_{\overline{x}}) = \frac{\delta_{\overline{x}}}{\overline{x}}$

$$\text{Coef.}\delta_{\overline{x}} = \frac{9.3}{30} = 0.31$$

మాధ్య విచలనము - దగ్గర పద్ధతి : అంకమధ్యమము, మధ్యగత విలువలు భిన్నాలలో ఉన్నపుడు మాధ్యమ విచలన గణన క్లిష్టంగా వుండును. అందువల్ల ఇలాంటి సందర్భాల్లో దగ్గర పద్ధతి వినియోగించడం జరుగుతుంది. దగ్గర పద్ధతి కన్నా ప్రత్యక్ష పద్ధతి సులువుగా వుంటుంది. దగ్గరి పద్ధతి ద్వారా గణన సౌలభ్యం కాదు. అందువల్ల ఈ పద్ధతి అంత ఆచరణ సాధ్యం కాదు. అయినను ఉదాహరణగా మాధ్యమిక విచలనాన్ని మధ్యగతం నుంచి చూపటం జరిగింది.

మధ్యమికం నుంచి మాధ్యమ విచలనము - వ్యక్తిగత శ్రేణులు :

గణన విధానము :

1. మొదట శ్రేణి మధ్యగతాన్ని కనుగొనవలె. 2. మధ్య గణంకంటే ఎక్కువగా వున్న అంశాలను సంకలనం చేసి ΣU తో సూచించవలె. 3. మధ్యగతం కంటే తక్కువగా వున్న అంశాలను సంకలనం చేసి ΣL తో సూచించవలె. తరువాత క్రింది సమీకరణం ద్వారా మాధ్యమిక విచలనాన్ని కనుగొనవలె. 4. మధ్యగతం నుండి మాధ్యమ విచలనం $(\delta_M) = \frac{\Sigma U - \Sigma L}{N}$

ఉదాహరణ 15 : 11 మంది శ్రామికుల వేతనాలు క్రింది విధంగా వున్నాయి. వేతనాల మాధ్యమ విచలనాన్ని గణన చేయండి. వేతనాలు (రూ॥లలో) 5, 8, 6, 10, 7, 13, 14, 9, 15, 12, 11

వరుస క్రమం	అంశాలు ఆరోహణక్రమము.
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9
6	10 - మధ్యగతము
7	11
8	12
9	13
10	14
11	15

మధ్యగతం $(M) = \frac{N+1}{2}$ వ అంశము

$$M = \frac{11+1}{2} = \frac{12}{6} = 6 \text{ వ అంశము}$$

6వ అంశము 10 కావున మధ్యగతము = 10

$$\delta_M = \frac{\Sigma U - \Sigma L}{N}$$

$$\Sigma U = 65, \ \Sigma L = 35, \ N = 11$$

$$\delta_M = \frac{\Sigma U - \Sigma L}{N} = \frac{65-35}{11} = \frac{30}{11} = 2.72$$

మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమ విచలనము : దగ్గర పద్ధతి - విచ్ఛిన్న శ్రేణులు :

మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమిక విచలనాన్ని విచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో గణన చేయటానికి కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

$$\delta_M = \frac{\Sigma f\ dx + (\text{మధ్యగతం - ఊహించిన మధ్యగతం})(\Sigma fB - \Sigma fA)}{N}$$

δ_M = మధ్యగతం నుండి మాధ్యమిక విచలనం, N = పౌనఃపున్యం మొత్తం, $dx = x -$ ఊహించిన మధ్యగతం, $\Sigma f\,|dx|$ = ఊహించిన మధ్యగతం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం. ΣfB = మధ్యగతం కంటే తక్కువ వున్న అంశాల(పౌనఃపున్యం) మొత్తం, ΣfB = మధ్యగతం కంటే ఎక్కువ వున్న (పౌనఃపున్యం) అంశాల మొత్తం.

ఉదాహరణ : దిగువ అంశాలతో దగ్గర పద్ధతిలో మాధ్యమ విచలనాన్ని గణన చేయండి.

అంశాలు :	4	6	8	10	12	14	16
పౌనఃపున్యాలు :	2	4	5	3	2	1	4

జవాబు : విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాధ్యమ విచలన గణన చేయుటకు విచలనాలను వాటి పౌనఃపున్యాలతో గుణించి వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము తీసుకొనవలె.

అంశము x	పౌనఃపున్యము f	సంచిత పౌనఃపున్యము(cf)	ఊహించిన మధ్యగతం(6) నుంచి విచలనాలు |x - Assumed Median| = |dx|	$f \times \|dx\|$
4	2	2	2	4
6	4	6	0	0
8	5	11	2	10
10	3	14	4	12
12	2	16	6	12
14	1	17	8	8
16	4	21	10	40
	N = 21			$\Sigma f\,\|dx\|$ = 86

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N+1}{2}$ అంశము, $N = 21$

మధ్యగతం $= \frac{21+1}{2} = \frac{22}{2} = 11$వ అంశము

11వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 11 లో వున్నది. దాని అనుబంధ అంశము 8 మధ్యగతము అవుతుంది.

$$\delta_M = \frac{\Sigma f\ dx + (\text{మధ్యగతం - ఊహించిన మధ్యగతం})(\Sigma fB - \Sigma fA)}{N}$$

ఊహించిన మధ్యగతం = 6

$\Sigma fB'$ = మధ్యగతం కన్నా తక్కువగా వున్న అంశాల పౌనఃపున్యం మొత్తం(11)

$\Sigma fA'$ = మధ్యగత విలువల కంటే ఎక్కువ విలువ గల అంశాల మొత్తం పౌనఃపున్యము(10)

$\Sigma f\,|dx|$ = మధ్యగతం నుండి తీసుకున్న విచలనాలను వాటి అనురూప పౌనఃపున్యముతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము (86)

(విచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మధ్యగతం భిన్నంలో (Fraction) కాకుండా పూర్ణాంకముగా (Round number) ఉంటే వలన మాధ్యమ విచలనాన్ని దగ్గర పద్ధతిలో గణన చేయవలసిన అవసరం లేదు. అంకమధ్యమము నుండి మాధ్యమ విచలన గణన కూడా దగ్గర పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును).

ఊహించిన మధ్యగతం = **6**, $\Sigma fB = 11,\ \Sigma fA = 10$

$$\delta_M = \frac{[86+(8-6)(11-10)]}{21}$$

$$= \frac{1}{21}[86+(2\times1)],\ = \frac{1}{21}[86+2],\ = \frac{1}{21}\times 88 = 4.2$$

$$\therefore \delta_M = 4.2$$

మాధ్యమ విచలనము - అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - దగ్గర పద్ధతి : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో మాధ్యమ విచలన గణనకు ఇవ్వబడిన శ్రేణికి సంచిత పౌనఃపున్యము కనుగొని, మధ్యగత స్థానము గుర్తించి, మధ్యగత తరగతి ఆధారంగా మధ్యగతాన్ని కనుగొనవలె. మధ్యగతం నుండి విచలనాలను కనుగొని $x - \text{Median} = |dx|$ అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి లబ్దాల సంకలనము $(\Sigma f\,|dx|)$ కనుగొనవలె.

మధ్యగతం కంటే ఎక్కువగానున్న అంశాల పౌనఃపున్యాలు మొత్తం = ΣfA

మధ్యగతం కంటే తక్కువగా వున్న అంశాల పౌనఃపున్యాలు మొత్తం = ΣfB కనుగొని సూత్రం ద్వారా మధ్యగతాన్ని గణన చేయవలెను.

$$\delta_M = \frac{\left[\Sigma' f\,|dx| + (Md - a)(\Sigma fB - \Sigma fA)\right]}{N}$$

ఉదాహరణ 17 : ఒక గ్రామంలో వివాహితులైన పురుషుల వయస్సులు క్రింది దత్తాంశంలో యివ్వడమైనది. వాటి నుంచి మాధ్యమ విచలనాన్ని దగ్గరి పద్ధతిలో కనుక్కోండి.

వయస్సు (సం॥లలో)	పురుషుల సంఖ్య
15 - 24	33
25 - 34	264
35 - 44	303
45 - 54	214
55 - 64	128
65 - 74	58

జవాబు : ఈ విచ్ఛిన్న శ్రేణులలోని తరగతులకు మధ్యవిలువలు తీసుకొంటే అవి విచ్ఛిన్న శ్రేణుల రూపము పొందుతాయి. విచ్ఛిన్న శ్రేణిలో కనుగొనిన విధంగానే మధ్యమ విచలన గణన చేయవచ్చు.

వయస్సు (CI)	పురుషుల (f)	మధ్య విలువ (MV) x	సంచిత పౌనఃపున్యము cf	ఊహించిన మధ్యగతం(39.5) నుంచి విచలనాలు ఊహించిన మధ్యగతం |x-Assumed Median|=|dx|	విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణిస్తే లబ్దాలు f |dx|
14.5 - 24.5	33	19.5	33	20	660
24.5 - 34.5	264	29.5	297	10	2640
34.5 - 44.5	303	39.5	600	0	0
44.5 - 54.5	214	49.5	814	10	2140
54.5 - 64.5	128	59.5	942	20	2560
64.5 - 74.5	58	69.5	1000	30	1740
	N = 1000				Σf |dx| = 9740

మధ్యగత స్థానము = $\frac{N}{2}$ అంశము

$$= \frac{1000}{2} = 500 \text{ వ అంశము}$$

500వ అంశము సంచిత పౌనఃపున్యము 600లో వున్నది. దాని అనుబంధ తరగతి 34.5 - 44.5 మధ్యగత తరగతి

$$\text{మధ్యగతం } (M) = \ell_1 + \frac{\frac{N}{2} - m}{f}(\ell_2 - \ell_1)$$

$$\ell_1 = 34.5,\ \ell_2 = 44.5,\ f = 303,\ \frac{N}{2} = 500,\ m = 297$$

$$\text{Median } = 34.5 + \frac{500 - 297}{303}(44.5 - 34.5)$$

$$= 34.5 + 6.7 = 41.2$$

$$\text{మధ్యగతం నుంచి మాధ్యమ విచలనము } (\delta_M) = \frac{\Sigma f\ dx + (\text{మధ్యగతం - ఊహించిన మధ్యగతం})(\Sigma fB - \Sigma fA)}{N}$$

$N = 1000,\ \Sigma f\,|dx| = 9740,$ మధ్యగతం $(M) = 41.2$, ఊహించిన అంకమధ్యమం = 39.5

$\Sigma fB = 600 \qquad \Sigma fA = 400$

$$\delta_M = \frac{\left[9740 + (41.2 - 39.5)(600 - 400)\right]}{1000}$$

$$\delta_M = \frac{1}{1000}\left[9740 + (1.7)(200)\right] = \frac{1}{1000}\left[9740 + 340\right] = \frac{1}{1000} \times 10080 = 10.08$$

ఇదే విధంగా అంకమధ్యమం, బాహుళకాల నుంచి కూడా మాధ్యమిక విచలనాన్ని పరోక్ష పద్ధతిలో కనుగొనవచ్చు.

8.3.3.2 మాధ్యమిక విచలనము - సుగుణాలు : మాధ్యమిక విచలనము కింది సుగుణాలను కలిగి వుంది. అవి :

1. మాధ్యమ విచలనము నిర్దిష్టంగా నిర్వచింపబడిన విస్తరణ మానం. ప్రామాణిక విచలనంతో పోల్చితే సులభంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును. గణన కూడా సులభము.
2. శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడియున్నందున చతుర్థాంశ విచలనము, వ్యాప్తికన్నా మెరుగైన విస్తరణమానంగా గుర్తింపవచ్చు.
3. ఇది ఒక సగటు ఆధారంగా విచలనాలను గైకొని సగటు చేయడం వలన శ్రేణిలో గల అవకతవకలను తొలగించును. ఆ విధంగా మాధ్యమ విచలనము వాస్తవమైన, నిజమైన విస్తరణమానంగా తోడ్పడును.
4. ప్రామాణిక విచలనముతో పోల్చినపుడు మాధ్యమ విచలనము విపరీతాంశాలకు ఎక్కువగా ప్రభావితం కాదు.
5. మాధ్యమ విచలనము సగటుల ఆధారంగా గణన చేయడం వలన వివిధ శ్రేణుల నిర్మాణాన్ని సరిపోల్చుటకు తోడ్పడును.

8.3.3.3 లోపాలు

1. మాధ్యమ విచలన గణనలో బీజీయ చిహ్నాలను అలక్ష్యము చేయడం దీనిలో చాలా పెద్ద లోపము.
2. ఈ పద్ధతి ఎల్లప్పుడు నిజమైన ఫలితాలను యివ్వలేకపోవచ్చు. మధ్యగత గణనలో మధ్యగతం, అంకమధ్యమం, బాహుళకం కూడా వినియోగించవచ్చు. కాని శ్రేణులలోని విచరణము చాలా ఎక్కువగా నున్నపుడు మధ్యగతాన్ని పూర్తిగా విశ్వసింపలేము.
3. బీజీయ ప్రస్తావనకు సరిపోదు.
4. సామాజిక అధ్యయనాలకు అంతగా వినియోగింపబడడం లేదు.
5. వివృతాంత తరగతులు గల శ్రేణులకు మాధ్యమ విచలన గణన సాధ్యపడదు.
6. ప్రతిచయన పరిమాణం పెరిగే కొలది ప్రతిచయన మార్పు కంటే మధ్యమ విచలనంలో మార్పు అత్యధికంగా వుండును.

వివిధ లోపాలు ఉన్ననూ తక్కువ ప్రతిచయనాలను తీసుకున్నప్పుడు దీని ప్రాముఖ్యత ఎక్కువ. వ్యాపార చక్రాలను అంచనా వేయటంలో మాధ్యమిక విచలనం ఆచరణ యోగ్యమైన విస్తరణమానమని National Bureau of Economic Research వారు పేర్కొన్నారు.

8.3.4 ప్రామాణిక విచలనము లేదా క్రమవిచలనము (Standard Deviation) : విస్తరణను అధ్యయనం చేయడంలో అతి ముఖ్యమైనది, అత్యధికంగా ఉపయోగించేది, అత్యంత సంతృప్తికరమైన కొలమానం ప్రామాణిక విచలనము. ప్రామాణిక విచలనము అనే భావనను కార్ల్‌పియర్సన్ ప్రవేశపెట్టాడు. విస్తరణను కొలిచే మానాలలో వ్యాప్తి, చతుర్థాంశ మానాలు శ్రేణులలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడి గణన చేసిన మానాలు కావు. అన్ని అంశాలకు ప్రాధాన్యత యిచ్చి విస్తరణను గణన చేసే మాధ్యమ విచలనము బీజీయ చిహ్నాలను విస్మరించడం వల్ల అది గణిత శాస్త్ర విరుద్ధము. ఇటువంటి లోపాలను సరిదిద్ది గణన చేసిన మానమే ప్రామాణిక విచలనము. ఇతర విస్తరణ కొలతలు తరచు గురియయ్యే దోషాలను, పరిమితులను యిది అధిగమిస్తుంది. కాబట్టి దీనిని విశిష్టమైన విస్తరణమానంగా పేర్కొంటారు.

గణాంకశాస్త్రంలో విచరణను గణన చేయడం అతి ముఖ్యమైనది. ఆ విచరణను కొలిచే విచరణ మానాలలో ప్రామాణిక

విచలనం చాలా ప్రముఖమైనది. అందువల్లనే ప్రామాణిక విచలనాన్ని ప్రాముఖ్యమైన గణాంక భావనలలో ఒకటిగా పరిగణిస్తారు. "అంకమధ్యమము నుండి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమానికి వర్గమూలాన్ని ప్రామాణిక విచలనం"గా గణాంకశాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించిరి ("Standard deviation is the square-root of the arthmetic mean of the squared deviations from the mean") ప్రామాణిక విచలనం పరమ మానము.

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో ప్రామాణిక విచలన గణన (అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలు).

ప్రామాణిక విచలన గణనకు, శ్రేణిలోని ప్రతిచలనానికి అంకమధ్యమానికి గల తేడా ఇంకా విచలనము కనుగొనవలె $(x-\bar{x})$. ఈ విచలనాలకు వర్గాలు కనుగొనవలె $(x-\bar{x})^2$. విచలనాలు వర్గం చేయడం వల్ల ఋణాత్మక చిహ్నాలు కూడా ధనాత్మకంగా మారిపోతాయి. (ఈ విధంగా చేయడం వల్ల మాధ్యమ విచలన గణనలోని బీజీయ చిహ్నాలను విస్మరించడం అనే లోపాన్ని సులభంగా అధిగమించవచ్చు). ఇప్పుడు తీసుకున్న విచలనాల వర్గాలకు $(x-\bar{x})^2$ అంకమధ్యమం కనుక్కొని, దానికి వర్గమూలం కనుక్కొంటే ఆ వచ్చిన ఫలితం ప్రామాణిక విచలనం వస్తుంది. దీనిని σ (సిగ్మా) అనే గ్రీకు అక్షరంతో సూచిస్తారు.

సాంకేతికంగా ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma)=\sqrt{\frac{\Sigma(x-x)^2}{N}}$ or $\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$.

σ = ప్రామాణిక విచలనం

$\Sigma d^2 = \Sigma(x-\bar{x})^2 =$ అంకమధ్యమం నుండి తీసుకొన్న విచలనాల వర్గాల సంకలనము

$N =$ అంశాల సంఖ్య

విధానము : ఇవ్వబడిన శ్రేణికి మొదట అంకమధ్యమాన్ని గణన చేయవలె. $\bar{x}=\frac{\Sigma x}{N}$ శ్రేణిలోని ప్రతి అంశానికి, అంకమధ్యమానికి గల తేడా, విచలనాలు $(x-\bar{x})$ కనుగొనవలె. దీనినే d గా సూచిస్తారు. విచలనాలకు వర్గాలు కనుగొనవలె $(x-\bar{x})^2$ or d^2. విచలనాల వర్గాల సంకలనం $\Sigma(x-\bar{x})^2$ కనుగొనవలె. $N =$ అంశాల సంఖ్య. తరువాత క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగించాలి.

$$\text{ప్రామాణిక విచలనము } (\sigma)=\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{N}}$$

ఉదాహరణ 18 : ఒక కాలనీలోని యింటి అద్దెల పట్టీ కింద యివ్వడమైంది. వాని నుండి ప్రామాణిక విచలనము కనుక్కోండి.

అద్దెలు రూ. : **30, 54, 42, 69, 58, 37, 48, 53, 60, 49**

జవాబు :

అద్దెలు(x) రూ॥లలో	అంకమధ్యమం ($\bar{x}=50$) విచలనాలు $d=x-\bar{x}$ or 50	విచలనాల వర్గాలు d^2
30	**- 20**	**400**
54	**+ 4**	**16**
42	**- 8**	**64**

69	+ 19	361
58	+ 8	64
37	- 13	169
48	-2	4
53	+ 3	9
60	+ 10	100
49	- 1	1
$\Sigma x = 500$		$\Sigma(x-\overline{x})^2$ or $\Sigma d^2 = 1188$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{500}{10} = 50 \text{ రూ॥లు}$$

$$\text{ప్రామాణిక విచలనం } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}} \text{ or } \sqrt{\frac{\Sigma(x-\overline{x})^2}{N}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1188}{10}} = \sqrt{118.8} = \text{రూ. } 10.90\text{లు.}$$

వ్యక్తిగత శ్రేణులు - దగ్గర పద్ధతి ఊహించిన అంకమధ్యమం విచలనాల పద్ధతి : ఒక్కొక్కప్పుడు అంకమధ్యమపు విలువ భిన్నంలో వస్తుంది. అప్పుడు ప్రతి అంశము నుండి విచలనాలు కనుగొనడం, వాటికి వర్గాలు కట్టడం కష్టమగును. అందువలన ఊహించిన అంకమధ్యమం నుండి విచలనాలు తీసుకునే దగ్గరి పద్ధతి ఉపయోగిస్తారు. ఈ పద్ధతిలో కింది సూత్రం ద్వారా ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కుంటాము.

$$\text{ప్రామాణిక విచలన సూత్రము } (\sigma) = \sqrt{\frac{dx}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$$

$\sigma =$ ప్రామాణిక విచలనము

$\Sigma dx^2 =$ చలనాలకు ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా లేదా విచలనాల వర్గాల సంకలనము

$\Sigma dx =$ చలనాలకు, ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా లేదా విచలనాల సంకలనము.

$dx = x - A$, $A =$ ఊహించిన అంకమధ్యమము, $N =$ అంశాల సంఖ్య

విచలనాలకు సాధారణ కారణాంకము వున్నప్పుడు సోపానాలు గుర్తించి సులభ పద్ధతిలో గణన చేయవచ్చు.

ఉదాహరణ 19 : ఈ క్రింది దత్తాంశములో పది మంది విద్యార్థులకు గణాంక శాస్త్రంలో వచ్చిన మార్కులు యివ్వడమైనది. వాటి నుంచి అంకమధ్యమాన్ని, ప్రామాణిక విచలనాన్ని దగ్గర పద్ధతిలో కనుగొనండి.

మార్కులు : **62, 85, 73, 81, 74, 58, 66, 72, 54, 84**

జవాబు :

క్రమసంఖ్య	మార్కులు	$dx = x - A$ ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి **(58)** విచలనాలు $(x-58)$	విచలనాల వర్గాలు dx^2
1	62	4	16
2	85	27	729
3	73	15	225
4	81	23	529
5	74	16	256
6	58	0	0
7	66	8	64
8	72	14	196
9	54	-4	16
10	84	26	676
$N=10$		$\Sigma dx \begin{cases} +133 \\ -\ \ 24 = 109 \end{cases}$	$\Sigma dx^2 = 2707$

అంకమధ్యమము $(\bar{x})$ **=** $A + \dfrac{\Sigma dx}{N}$

$A = 58,\ \Sigma dx = 129,\ N = 10$

$\bar{x} = 58 + \dfrac{129}{10}$

$\bar{x} = 58 + 12.9 = 70.9$

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\dfrac{\Sigma dx}{N}\right)^2}$

$\Sigma d^2x = 2707 \qquad \Sigma dx = 109 \qquad N = 10$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2707}{10} - \left(\frac{109}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{270.7 - (10.9)^2}$$

$$= \sqrt{270.7 - 118.8}$$

$$= \sqrt{151.9}$$

$$\sigma = 12.32$$

విచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనం - ప్రత్యక్ష పద్ధతి :

విధానము : ఇవ్వబడిన శ్రేణికి అంకమధ్యమాన్ని మొదట కనుగొనవలె $\left(\bar{x}=\frac{\Sigma fx}{N}\right)$. శ్రేణిలోని చలనాలకు అంకమధ్యమానికి గల తేడా $(x-\bar{x})$ను కనుగొని d గా గుర్తిస్తాము. విచలనాలను వర్గాలు చేసి d^2 లేదా $(x-\bar{x})^2$లను కనుగొనాలి. తరువాత వాటి అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $f\times(x-\bar{x})^2$ లేదా $f\,d^2$ ఆ గుణలబ్దాల సంకలనము $\Sigma f\,(x-\bar{x})^2$ or Σfd^2 కనుగొనుము. $N=$ పౌనఃపున్యాల మొత్తము.

$$\text{ప్రామాణిక విచలనము } (\sigma)=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

ఉదాహరణ 20 : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశము నుండి, అంకమధ్యమము, ప్రామాణిక విచలనము కనుగొనండి.

చలనాలు	6	7	8	9	10	11	12
పౌనఃపున్యము	3	6	9	13	8	5	4

జవాబు :

చలనాలు x	పౌనఃపున్యము f	లబ్దము $f\times x$	$\bar{x}=9$ అంకమధ్యమం నుండి విచలనాలు $d=(x-\bar{x})$ or $(x-9)$	విచలనాల వర్గాలు (d^2)	లబ్దాలు $f\times d^2$
6	3	18	- 3	9	27
7	6	42	- 2	4	24
8	9	72	- 1	1	9
9	13	117	0	0	0
10	8	80	1	1	8
11	5	55	2	4	20
12	4	48	3	9	36
	N = **48**	$\Sigma fx=$ **432**		**28**	$\Sigma fd^2=$ **124**

$$\bar{x}=\frac{\Sigma fx}{N}=\frac{432}{48}=9$$

$$\text{ప్రామాణిక విచలనము } (\sigma)=\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

$\Sigma fd^2=124$, $N=48$

$$\sigma=\sqrt{\frac{124}{48}}=\sqrt{2.5833}=1.606$$

$\sigma=$ **1.61**

fd^2 కనుగొనుటకు d^2 ప్రత్యేకంగా కనుగొన అవసరం లేదు. $f\,(d)$ ని d తో గుణించడం ద్వారా కూడా కనుగొనవచ్చు.

విచ్ఛిన్న శ్రేణి - ప్రామాణిక విచలనము - దగ్గర పద్ధతి - విచలనాల పద్ధతి :

విధానము : అంకమధ్యమము భిన్నంలో వస్తే దగ్గర పద్ధతిని ఉపయోగిస్తారు. శ్రేణిలోని ఒక విలువను ఊహించిన అంకమధ్యమంగా గ్రహించవలె. ప్రతిచలనానికి ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా విచలనాలు కనుక్కోవాలి $dx = x - A$. విచలనాలను (dx) అనురూప పౌనఃపున్యాలతో(f) గుణించి, లబ్దాల సంకలనము $\Sigma f(dx)$ కనుక్కోవాలి. తరువాత విచలనాలను వర్గాలు dx^2 కనుక్కొని అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి సంకలనము చేస్తే Σfdx^2 వస్తుంది.

విచలనాలను వర్గాలు dx^2 కనుక్కొని అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $f \times d^2x$ సంకలనము చేస్తే Σfdx^2 వస్తుంది.

$N =$ పౌనఃపున్యాల మొత్తం విలువలను క్రింది సూత్రంలో ప్రతిక్షేపించి ప్రామాణిక విచలనం కనుక్కోవాలి.

$$\text{ప్రామాణిక విచలనం } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma f\left(dx^2\right)}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

ఉదాహరణ 21 : దిగువ యివ్వబడిన శ్రేణి నుంచి ప్రామాణిక విచలనము కనుక్కోండి.

వేతనాలు (రూ॥లలో)	6	10	12	15	18	20
పని వారు	2	4	3	4	2	5

జవాబు :

వేతనాలు(రూ॥లలో) (x)	పనివారు (f)	A = 12 ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలు dx = x − 12	dx^2	fdx	fdx^2
6	2	- 6	36	- 12	72
10	4	- 2	4	- 8	16
12	3	0	0	0	0
15	4	3	9	12	36
18	2	6	36	12	72
20	5	8	64	40	320
	N = 20			$\Sigma fdx \left.\begin{matrix}+64\\-20\end{matrix}\right\} 44$	$\Sigma fdx^2 = 516$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f(dx)}{N}\right)^2}$$

$\Sigma fdx^2 = 516$, $\Sigma fdx = 44$, $N = 20$,

$$\sigma = \sqrt{\frac{516}{20} - \left(\frac{44}{20}\right)^2} = \sqrt{25.8 - 2.2} = \sqrt{23.6} = 4.86$$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనము - ప్రత్యక్ష పద్ధతి (అంకమధ్యమం ద్వారా) : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలోని తరగతులకు మధ్య విలువలు x గా తీసుకుని ప్రామాణిక విచలనం గణన చేస్తారు. అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులకు ప్రామాణిక విచలనాన్ని ప్రత్యక్ష పద్ధతి, దగ్గర పద్ధతి(విచలన పద్ధతి), సోపాన విచలన పద్ధతిలో కూడా గణన చేయవచ్చు. సోపాన విచలన పద్ధతిని ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తారు. ప్రత్యక్ష పద్ధతి ద్వారా ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొనుటకు క్రింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

$\sigma =$ ప్రామాణిక విచలనం, $N =$ పౌనఃపున్యం మొత్తం, $\Sigma fd^2 =$ అంకమధ్యమము నుంచి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాలను అనుబంధ పౌనఃపున్యాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం లేదా $\Sigma f(x-\bar{x})^2$, x = మధ్య విలువలు.

ఉదాహరణ 22 : ఒక ఫ్యాక్టరీలో వివిధ పనులు చేయుచున్న కార్మికులకు గంటకు చెల్లింపబడే వేతనాలు క్రింది పట్టీలో యివ్వబడినవి. వేతనాల ప్రామాణిక విచలనం గణన చేయండి.

గం. వేతనాలు (రూ॥లలో)	0 - 2	2 - 4	4 - 6	6 - 8	8 - 10
కార్మికులు	2	3	5	3	2

జవాబు :

వేతనాలు రూ॥లలో	కార్మికులు (f)	మధ్య విలువ (x)	fx	$x-\bar{x}=d$	d^2	fd^2
0 - 2	2	1	2	- 4	16	32
2 - 4	3	3	9	- 2	4	12
4 - 6	5	5	25	0	0	0
6 - 8	3	7	21	2	4	12
8 - 10	2	9	18	4	16	32
	$N=15$		$\Sigma fx=75$			$\Sigma fd^2=88$

అంకమధ్యమము $(\bar{x}) = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{75}{15} = 5$

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}} = \sqrt{\frac{88}{15}} = \sqrt{5.867} = 2.422$

వేతనాల ప్రామాణిక విచలనము (σ) = రూ. 2.42 పైసలు.

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు - ప్రామాణిక విచలనము - దగ్గర పద్ధతి ఊహించిన అంకమధ్యమం ద్వారా విచలనాల పద్ధతి : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల తరగతులకు మధ్య విలువలు x అవుతాయి. మధ్య విలువలలో ఒక విలువను ఊహించిన అంకమధ్యమంగా (A) తీసుకొని కింది సూత్రం ద్వారా ప్రామాణిక విచలనం గణన చేయటం జరుగుతుంది.

ప్రామాణిక విచలనము $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$

$\Sigma fdx =$ ఊహించిన అంకమధ్యమం నుండి తీసుకొన్న విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల సంకలనము.

$\Sigma fdx^2 =$ ఊహించిన అంకమం నుండి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాలను వాటి అనురూప పౌనఃపున్యముతో గుణిస్తే వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తము.

$N =$ మొత్తం పౌనఃపున్యము

ఉదాహరణ 23 : దిగువ దత్తాంశములో 30 మంది విద్యార్థులకు ఒక పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు యివ్వబడినవి. మార్కుల ప్రామాణిక విచలనను గణన చేయండి.

మార్కులు	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
విద్యార్థులు	15	5	2	4	8	6	7	3

జవాబు :

మార్కులు	విద్యార్థులు (f)	మధ్య విలువ (x)	$A = 55$ $x - A = dx$	dx^2	fdx	fdx^2
10 - 20	1	15	- 40	1600	-40	1600
20 - 30	3	25	- 30	900	- 90	2700
30 - 40	2	35	- 20	400	- 40	800
40 - 50	4	45	- 10	100	- 40	400
50 - 60	2	55	0	0	0	0
60 - 70	6	65	10	100	60	600
70 - 80	7	75	20	400	140	2800
80 - 90	5	85	30	900	150	6500
	$N = 30$				$\Sigma fdx \left.\begin{matrix}+350\\-210\end{matrix}\right\}140$	$\Sigma fd^2x =$ 15400

$$\text{ప్రామాణిక విచలనము } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2}$$

$$\Sigma fd^2x = 15400, \ \Sigma fdx = 140, \ N = 30$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{15400}{30} - \left(\frac{140}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{513.3 - (4.6)^2}$$

$$= \sqrt{513.3 - 21.7}$$

$$\sigma = \sqrt{491.6} = 22.17$$

ప్రామాణిక విచలనము - సోపాన విచలన పద్ధతి : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలో తరగతుల అంతరాలు సమానంగా వున్నప్పుడు సామాన్య కారకాన్ని ఉపయోగించి విచలనాలకు బదులు సోపాన విచలనాలు తీసుకొని ప్రామాణిక విచలన గణన చేయవచ్చు. ఈ పద్ధతి వల్ల σను మరింత సులువుగా గణించవచ్చు.

విధానము : అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులలోని తరగతులకు మధ్య విలువలు x కనుగొనాలి. మధ్య విలువలో ఒక విలువను (అంకమధ్యమానికి దగ్గరగా నుండు విలువ) ఊహించిన అంకమధ్యమంగా తీసుకొనవలె. మధ్యవిలువలకు, ఊహించిన అంకమధ్యమానికి గల తేడా $(x - A = dx)$ విచలనాలు కనుగొనవలె. అన్ని విచలనాలను నిశ్శేషంగా భాగించగల సామాన్య కారణాంకంతో భాగించి $\left(\frac{dx}{C} = Dx\right)$

సోపాన విచలనాలు కనుగొనవలె. సోపాన విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణించి $(f \times Dx)$ గుణ లబ్దాల సంకలనము ΣfDx కనుగొనవలె. fDx లను Dx తో గుణించి సంకలనము ΣfDx^2 కనుగొనవలెను. N = పౌనఃపున్యాల మొత్తము,

$$\text{ప్రామాణిక విచలనము} = (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fD^2x}{N} - \left(\frac{\Sigma fDx}{N}\right)^2} \times C$$

C = సాధారణ కారణాంకము

ΣfDx = సోపాన విచలనాలను అనురూప పౌనఃపున్యాలతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్దాల సంకలనము

ΣfDx^2 = సోపాన విచలనాల వర్గాలను అనురూప పౌనఃపున్యంతో గుణిస్తే వచ్చే లబ్దాల సంకలనము

ఉదాహరణ 24 : దిగువ దత్తాంశములో 30 మంది విద్యార్థులకు ఒక పరీక్షలో వచ్చిన మార్కులు యివ్వబడినవి. వాటి నుంచి మార్కుల ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
విద్యార్థులు	2	4	6	3	5	3	2	5

జవాబు :

మార్కులు రూ॥లలో	విద్యార్థులు (f)	మధ్యవిలువ (x)	A = 55 ఊహించిన అంకమధ్యమాల నుంచి తీసుకున్న విచలనాలు dx = x − 55	$\frac{dx}{C} = Dx$ (C = 10)	Dx^2	fDx	fD^2x
10 - 20	2	15	- 40	- 4	16	- 8	32
20 - 30	4	25	- 30	- 3	9	- 12	36
30 - 40	2	35	- 20	- 2	4	- 4	8
40 - 50	3	45	- 10	- 1	1	- 3	3
50 - 60	5	55	0	0	0	0	0
60 - 70	3	65	10	1	1	3	3
70 - 80	6	75	20	2	4	12	24
80 - 90	5	85	30	3	9	15	45
	N = 30					$\left.\begin{matrix}+30\\-27\end{matrix}\right\}3$	151
						ΣfDx	ΣfDx^2

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fDx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fDx}{N}\right)^2} \times C$$

$C = 10 \quad \Sigma fDx^2 = 151 \quad \Sigma fDx = 3 \quad N = 30$

$$\sigma = \sqrt{\frac{151}{30} - \left(\frac{3}{30}\right)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{5.03 - (0.1)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{5.03 - 0.31} \times 10$$

$$= \sqrt{4.72} \times 10$$

$$\sigma = 2.17 \times 10 = 21.7$$

8.3.4.1 ప్రామాణిక విచలన గుణకము : ప్రామాణిక విచలనము పరమ విస్తరణమానము. అందువలన రెండు లేక ఎక్కువ దత్తాంశాలను పోల్చుటకు ఇది ఉపయోగపడదు. అందువలన దత్తాంశాలను సరిపోల్చుటకు సాపేక్షికమానాన్ని గణన చేయవలసి యున్నది. ప్రామాణిక విచలనం యొక్క సాపేక్షిక మానాన్ని ప్రామాణిక విచలన గుణకం (coef σ) లేదా విచరణ గుణకం అంటారు. ప్రామాణిక విచలనాన్ని అంకమధ్యమంతో భాగిస్తే వచ్చిన ఫలితమే ప్రామాణిక విచలన గుణకమవుతుంది. సాంకేతికంగా ఇట్లా చూపవచ్చు.

$$\text{ప్రామాణిక విచలన గుణకము } (\text{coef} \cdot \sigma) = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

ఇది కొలత ప్రమాణాలతో సంబంధము లేని శుద్ధ సంఖ్య. దత్తాంశ పంపిణీలోని మార్పులు, సజాతీయత లేక ఏకత్వాలను రెండు లేక ఎక్కువ శ్రేణుల అధ్యయనానికి తోడ్పడును.

8.3.4.2 విచరణ గుణకం (coefficeint of Variation) : ప్రామాణిక విచలన గుణకం యొక్క శాత రూపమే విచరణ గుణకం. ప్రామాణిక విచలన గుణకాన్ని 100తో గుణించి (CV) విచరణ గుణకమును రాబట్టవచ్చును.

$$\text{విచరణ గుణకం } (\text{CV}) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

CV = విచరణ గుణకం, $\sigma =$ ప్రామాణిక విచలనం, $\bar{x} =$ అంకమధ్యమం

పోల్చడానికి ఉపయోగించే విస్తరణ మానాలలో ఇది ముఖ్యమైనది. రెండు దత్తాంశాల పంపిణీలో మార్పు గుర్తించుటకు ఆ రెండింటికి విడివిడిగా విచరణ గుణకాలను గణన చేయవలె. తక్కువ విచరణ గుణకాన్ని (CV) కలిగియున్న విభాజనం స్థిరత్వం కలిగియున్నదని, ఎక్కువ విచరణ గుణకం కలిగి వున్న విభాజనం విచరణ ఎక్కువ లేదా స్థిరత్వం తక్కువ వున్నట్లు చెప్పవచ్చు. విద్యార్థుల ప్రతిభ, ఆదాయాలు, లాభాలు, ఎత్తులు మొదలగువానికి సంబంధించి రెండు లేక ఎక్కువ శ్రేణులు పోల్చుటకు విచరణ గుణకాన్ని ఉపయోగిస్తారు.

ఉదాహరణ 25 : దిగువ పట్టీలో ఒక కర్మాగారంలో పనిచేసే పనివారి వేతనాలు యివ్వబడినవి. ప్రామాణిక విచలనాన్ని, ప్రామాణిక విచలన గుణకాన్ని గణన చేయండి.

వేతనాలు(రూ॥లలో)	4-6	6-8	8-10	10-12	12-14	14-16	16-18	18-20
పనివారు	4	3	2	1	4	3	2	1

జవాబు : $A = 13$

వేతనాలు (రూ॥లలో) CI	పనివారు f	మధ్య విలువ (x)	ఊహించిన అంకమధ్యమం నుండి విచలనాలు $x - A = dx$	fdx	fdx^2
4 - 6	7	5	- 8	- 56	448
6 - 8	8	9	- 6	- 48	288
8 - 10	5	9	- 4	- 20	80
10 - 12	16	11	- 2	- 32	64
12 - 14	17	13	0	0	0
14 - 16	12	15	2	24	48
16 - 18	21	17	5	105	525
18 - 20	14	19	6	84	504
	N = 100			$\Sigma fdx = \left.\begin{matrix}+213\\-156\end{matrix}\right\}57$	$\Sigma fdx^2 = 1957$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fdx}{N} \qquad A = 13,\ \Sigma fdx = 57,\ N = 100$$

$$= 13 + \frac{57}{100} = 13 + 0.57 = 13.57 \text{ రూ॥లు}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{1957}{100} - \left(\frac{57}{100}\right)^2} = \sqrt{19.57 - (0.57)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{19.25} = 4.4$$

ప్రామాణిక విచలన గుణకము (coef. σ) = $\dfrac{\sigma}{\bar{x}} = \dfrac{4.4}{13.57} = 0.32$

ఉదాహరణ 26 : దిగువ ఇద్దరు క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ పరుగుల వివరాలు యివ్వబడినవి. ఇందులో ఏ ఆటగాడు బాగా పరుగెత్తాడు. ఏ ఆటగాని పరుగులలో స్థిరత్వం వున్నది కనుగొనండి.

వరుస క్రమం	ఆటగాడు (x_A)	ఆటగాడు (x_B)
1	20	40
2	30	40
3	100	50
4	90	20
5	10	50
$N = 5$	$\Sigma x_A = 250$	$\Sigma x_B = 200$

A ఆటగాని సగటు పరుగులు $= \dfrac{\Sigma x_A}{N} = \dfrac{250}{5} = 50$ పరుగులు

B ఆటగాని సగటు పరుగులు $=\frac{\Sigma x_B}{N}=\frac{200}{5}=40$ పరుగులు

సగటు పరుగులు పరిశీలించిన 'A' ఆటగాడు బాగా పరుగెత్తాడని చెప్పవచ్చు. అయితే ఏ ఆటగాని పరుగులలో స్థిరత్వం ఉందో తెలుసుకొనుటకు విచరణగుణకం కనుగొనవలె.

వరుస క్రమం	x_A	x_B	$\bar{x}_A=50$ d_A $(x-\bar{x})$	d_A^2 $\bar{x}_A$	$\bar{x}_B=40$ $\frac{d_B}{(x-x_B)}$ $\bar{x}_B$	d_B^2
1	20	40	- 30	900	0	0
2	30	40	- 20	400	0	0
3	100	50	+ 50	2500	+ 10	100
4	90	20	+ 40	1600	- 20	400
5	10	50	- 40	1600	+ 10	100
$N=5$				$\Sigma d_A^2=7000$		$\Sigma d_B^2=600$

$$\bar{x}_A=\frac{\Sigma x_A}{N}=\frac{250}{5}=50$$

$$\bar{x}_B=\frac{\Sigma x_B}{N}=\frac{200}{5}=40$$

A ప్రామాణిక విచలనం $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d_A^2}{N_A}}=\sqrt{\frac{7000}{5}}=37.4$

B ప్రామాణిక విచలనం $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma d_B^2}{N_B}}=\sqrt{\frac{600}{5}}=10.95$

A విచరణ గుణకము $(CV_A)=\frac{\sigma_A}{\bar{x}_A}\times 100$

$$CV_A=\frac{37.4}{50}\times 100=74.8$$

B విచరణ గుణకము $(CV_B)=\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B}\times 100$

$$CV_B=\frac{10.95}{40}\times 100=27.36$$

A, B ఆటగాళ్ళ విచరణ గుణకాలు **74.8, 27.36.** ఈ విచరణ గుణకాలను పరిశీలిస్తే A బ్యాట్స్‌మెన్ పరుగులలో విచరణ ఎక్కువగానున్నది. అనగా స్థిరత్వం తక్కువ. కాబట్టి A, B లలో B ఆటగాని పరుగులలో స్థిరత్వం ఉన్నదని గుర్తించవచ్చు.

ఉదాహరణ 27 : దిగువ దత్తాంశములకు ప్రామాణిక విచలన గుణకాన్ని, విచరణ గుణకాన్ని (CV) కనుగొనండి.

దినసరి వేతనాలు	A కర్మాగారంలో పనివారు	B కర్మాగారంలో పనివారు
1	2	1
3	3	3
5	5	8
7	3	1
9	2	2

x	f_A	f_B	$f_A x$	$f_B x$	$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 5$ d_A or d_B $(x - \bar{x}_A)$	d_A^2 or d_B^2	$f_A d_A^2$	$f_B d_B^2$
1	2	1	2	1	- 4	16	32	16
3	3	3	9	9	- 2	4	12	12
5	5	8	25	40	0	0	0	0
7	3	1	21	7	+2	4	12	4
9	2	2	18	18	+4	16	32	32
	$N_A = 15$	$N_B = 15$	$\Sigma f_A x = 75$	$\Sigma f_B x = 75$			88	64

A కర్మాగారపు సగటు వేతనం = $(\bar{x}_A) = \frac{\Sigma f_A x}{N_A} = \frac{75}{15} = 5$ రూ॥

B కర్మాగారపు సగటు వేతనం = $(\bar{x}_B) = \frac{\Sigma f_B x}{N_B} = \frac{75}{15} = 5$ రూ॥

A కర్మాగారపు ప్రామాణిక విచలనం $\sigma_A = \sqrt{\frac{\Sigma f_A d_A^2}{N_A}} = \sqrt{\frac{88}{5}} = \sqrt{17.4}$

= రూ. 2.42

B కర్మాగారపు ప్రామాణిక విచలనం $\sigma_B = \sqrt{\frac{\Sigma f_B d_B{}^2}{N_B}}$

$= \sqrt{\frac{64}{5}} = \sqrt{12.8} =$ రూ. 2.06.

A ప్రామాణిక విచలన గుణకం $(\text{Coef. } \sigma_A) = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} = \frac{2.42}{5} = 0.484$

B ప్రామాణిక విచలన గుణకం $(\text{Coef. } \sigma_B)\frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} = \frac{2.06}{5} = 0.412$

A విచలన గుణకం $(CV_A) = \frac{\sigma_A}{\bar{x}_A} \times 100$

$$= \frac{2.42}{5} \times 100 = 48.4$$

B విచలన గుణకం $(CV_B) = \frac{\sigma_B}{\bar{x}_B} \times 100$

$$= \frac{2.06}{5} \times 100 = 41.2$$

$\therefore \bar{x}_A \ \& \ \bar{x}_B = 5, \ \sigma_A = 2.42, \ \sigma_B = 2.06, \ \text{Coef.}\sigma_A = 0.484, \ \text{Coef.}\sigma_B = 0.412, CV_A = 48.4, CV_B = 41.2$

అవిచ్ఛిన్న శ్రేణిలో విచరణ గుణకము :

ఉదాహరణ 28 : ఒక కళాశాలలోని మొదటి సం॥ బీ.ఏ., బి.కామ్ తరగతుల విద్యార్థుల అర్థశాస్త్రం, వాణిజ్యశాస్త్ర పరీక్షలలో వారు సాధించిన మార్కులు దిగువ దత్తాంశములో యివ్వబడినవి. ఎవరి మార్కులలో స్థిరత్వం ఎక్కువగానున్నది.

మార్కుల తరగతులు	బీ.ఏ. విద్యార్థులు	బి.కాం విద్యార్థులు
20 - 30	5	8
30 - 40	10	10
40 - 50	25	15
50 - 60	5	25
60 - 70	5	2

జవాబు : బీఏ విద్యార్థుల విభాజనాన్ని 1 గాను, బీకాం విభాజనాన్ని 2గాను భావించడం జరిగింది.

C.I.	f_1	f_2	MV(x)	$A = 45$, $Dx = \frac{x-A}{C}$, $C = 10$	f_1Dx	f_2Dx	f_1Dx^2	f_2Dx^2
20 - 30	5	8	25	- 2	- 10	- 16	20	32
30 - 40	10	10	35	- 1	- 10	- 10	10	10
40 - 50	25	15	45	0	0	0	0	0
50 - 60	5	25	55	+ 1	5	25	5	25
60 - 70	5	2	65	+ 2	10	4	20	8
	$N_1 = 50$	$N_2 = 60$			$\Sigma f_1Dx =$ - 5	$\Sigma f_2Dx =$ 3	$\Sigma f_1Dx^2 =$ 55	$\Sigma f_2Dx^2 =$ 75

బి.ఏ. విద్యార్థుల అంకమధ్యమము = $\bar{x}_1 = A + \frac{\Sigma f_1 Dx}{N_1} \times C$

$$= 45 + \frac{-5}{50} \times 10 = 45 - 1 = 44$$

ప్రామాణిక విచలనము $(\sigma_1) = \sqrt{\frac{\Sigma f_1 Dx^2}{N_1} - \left(\frac{\Sigma f_1 Dx}{N_1}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{55}{50} - \left(\frac{-5}{50}\right)^2} \times 10 \quad = \sqrt{1.1 - 0.01} \times 10 = 10.44$$

బి.ఏ. విద్యార్థుల మార్కుల విచరణ గుణకం $(CV_1) = \frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{10.44}{44} \times 100 = 23.73$

బి.కాం విద్యార్థుల మార్కుల అంకమధ్యమము $(\bar{x}_2) = A + \frac{\Sigma f_2 Dx}{N_2} \times C$

$$= 45 + \frac{3}{60} \times 10 = 45 + 0.5 = 45.5$$

ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma_2) = \sqrt{\frac{\Sigma f_2 Dx^2}{N_2} - \left(\frac{\Sigma f_2 Dx}{N}\right)^2} \times C$

$$= \sqrt{\frac{75}{60} - \left(\frac{3}{60}\right)^2} \times 10 \quad = \sqrt{1.25 - (0.05)^2} \times 10$$

$$= \sqrt{1.2475 \times 10} = 1.11 \times 10 = 11.1$$

బికాం విద్యార్థుల మార్కుల విచరణ గుణకము = $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{11.1}{45.5} \times 100 = 24.4$

బీఏ, బికాం విద్యార్థుల విచరణ గుణకాలు వరుసగా **27.73, 24.4.** బీకాం విద్యార్థుల విచరణ గుణకం తక్కువ కావున బీకాం స్థిరత్వం కలిగినదిగాను, బీఏ విచరణ ఎక్కువగా ఉన్నట్లు చూపుతాము.

8.3.4.3 ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనము (Combined Standard Deviation) : ఉమ్మడి అంకమధ్యమం లాగా రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ శ్రేణుల సమాచారం లభ్యమైతే ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయవచ్చును. **1, 2** అనే రెండు విభాజనములు ఉన్నాయనుకుందాం. N_1, $\bar{x}_1$, σ_1 లు మొదటి విభాజన అంశాలు, అంకమధ్యమం, ప్రామాణిక విచలనాలు. N_2, $\bar{x}_2$, σ_2 అనేవి రెండో విభాజన అంశాలు, అంకమధ్యమం, ప్రామాణిక విచలనాలు అయితే ఆ రెండింటి ప్రామాణిక విచలనం (σ_{12}) ను క్రింది సూత్రం ద్వారా కనుక్కోవచ్చు.

ఉమ్మడి అంకమధ్యమం $\left(\bar{x}_{1,2}\right) = \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$

$\bar{x}_1$ = మొదటి శ్రేణి అంకమధ్యమం, $\bar{x}_2$ = రెండవ శ్రేణి అంకమధ్యమం, N_1 = మొదటిశ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య, N_2 = రెండవశ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనము = $\left(\sigma_{1,2}\right) = \dfrac{\sqrt{N_1\sigma_1{}^2 + N_2\sigma_2{}^2 + N_1d_1^2 + N_2d_2^2}}{N_1 + N_2}$

σ_1 = మొదటి శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము, σ_2 = రెండో శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము, $d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_{12}$ మొదటిశ్రేణి అంకమధ్యమానికి ఉమ్మడి అంకమధ్యమానికి గల తేడా, $d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_{12}$ రెండోశ్రేణి అంకమధ్యమానికి, ఉమ్మడి అంకమధ్యమానికి గల తేడా, N_1 = మొదటిశ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య, N_2 = రెండోశ్రేణిలోని అంశాల సంఖ్య

రెండుకంటే ఎక్కువ శ్రేణులున్నపుడు పై సూత్రాన్ని పొడిగించి ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుగొనవచ్చు.

ఉదాహరణ 29 : రెండు పరిశ్రమలకు సంబంధించిన శ్రామికుల సంఖ్య, వారి సగటు వేతనం, ప్రామాణిక విచలనం క్రింద యివ్వబడినవి. ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనం కనుక్కోండి.

	రసాయన పరిశ్రమ	వస్త్ర పరిశ్రమ
శ్రామికుల సంఖ్య	100	120
సగటు వేతనం (రూ॥లలో)	20	15
ప్రామాణిక విచలనం (రూ॥లలో)	9	6

జవాబు : పై సమాచారంలో రసాయన పరిశ్రమ 1గా, వస్త్రపరిశ్రమ 2గా తీసుకున్నాము. $N_1 = 100,\ N_2 = 120,\ \bar{x}_1 = 20,\ \bar{x}_2 = 15,\ \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 6$

ఉమ్మడి అంకమధ్యమం = $\left(\bar{x}_{12}\right) = \dfrac{N_1\bar{x}_1 + N_2\bar{x}_2}{N_1 + N_2}$

$$= \frac{100 \times 20 + 120 \times 15}{100 + 120} = \frac{2000 + 1800}{220}$$

$$\bar{x}_{12} = \frac{3800}{220} = 17.27 \text{ రూ॥లు}$$

ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనము : $\sigma_{1,2} = \sqrt{\dfrac{N_1\sigma_1{}^2 + N_2\sigma_2{}^2 + N_1d_1{}^2 + N_2d_2{}^2}{N_1 + N_2}}$

$$N_1 = 100,\ N_2 = 120,\ \sigma_1 = 9,\ \sigma_2 = 6$$

$$d_1 = \bar{x} - \bar{x}_{1,2} = 20 - 17.27 = 2.73$$

$$d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x}_{1,2} = 15 - 17.27 = -2.27$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sqrt{100\times 9^2 + 120\times 6^2 + 100(2.73)^2 + 120(-2.27)^2}}{100+120}$$

$$= \frac{\sqrt{(100\times 81)+(120\times 36)+(100\times 7.4529)+(120\times 5.129)}}{100+120}$$

$$= \sqrt{\frac{8100+4320+745.29+618.348}{220}}$$

$$\sigma_{1,2} = \sqrt{\frac{13783.638}{220}} = \sqrt{62.6529} = 7.915 \text{ రూ॥లు.}$$

8.3.4.4 ప్రామాణిక విచలనము - సుగుణాలు

1. ఇది స్పష్టంగా, నిర్దుష్టంగా నిర్వచింపబడి, శ్రేణిలోని అన్ని అంశాలపై ఆధారపడిన మానము.
2. ప్రామాణిక విచలనము ప్రముఖంగా వినియోగించబడే విస్తరణ మానము.
3. విచలనాలను వర్గాలు చేయడం వలన గుర్తులను విస్మరించడం (+, -) వలన యేర్పడిన అప్రతిష్ఠ తొలగిపోయెను.
4. బీజీయ ప్రస్తావనకు అనువైనది.
5. రెండు లేదా ఎక్కువ శ్రేణుల ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనము కూడా కనుక్కోవచ్చు.
6. ప్రతిచయనాల మార్పుల వలన యిది యితర విస్తరణ మానాల కంటే తక్కువగా ప్రభావితమగును.
7. పై సుగుణాల వలన ప్రామాణిక విచలనాన్ని విస్తరణ మానాలలో ఆదర్శమానానికి ఉండవలసిన లక్షణాలున్నట్లు పరిగణిస్తారు. అసౌష్టవము, కకుదత్వము, సహసంబంధము, ప్రతిచయనము, ప్రతిగమన విశ్లేషణకు తోడ్పడును. వ్యాపార చక్ర సిద్ధాంతాలు వ్యాపార అంచనాలలో కూడా ఉపయోగిస్తారు.

8.3.4.5 దోషాలు

విస్తరణ మానాల్లో అతి ప్రాముఖ్యమైన కొలమానము ప్రామాణిక విచలనము. ఎన్నో సుగుణాలు ఈ కొలమానానికి వున్ననూ, కొన్ని దోషాలు కూడా లేకపోలేదు. అవి :

1. మిగతా విస్తరణ మానాలకన్నా దీని గణన గణాంక పరిజ్ఞానం లేనివారికి కష్టము.
2. విపరీత అంశాలకు ఎక్కువ ప్రాధాన్యత యిస్తుంది. అందువలన ఆర్థికశాస్త్ర వేత్తలు, వ్యాపారుల అభిమానాన్ని పొందలేకపోయినది.

ఇన్ని లోపాలున్నప్పటికీ అంకమధ్యమాన్ని మొదటి శ్రేణి సగటులలో ఎలాగైతే ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తామో అదే విధంగా ప్రామాణిక విచలనాన్ని రెండో శ్రేణి సగటులో ఉపయోగిస్తాము.

8.3.4.6 విస్తృతం లేదా విస్తృతి (Variance) : అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల అంకమధ్యమమును విస్తృతి అంటారు. సాంకేతికంగా σ^2 అని చెప్పవచ్చు. ప్రాథమిక గణాంక శాస్త్రంలో ప్రామాణిక విచలనం ప్రాముఖ్యత ఎక్కువ ఉన్నత గణాంకశాస్త్రంలో విస్తృతి ప్రాముఖ్యం ఎక్కువ.

విస్తృతి (Variance) = σ^2

అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలను తీసుకుని గణన చేస్తే విస్తృతి సూత్రాలు కింది విధంగా ఉంటాయి.

వ్యక్తిగత శ్రేణుల్లో, $\sigma^2 = \frac{\Sigma d^2}{N}$

విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణుల్లో, $\sigma^2 = \frac{\Sigma fd^2}{N}$

$d = x - \bar{x}$

ఊహించిన అంకమధ్యమాల నుంచి విచలనాలను తీసుకుంటే వ్యక్తిగత శ్రేణులు $\sigma^2 = \frac{\Sigma dx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma dx}{N}\right)^2$

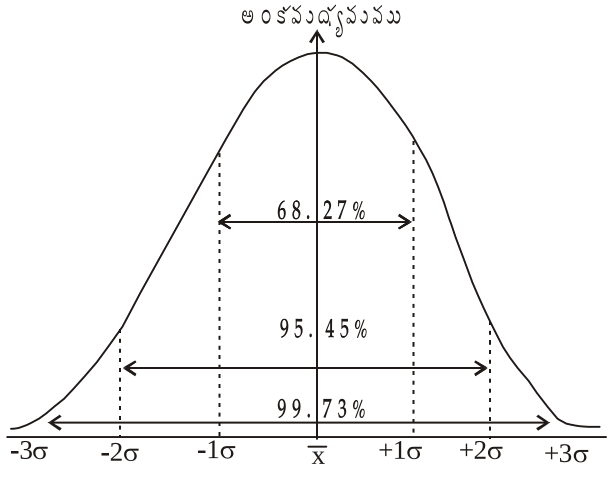
విచ్ఛిన్న, అవిచ్ఛిన్న శ్రేణులు = $\sigma^2 = \frac{\Sigma fdx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fdx}{N}\right)^2$

$dx = x - A$

8.3.4.7 ప్రామాణిక విచలనము - సామాన్య వక్రరేఖ (Standard Diviation) : సామాన్య విభాజనంలో అంశాల పంపిణీ ఏ విధంగా జరిగిందనే విషయాన్ని అంకమధ్యమం, ప్రామాణిక విచలనాల ప్రాతిపదికగా తెలుపవచ్చు. విభాజనంలో అంకమధ్యమం నుంచి ఒకటి, రెండు, మూడు చొప్పున ప్రామాణిక విచలనాలను గుర్తిస్తే మనకు విభాజనం యొక్క వైశాల్యము మూడు భాగాలలో వస్తుంది. ఇంకా ఒక్కొక్క భాగము అంశాల మొత్తంలో కొంత కచ్చితమైన శాతంగా ఉంటుంది.

ఒక సామాన్య వక్రరేఖలో అంకమధ్యమంనకు + ఒక ప్రామాణిక విచలనము. - ఒక ప్రామాణిక విచలనము మధ్య వ్యాప్తిగల వైశాల్యంలో ($\bar{x} \pm 1\sigma = 68.27\%$ అంశాలు), మొత్తం అంశాలలో **68.27** శాతం అంశాలు వుంటాయి. అట్లాగే + రెండు ప్రామాణిక విచలనాలు. - రెండు ప్రామాణిక విచలనాల వ్యాప్తిగల భాగంలో ($\bar{x} \pm 2\sigma = 95.45\%$ అంశాలు) **95.45** శాతం అంశాలు వుంటాయి. ఇంకా $\pm$ మూడు ప్రామాణిక విచలనాలు గల భాగంలో ($\bar{x} \pm 3\sigma = 99.73\%$ అంశాలు) వుంటాయి. కాబట్టి ఒక సామాన్య వక్రరేఖలో ప్రామాణిక విచలనానికి ఆరు రెట్లు తీసుకుంటే మొత్తం శ్రేణులలో ఉన్న అంశాల వ్యాప్తి ఇంచుమించుగా సరిపోతుంది. దిగువ ఇచ్చిన చిత్రంలో ఈ ధర్మం(property) ఉదహరించడమైనది.

అంకమధ్యమము-ప్రామాణిక విచలనము - పరిమాణాలలో అంశాల విభాజనము



దీనివల్ల సామాన్య వక్రరేఖలో అంకమధ్యమం నుంచి మనకు ఇచ్చిన దూరంలో ఎన్ని అంశాలున్నాయో కనుక్కోవచ్చు.

అంకమధ్యమము $\pm$ ఒక ప్రామాణిక విచలనము $(\bar{x} \pm 1\sigma)$ = **68.27%** అంశాలు

అంకమధ్యమము $\pm$ రెండు ప్రామాణిక విచలనాలు $(\bar{x} + 2\sigma)$ = **95.45%** అంశాలు

అంకమధ్యమము $\pm$ మూడు ప్రామాణిక విచలనాలు $(\bar{x} + 3\sigma)$ = **99.73%** అంశాలు

ఉదాహరణ 30 : క్రింది దత్తాంశంలో 90 మంది పనివారి దినసరి ఉత్పత్తి ఇచ్చినారు. వాటి నుంచి పని వాని సగటు ఉత్పత్తి. ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి. అంకమధ్యమం నుంచి $\pm 2\sigma$ పరిమితిలో గల అంశాల శాతాన్ని కనుక్కోండి.

ఉత్పత్తి చేసే వస్తువులు	పనివారి సంఖ్య
18 - 22	5
23 - 27	8
28 - 32	15
33 - 37	25
38 - 42	20
43 - 47	10
48 - 52	7

ఉత్పత్తి చేసే వస్తువులు సమగ్ర తరగతులలో	పనివారి సంఖ్య f	మధ్య విలువలు (x)	ఊహించిన అంక మధ్యమం నుంచి(35) సోపాన విచలనాలు $Dx = \frac{x-A}{C}$ $C=5$	fDx	fDx^2 $(fDx \times Dx)$
17.5 - 22.5	5	20	- 3	- 15	45
22.5 - 27.5	8	25	- 2	- 16	32
27.5 - 32.5	15	30	- 1	- 15	15
32.5 - 37.5	25	35	0	0	0
37.5 - 42.5	20	40	+ 1	+ 20	20
42.5 - 47.5	10	45	- 2	+ 20	40
47.5 - 52.5	7	50	+ 3	+ 21	63
	$N=90$			$\Sigma fDx \begin{cases} +61 \\ -46 \end{cases}$	$\Sigma fDx^2 = 215$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fDx}{N} \times C$$

పై సాంకేతికాలు మనకు తెలుసు, కాబట్టి

$$\bar{x} = 35 + \frac{15 \times 5}{90}$$

$$\bar{x} = 35 + .83 = 35.83$$

ప్రామాణిక విచలనము $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fDx^2}{N} - \left(\frac{fDx}{N}\right)^2} \times C$

ఇక్కడ సాంకేతికాలకు అర్థము మనకు తెలుసు. కాబట్టి,

ప్రామాణిక విచలనము = $\sqrt{\frac{215}{90}-\left(\frac{15}{90}\right)^2} \times 5 = \sqrt{2.39-(.18)^2} \times 5$

$= \sqrt{2.39-0.0324} \times 5 = \sqrt{2.3576} \times 5 = 1.536 \times 5$

$\sigma = 7.68$

ఇప్పుడు అంకమధ్యమం నుంచి $\pm 2\sigma$లో గల అంశాల శాతం కనుగొనాలి.

అంకమధ్యమము = **35.83** ప్రామాణిక విచలనము = **7.68**

$\therefore \bar{x} \pm 2\sigma = 35.83 \pm 2(7.68)$

$\bar{x} + 2\sigma = 35.83 + 15.36$

$\bar{x} - 2\sigma = 20.47$

$\bar{x} + 2\sigma = 35.83 + 15.36$

$\bar{x} + 2\sigma = 35.83 + 15.36 = 51.19$

అంటే **20.47** నుంచి **51.19** మధ్య గల అంశాల శాతాలను గణన చేయవలె. దీనికి ప్రతి తరగతిలోని అంశాలు సమానంగా వున్నాయని ఊహించవలసి వుంటుంది. అట్లా ఊహించినట్లయితే మనకు వున్న **20.47 - 51.19** మధ్య గల అంశాలను తీసుకోవడానికి **22.5 - 47.5** వరకు తరగతులలో వున్న అన్ని అంశాలను తీసుకొని, ఇంకా **17.5 - 22.5**లో గల అనుపాత అంశాలు (Proportionate items), అట్లాగే **47.5 - 52.5**లో గల అనుపాత అంశాలు తీసుకోవలె.

అంటే **17.5 - 22.5** మధ్య **5** పౌనఃపున్యాలున్నాయి. అవి సమానంగా విభాజనం చెందినట్లు మనము ఊహించినాము. కాబట్టి ఒక్కొక్క అంశము ఒక పౌనఃపున్యానికి సమానము. అంటే **20.47 - 22.5**ల మధ్య గల అంశాలు **(22.5 - 20.47) = 2.03**కు సమానము. కాబట్టి వాటి మధ్య **2.03** అంశాలుంటాయి. అట్లాగే **47.5 - 52.5**ల మధ్య **7** పౌనఃపున్యాలున్నాయి. కాబట్టి ఒక్కొక్క అంశము $\frac{7}{5}$ పౌనఃపున్యాలకు సమానము. అంటే **51.19** వరకు అంటే **47.5** నుంచి **51.19** వరకు **(51.19-47.5) = 3.69** అంశాలుంటాయి. ఒక్కొక్క అంశానికి $\frac{7}{5}$ అయితే **3.69** అంశాలకు $3.69 \times \frac{7}{5} = 5.19$ పౌనఃపున్యమవుతుంది. ఇప్పుడు **20.47-51.19**కి మధ్య గల మొత్తం పౌనఃపున్యాలు తీసుకుంటే అవి ఈ విధంగా ఉంటాయి.

20.47 నుంచి **22.5** వరకు గల పౌనఃపున్యాలు =	**2.03**
22.5 నుంచి **47.5** వరకు గల పౌనఃపున్యాలు = **8+15+25+20+10** =	**78**
అట్లాగే **47.5** నుంచి **51.19** వరకు గల పౌనఃపున్యాలు =	**5.19**
మొత్తం పౌనఃపున్యాలు =	85.22

మొత్తం **90** అంశాలలోను మనకు $\bar{x} \pm 2\sigma$ మధ్య గల అంశాలు **85.22**కు సమానమైతే వాటి శాతం $= \frac{85.22}{90} \times 100 = 94.7$

$\therefore$ అంకమధ్యమము $\pm 2\sigma$ మధ్య రమారమి **95**శాతం అంశాలు వున్నట్టు చెప్పవచ్చు.

8.3.5 లోరెంజ్ వక్రరేఖ (Lorenz Curve) : విస్తరణను రేఖాచిత్రపటం ద్వారా అధ్యయనం చేయడాన్ని డా॥ మేక్స్ ఒ. లోరెంజ్ (Dr. Max. O. Lorenz)అనే గొప్ప ఆర్థిక గణాంక శాస్త్రవేత్త కనుక్కొన్నాడు. ఆ విధంగా గీసే వక్రరేఖనే లోరెంజ్ వక్రరేఖ అంటారు. సంపద, ఆదాయము (Wealth and income) పంపిణీలను అధ్యయనం చేయడానికి మొదట దీనిని లోరెంజ్ ఉపయోగించినాడు.

లోరెంజ్ వక్రరేఖ సంచితశాతాల వక్రరేఖ (Cummulative Percent Curve). ఇందులో అంశాల పరిమాణము, పౌనః పున్యము, రెండూ సంచితం చేయవలె. అట్లా సంచితం చేసిన అంశాల మొత్తానికి శాతాలను కనుక్కోవలె. అప్పుడు శాతాలను రేఖాచిత్రపటంపై గుర్తించవలె. అయితే చలరాశుల సంచిత శాతాలను X - అక్షం మీదను, పౌనఃపున్య సంచిత శాతాలను Y - అక్షం మీద తీసుకోవలె. సాధారణంగా మనం తీసుకునే స్కేలుకు ఇక్కడ తీసుకునే స్కేలుకు తేడా వున్నది. అదేమిటంటే భూమి మీద అంటే X - అక్షం మీద '100' నుంచి '0' వరకూ, ఊర్ధ్వ అక్షము (Vertical Axis) మీద అంటే Y - అక్షం మీద, O - నుంచి 100 వరకు స్కేలును తీసుకోవాలి. అట్లా చేస్తే మనకు సమాన విభాజన రేఖ (Line of equal distribution) వస్తుంది. ఈ రేఖ 45^0 రేఖగా వుంటుంది. మనం గీసే లోరెంజ్ వక్రరేఖలకు, సమాన విభాజన సరళరేఖకు వుండే దూరము ఎంత ఎక్కువగా వుంటే విచరణము అంత ఎక్కువగా వుంటుందని గ్రహించవచ్చు. సరిపోల్చవలసి వచ్చిన రెండు శ్రేణుల విస్తరణ పరిమాణాన్ని (Magnitude) కూడా ప్రదర్శిస్తుంది. సాధారణంగా లాభాలు, సంపద, రాబడులు, వేతనాలు మొదలైనవి అధ్యయనం చేయడానికి ఇది ఉపయోగపడుతుంది. అయితే ఇది చిత్రపటం ద్వారా రెండు శ్రేణుల మధ్య గల విస్తరణకు ఒక భావం స్ఫూరింపజేస్తుందేకాని, సంఖ్యా రూపంలో విలువను యివ్వలేదు. ఇదే దీని లోపము.

సమాన విభాజన రేఖ : వివిధ చలనాల యొక్క విలువలు పౌనఃపున్యాల విభాజనము. అనుపాతంలో (Pro-portionately) సమానంగా వున్నట్లయితే బిందువులు ఒక సరళరేఖలో ఏర్పడతాయి. అంటే విభాజనంలోని అంశాల పెరుగుదల లేదా పౌనఃపున్యంలో పెరుగుదలకు అనుపాతంగా వుంటే అది సమాన విభజన రేఖను ఇస్తుంది. ఉదాహరణకు 10 శాతం రాబడి విభాజనం అనుపాతంగా 10 శాతం అంశాలు పంచుకొంటే లేదా 20 శాతం రాబడి. 20 శాతం అంశాలు పంచుకొంటే అది మనకు సమాన విభాజనరేఖను ఇస్తుంది. ఇంకో విధంగా చెప్పవలెనంటే రాబడి 10, 20, 40, 50, 80 ఉన్నప్పుడు ఈ ఒక వర్గంలో వ్యక్తుల సంఖ్యలు 5, 10, 20, 25, 40 వున్నప్పుడు వాటి సంచిత శాతాలు మొత్తానికి 5, 15, 35, 60, 100గా వుంటాయి. ఇక్కడ రెండు విభాజనాలలో వున్న సంచిత శాతాలు ఒక్కటే కాబట్టి వాటితో మనకు ఒక సరళరేఖ వస్తుంది. అట్లాంటి సరళరేఖనే సమాన విభాజనరేఖ (Line of equal distribution) అంటారు. దీనికి మిగిలిన వక్రరేఖలకు వున్న దూరాన్ని బట్టి మనము విస్తరణ గురించి ఒక అభిప్రాయానికి రావచ్చు.

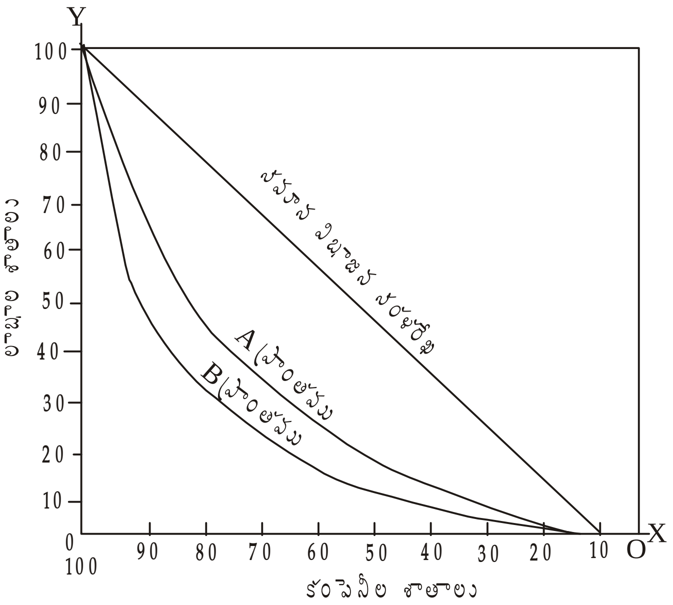
ఉదాహరణ 31 : కింద ఇచ్చిన దత్తాంశంలో రెండు ప్రాంతాలకు చెందిన కంపెనీలు, వాటి లాభాల వివిరణలు ఇచ్చినారు. వాటి నుంచి లోరెంజ్ వక్రరేఖను గుర్తించండి.

లాభాలు వేలలో	A ప్రాంతంలో కంపెనీలు	B ప్రాంతంలో కంపెనీలు
6	6	2
25	11	38
60	13	52
84	14	28
105	15	28
105	17	26
179	10	12
400	14	4

జవాబు : లోరెంజ్ వక్రరేఖ గుర్తించడానికి అంశాల పరిమాణము, పౌనఃపున్యం కూడా సంచితం చేసి తర్వాత వాటి శాతాలను గణన చేయవలె. అట్లా శాతాలను గణన చేసేటప్పుడు క్రమంగా మొత్తాలను 100కు సమానం చేయవలె.

			A ప్రాంతంలో			B ప్రాంతంలో		
వేల రూ॥లలో	సంచిత లాభాలు	సంచిత శాతాలు	కంపెనీల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము	సంచిత శాతం	కంపెనీల సంఖ్య	సంచిత పౌనఃపున్యము	సంచిత శాతం
		$\frac{\text{సంచిత లాభాలు}}{\text{మొత్తం లాభాలు}} \times 100$			$\frac{\text{A ప్రాంతంలో సంచిత పౌనఃపున్యం}}{\text{A మొత్తం పౌనఃపున్యం}} \times 100$			$\frac{\text{B ప్రాంతంలో సంచిత పౌనఃపున్యం}}{\text{B మొత్తం పౌనఃపున్యం}} \times 100$
6	6	0.6%	6	6	6%	2	2	1%
25	31	3.1%	11	17	17%	38	40	20%
60	91	9.1%	13	30	30%	52	92	46%
84	175	17.5%	14	44	44%	28	120	60%
105	280	28%	15	59	59%	28	148	74%
150	430	43%	17	76	76%	26	176	87%
170	600	60%	10	86	86%	12	186	93%
400	1000	100%	14	100	100%	14	200	100%

లోరెంజ్ వక్రరేఖలు



8.4 సారాంశం

కేంద్రస్థాన విలువకు అసలు విభాజనంలోని అంశాలకు వున్న తేడా లేదా విచరణను కొలిచే పద్ధతిని విచరణమానం లేదా విస్తరణ మానం అంటారు. విస్తరణ మానాలను పరమ, సాపేక్ష విస్తరణ మానాలు అని రెండు రకాలుగా చెప్పడం జరుగుతుంది. వ్యాప్తి, చతుర్థాంశవిచలనం, మాధ్యమిక విచలనం, ప్రామాణిక విచలనాలు పరమ మానాలు. వీటి సాపేక్ష మానాలు వ్యాప్తి గుణకం, చతుర్థాంశ విచలన గుణకం, మాధ్యమిక విచల గుణకం, ప్రామాణిక విచలన గుణకం లేదా విచరణ గుణకం. ఐదో విస్తరణ మానం లోరెంజ్ వక్రం. ఈ పద్ధతి రేఖా పద్ధతి. విస్తరణ మానాల్లో అతి ప్రధానమైన విస్తరణ మానం ప్రామాణిక విచలనం. విస్తరణ మానాలన్నింటికీ కొన్ని ప్రయోజనాలు, కొన్ని లోపాలు వున్నాయి. సందర్భాన్ని బట్టి ఒక్కొక్క సమయంలో ఒక్కో విస్తరణమానం ఉపయోగకరంగా వుంటుంది. అయితే ఈ విస్తరణ మానాలు ద్వారా అంశాలు ఏ వైపున విస్తరించాయి, దత్తాంశ శిఖరాగ్రం ఏ విధంగా వుంది అనే విషయాలను గూర్చి వివరించలేవు. కావున వైషమ్యము, కుకుదత్వాలు రూపొందించబడ్డాయి. వీటిని గురించి తరువాత పాఠంలో చదువుకుందాం.

8.5 ముఖ్య పదాలు

1. **వ్యాప్తి :** విభాజనంలోని అత్యధిక, అత్యల్ప అంశాల మధ్య వ్యత్యాసం.
2. **విచరణ గుణకం :** క్రమవిచలనాన్ని అంకమధ్యమంతో భాగించి 100తో గుణిస్తే విచరణ గుణకం లభ్యమవుతుంది.
3. **లోరెంజ్ వక్రరేఖ :** ఆదాయ వ్యత్యాసాలను కనుగొనేందుకు మాక్స్ ఓ. లోరెంజ్ రూపొందించిన రేఖను లోరెంజ్ రేఖ అంటారు.
4. **సమాన పంపిణీ రేఖ :** లోరెంజ్ వక్రాన్ని రూపొందించేటప్పుడు చూపే 45^0 రేఖను సమాన పంపిణీ రేఖ అంటారు.
5. **సెమీ-ఇంటర్-క్వార్టల్-వ్యాప్తి :** చతుర్థాంశ విచలనాన్నే సెమీ-ఇంటర్-క్వార్టయిల్ - వ్యాప్తి (Semi-Inter Quartile Range) అంటారు.

8.6 నమూనా ప్రశ్నలు

1. విస్తరణ అంటే ఏమిటి? పరమ, సాపేక్ష విస్తరణల మధ్య విచక్షణ చేయండి.
2. వివిధ విస్తరణ మానాల సాపేక్ష ప్రయోజనాలను గూర్చి చర్చించండి.
3. ప్రామాణిక విచలనము మెరుగైన మానంగా ఏ విధంగా పరిగణింతురు.
4. విస్తరణ మానాల ఆవశ్యకత ఏమి? స్థాన ప్రాతిపదికపై రూపొందించిన విస్తరణమానాలను గూర్చి వ్రాయండి.
5. విచరణ గుణకమనగానేమిటి? దాని ప్రాముఖ్యత తెల్పుము.
6. ఉమ్మడి ప్రామాణిక విచలనాన్ని ఎట్లా గణిస్తారు.
7. ఈ క్రింది వానిని గూర్చి లఘుటీకలు వ్రాయండి.
   (1) వ్యాప్తి, వ్యాప్తి గుణకం (2) లోరెంజ్ వక్రరేఖ
   (3) విస్తృతి (4) సామాన్యవక్రరేఖ
8. లోరెంజ్ వక్రము అనగానేమి? నిర్మాణాన్ని గూర్చి తెల్పుము.

9. దిగువ దత్తాంశము నుండి మాధ్యమ విచలనము, దాని గుణకాన్ని గణన చేయండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
విద్యార్థులు	8	12	20	40	20	12	8

10. దిగువ దత్తాంశము నుండి చతుర్థాంశ విచలనము, దాని గుణకములు కనుగొనండి.

వేతనాలు	60-64	64-68	68-72	72-76	76-80	80-84
కార్మికులు	22	24	32	42	20	10

11. క్రింది దత్తాంశము నుండి ప్రామాణిక విచలనము, విచరణ గుణకము కనుగొనండి.

X	5-10	10-15	15-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f	12	9	3	8	4	12	17	5

12. A, B కంపెనీల వాటాల ధరలు దిగువ యివ్వబడినవి. ఏ కంపెనీ వాటాల విలువలో స్థిరత్వమున్నది.

A :	110, 108, 104, 106, 112, 116, 104, 100, 102, 98
B :	216, 214, 210, 210, 212, 214, 208, 206, 208, 202

13. ఒక కళాశాలలోని బి.ఏ. విద్యార్థులు అర్థశాస్త్రం, ఆర్థిక గణాంక శాస్త్రం పరీక్షలలో సాధించిన మార్కులు దిగువన యివ్వబడినవి. ఏ పరీక్షలో విద్యార్థులు స్థిరమైన ప్రతిభను కనబరచిరి.

మార్కులు	విద్యార్థులు	
	అర్థశాస్త్రం	ఆర్థిక గణాంకశాస్త్రం
20 - 30	2	6
30 - 40	9	11
40 - 50	29	18
50 - 60	54	35
60 - 70	11	30
70 - 80	5	10

14. A, B అను ఇద్దరు బ్యాట్స్‌మెన్‌లు చేసిన స్కోరు వివరాలు దిగువ పట్టికలో యివ్వబడినవి. వీరిలో ఎవరిని స్థిరమైన బ్యాట్స్‌మన్‌గా భావిస్తారు.

స్కోరు	ఇన్నింగ్సు	
	A	B
50	1	1
51	0	2
52	0	2
53	4	6

54	3	3
55	6	4
56	3	2
57	3	0

15. ఈ క్రింది విభాజనానికి చతుర్థాంశ విచలనం కనుక్కోండి.

రాబడి వర్గము (రూ॥లలో)	పనివారి సంఖ్య
50 లోపు	1
50 - 70	16
70 - 90	39
90 - 110	58
110 - 130	60
130 - 150	46
150 - 170	22
170 - 190	15
190 - 210	15
210 - 230	9
230 ఆ పైన	10
మొత్తం	**291**

16. దిగువ దత్తాంశం నుంచి, మాధ్యమ విచలనము, ప్రామాణిక విచలనము కనుక్కోండి.

లాభాలు రూ॥లలో	కంపెనీల సంఖ్య
5,000 నుంచి 6,000	10
4,000 నుంచి 5,000	15
3,000 నుంచి 4,000	30
2,000 నుంచి 3,000	10
1,000 నుంచి 2,000	5
0 నుంచి 1,000	4
-1,000 నుంచి 0	6
-2,000 నుంచి - 1,000	8
-3,000 నుంచి - 2,000	10

17. వారపు సంపాదనల విభాజనము దిగువ పట్టీలో ఇవ్వడమైంది. వారి సంపాదన విచరణ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

వారపు సంపాదన రూ॥లలో	పనివారి సంఖ్య
22 - 22.99	1

23 - 23.99	7
24 - 24.99	21
25 - 25.99	27
26 - 26.99	42
27 - 27.99	54
28 - 28.99	34
29 - 29.99	13
30 - 30.99	9
31 - 31.99	1
32 - 32.99	1

18. దగ్గర పద్ధతిని ఉపయోగించి దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశంలో ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయండి. మీరు గణన చేసిన సూత్రాన్ని సాంకేతికంగా చూపండి.

వయస్సు	పౌనఃపున్యము
10 - 19	3
20 - 29	61
30 - 39	223
40 - 49	137
50 - 59	53
60 - 69	19
70 - 79	4

19. ఒక కొనుగోలుదారు రెండు కంపెనీల నుంచి మనిల్లా కవర్ల శాంపుల్స్ తీసుకొన్నాడు. ఆ కవర్ల శాంపుల్స్‌ను తన ప్రయోగశాలలో పరిక్షించుకొంటే దిగువ ఫలితాలు వచ్చినాయి.

ప్రేలుడు వత్తిడి	పగిలిన కవర్లు	
కి.గ్రాములలో	A కంపెనీ శాంపుల్స్	B కంపెనీ శాంపుల్స్
50 - 60	3	10
60 - 70	42	16
70 - 80	22	38
80 - 90	3	6

ఏ కంపెనీ కవర్లు శ్రేష్టతలో (Quality) ఎక్కువ చలనంతో వున్నాయి.

20. ఒక ఫుట్‌బాల్ సీజన్‌లో A టీము చేసిన 'గోల్'ల (Goals) పట్టీ దిగువ ఇవ్వడమైంది.

స్కోరు చేసిన గోల్‌ల సంఖ్య	పాల్గొన్న పోటీల(Matches) సంఖ్య
0	1
1	9
2	7
3	5
4	3

21. దిగువ ఇచ్చిన 542 లోక్‌సభ (పార్లమెంటు) సభ్యుల వయోవిభాజనం నుంచి ప్రామాణిక విచలనాన్ని గణన చేయండి.

వయస్సు	సభ్యుల సంఖ్య
20	3
30	61
40	132
50	153
60	140
70	51
80	2
మొత్తం	542

22. రెండు పట్టణాలలో గత అయిదు సంవత్సరాలలో ఒక వస్తువు ధరలు దిగువ ఇచ్చినారు. వాటి నుంచి ఏ పట్టణంలో ధరలు ఎక్కువ నిశ్చలతలో వున్నాయో కనుక్కోండి.

వరుస క్రమం	A పట్టణంలో ధరలు	B పట్టణంలో ధరలు
1	10	10
2	22	20
3	19	18
4	23	12
5	16	15

23. దిగువ ఇచ్చిన వ్యవసాయ రాబడుల నుంచి లోరెంజ్ వక్రరేఖను గీయండి.

రాబడుల వ్యాప్తి	కుటుంబాల సంఖ్య	మొత్తం రాబడులు
51 - 250	1744	268
251 - 450	527	186
451 - 650	302	166
651 - 850	186	139
851 - 1050	123	117
1051 - 1250	90	104

24. రెండు కర్మాగారాలలో పనిచేసేవారి రాబడి దిగువ పట్టీలో ఇవ్వడమైంది. దీని నుంచి లోరెంజ్ వక్రరేఖ గీసి ఏ కర్మాగారము రాబడిలో ఎక్కువ అసమానతలు (Inequalities) వున్నాయో చూపించండి.

రాబడి రూ॥లలో	A కర్మాగారము	B కర్మాగారము
500 లోపు	6000	5000
500 - 1000	4250	4500
1000 - 2000	3600	4800
2000 - 3000	1500	2200
3000 - 4000	650	1500

25. విస్తరణ మానాలన్నింటిలోకి ప్రామాణిక విచలనం మిన్న అని ఎందుకంటామో విపులీకరించండి. దీనిలో ప్రధానమేమిటి?

సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

26. వ్యాప్తి - వ్యాప్తి గుణకము
27. చతుర్థాంశ విచలనం
28. చతుర్థాంశ విచలన గుణకం
29. మాధ్యమిక విచలనం
30. మాధ్యమిక విచలన గుణకం
31. ప్రామాణిక విచలనం
32. ప్రామాణిక విచలన గుణకం
33. విచరణ గుణకం
34. లోరెంజ్ వక్రము

8.7 చదువదగిన గ్రంథాలు

B.N. Elhance	:	Fundamentals of Statistics
S.P. Gupta	:	Statistical Methods
C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics
M.C. Shukla & S.S. Gulshan	:	Statistics-Theory and Practics.

పాఠం - 9

సహసంబంధము

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

9.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగము చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలు తెలుసుకోగలరు.

* సహసంబంధం - అర్థం
* సహసంబంధం - ప్రాముఖ్యత
* సహసంబంధంలో రకాలు
* సహసంబంధాన్ని గణించే పద్ధతులు
* కోటి సహసంబంధ గుణకము
* సారూప్య విచలనాల గుణకము

9.1 విషయపరిచయం

కేంద్రస్థాన కొలతలు, విస్తరణ మానాలు, వైషమ్యము మొదలైనవి ఒకే చలరాశిని పరిశీలించడానికి సంబంధించినవి. కానీ నిజ జీవితంలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ చలరాశులను అధ్యయనం చేయవలసిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు ధర, డిమాండ్‌లకు - వ్యక్తుల ఎత్తు, బరువులకు - భార్యాభర్తల వయస్సులకు, ఆదాయము-వినియోగమునకు, వర్షపు దినాలు గొడుగుల అమ్మకములకు, వర్షపాతం-పంట దిగుబడి మొదలయిన అనేక చలాంక జతలకు సంబంధం వుంటుంది. ఈ విధమైన రెండు చలాంకాల శ్రేణుల సంబంధాన్ని సంఖ్యారూపంలో చెప్పవచ్చు. సహసంబంధము వలన రెండు శ్రేణుల మధ్య సన్నిహిత్యాన్ని నిర్ణయించవచ్చు.

రెండు చలరాశులలో ఒకదానిలోని మార్పు రెండవ చలరాశిలోని మార్పుకు కారణమైనట్లయితే ఆ రెంటి మధ్య సహసంబంధం వుందని అంటాము. సహసంబంధాన్ని అనేక మంది శాస్త్రవేత్తలు నిర్వచించారు. అందులో ముఖ్యముగా కోనార్ నిర్వచనం ముఖ్యమైనది: కోనార్ ప్రకారం "రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ పరిమాణాలు సానుభూతితో చెల్లించినపుడు అనగా ఒకదాని గమనానికి అనురూపంగా రెండవదాని గమనాలు వుంటే ఆ రెండు చలాంకాలకు సహసంబంధము ఏర్పడుతుంది''.

సాధారణంగా చలాంకాల మధ్య కార్యకారణ సంబంధాన్ని సహసంబంధము సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకు వర్షపాతం ఎక్కువగా వుంటే పంట దిగుబడి అధికంగా వుంటుంది. వర్షపాతం తక్కువగా వుంటే పంట దిగుబడి తక్కువగా వుంటుంది. అదే విధంగా పొడవుగా వున్న తండ్రులకు (కారణం) పొడవుగా వున్న కొడుకులు (ఫలితం) జన్మిస్తారు. ఈ విధంగా అనేక విషయాలకు కార్యాకారణ సంబంధాన్ని తెలియజేసే గణాంకశాస్త్ర భావనను సహసంబంధము అంటారు.

9.2 సహసంబంధం యొక్క ప్రాముఖ్యత

సహసంబంధ భావన భౌతిక, సాంఘిక శాస్త్రాలలో ఎక్కువగా ఉపయోగపడుతుంది. అయితే వ్యాపారంలోను, అర్ధశాస్త్రంలోను, సాంఘికశాస్త్ర పరిశోధనలోను, సహసంబంధానికి ప్రముఖమైన పాత్ర వున్నది.

(ఎ) ఒక వస్తువు ధర, డిమాండ్‌లకు గల సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేయటంలో సహసంబంధం సహాయ పడుతుంది. అంతేకాకుండా ధర, సప్లై, ఉత్పత్తి, వ్యయాలు, ఉత్పత్తి పరిమాణం, అమ్మకాలు, రాబడులు, మొదలగునవి ఆర్థిక చలాంకాల కార్యాకారణ సంబంధాన్ని సహసంబంధం ద్వారా తెలుసుకొనవచ్చు.

(బి) చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాన్ని, సంబంధపు స్థాయిని ఒక అంకె రూపంలో కొలవవచ్చును.

(సి) చలరాశుల సహసంబంధం ద్వారా ప్రతిచయన దోషాలను నిర్ణయించవచ్చు.

(డి) చలరాశులలో మార్పులకు సంబంధించిన ముఖ్యకారణాలను గుర్తించి అవసరమైన చర్యలను చేపట్టవచ్చును.

(ఇ) ప్రతిగమన విశ్లేషణకు సహసంబంధము ఆధారంగా వుంటుంది. ఒక చలరాశి విలువ ఆధారంగా వేరొక చలరాశి విలువను అంచనా వేయవచ్చును.

ఆర్థిక సిద్ధాంతాలు నిర్దిష్టమైన నిజాలుగా వుండవు. ఉజ్జాయింపుగా నిజాలని చెప్పవచ్చు. ఖచ్చితమైన శాస్త్రాలలో లాగా ఆర్థిక సిద్ధాంతాలలో సంపూర్ణయధార్థతను సాధించలేము. అయితే రెండు చలాంకాల విలువలు ఒకే దిక్కుగా పోతున్నాయో, లేక వ్యతిరేక దిక్కులో పోతున్నాయో చెప్పవచ్చు. సహసంబంధము వివిధ రకాలుగా వుండవచ్చు.

(1) ధనాత్మక లేక రుణాత్మక సహసంబంధము (2) సరళరేఖా లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము.

9.3 సహసంబంధం - వివిధ రకాలు

రెండు చలరాశులలో ఒక చలరాశిలోని మార్పులకు రెండో చలరాశి కారణమైతే వాటి మధ్య సహసంబంధము ఉందని మనం తెలుసుకొన్నాము. అయితే ఒక చలరాశిలో మర్పు ఒకే దిశలో ఉంటే రెండో చలరాశిలో మార్పు అదే దిశలో ఉందా లేక

వ్యతిరేక దిశలో ఉందా అనే దాని మీద, సహసంబంధాన్ని పరిశీలించే చలరాశుల ప్రాతిపదిక మీద ఆధారపడి సహసంబంధాన్ని వివిధరకాలుగా చెప్పవచ్చు.

1. ధనాత్మక లేదా రుణాత్మక సహసంబంధం
2. సరళరేఖ లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధం
3. సామాన్య సహసంబంధం లేదా బహుళ సహసంబంధం

9.3.1 ధనాత్మక లేక రుణాత్మక సహసంబంధము : చలాంక శ్రేణులలో ఒక చలాంకము తగ్గినప్పుడే వేరొక చలాంకము తగ్గటం, ఒక చలాంకము పెరిగినప్పుడు వేరొక చలాంకము పెరుగుతూ వుంటే ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య సంబంధాన్ని ప్రత్యక్ష సంబంధము లేక ధనాత్మక సహసంబంధము అంటాము. సూక్ష్మంగా చెప్పాలంటే రెండు చలరాశులు ఒకే దిక్కులో చలించినట్లయితే, ఆ రెండు చలాంకాల మధ్య గల సహసంబంధము ధనాత్మకమని చెప్పవచ్చు. ఉదాహరణకు ధర పెరిగితే, ఆ వస్తువు సప్లై కూడా పెరుగును. ధర తగ్గితే సప్లై కూడా తగ్గును. ఇది ధనాత్మక సహసంబంధము.

రెండు విభాజనాలలో ఒక చలాంకపు విలువ తగ్గినపుడు వేరొక చలాంకము పెరిగితే లేదా ఒక చలాంకము పెరిగినప్పుడు రెండవ చలాంకము తగ్గితే ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య గల సంబంధం వ్యతిరేక సంబంధము లేదా రుణాత్మక సహసంబంధము అంటాము. సహసంబంధ గుణకం గుర్తు రుణాత్మకంగా వుంటుంది. ఉదాహరణకు ధర పెరిగితే డిమాండ్ తగ్గును - ధర తగ్గితే డిమాండ్ పెరుగును.

9.3.2 సరళరేఖ లేదా వక్రరేఖీయ సహసంబంధము : ఒక చలాంకములో ఏర్పడిన మార్పు వలన రెండవ చలాంకములో స్థిరమైన మార్పు ఏర్పడితే, ఆ రెండు చలాంకాల మధ్య సరళరేఖా సహసంబంధం వుంటుంది.

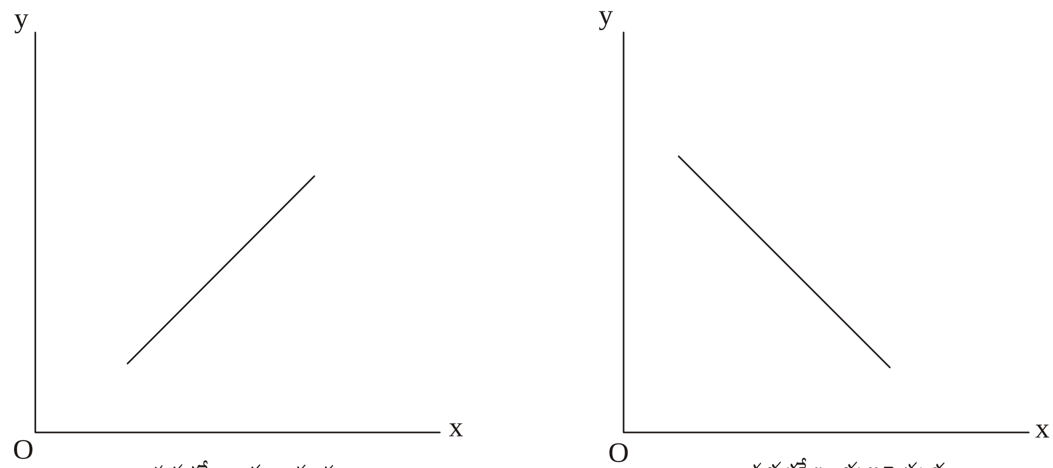
ఉదాహరణకు

x :	1	2	3	4	5
y :	2	4	6	8	10

x లో చలాంకములో వచ్చిన మార్పుకు y చలాంకములో స్థిరమైన మార్పు ఏర్పడుతుంది. దీనిని బట్టి $Y= A + bX$ అనే సరళరేఖ సంబంధం కలిగివుంటాయి. దీనిని సరళరేఖా సహసంబంధం అంటారు. ఇది ధనాత్మకముగాను లేక రుణాత్మకముగాను వుండిపోవచ్చును.

రేఖాపటం - 1

పటము ఎ   పటము బి



సరళరేఖ ధనాత్మక సహసంబంధం

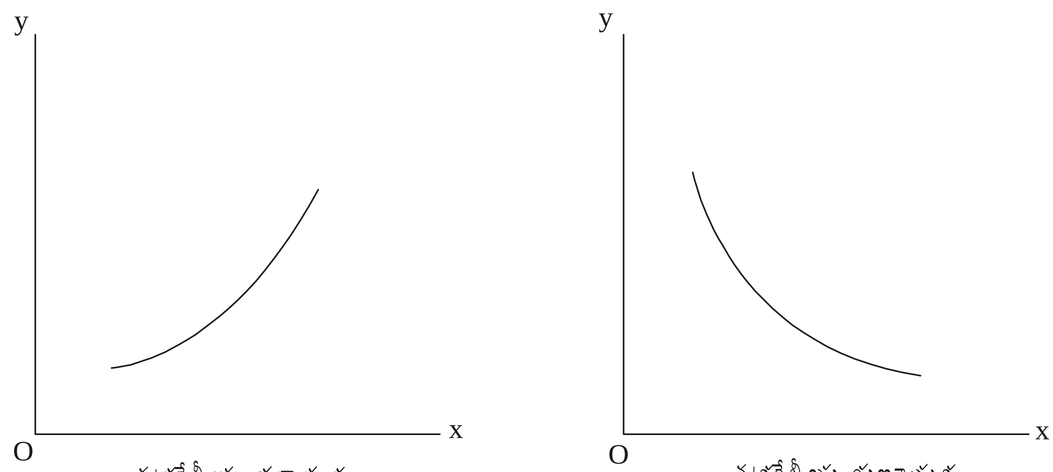
సరళరేఖ రుణాత్మక సహసంబంధం

పై పటంలో x లో వచ్చిన మార్పునకు y లో స్థిరమైన మార్పు - ఒకే మార్గంలో ఏర్పడితే, దానిని సరళరేఖ ధనాత్మక సహసంబంధం అంటాము. x ఒక స్థిరమైన విలువతో పెరుగుతుంటే, y కూడా ఒక స్థిరమైన విలువతో పెరుగుతుంటుంది. x విలువ స్థిరమైన విలువ తగ్గుతుంటే y కూడా స్థిరమైన విలువతో తగ్గుతుంది. అప్పుడు గ్రాపులో రేఖ ఎడమ నుండి కుడికి పైకి పోతూ వుంటుంది. దీనిని రేఖాపటం 1లో పటం-ఎ నందు చూపడం జరిగింది.

x లో వచ్చిన మార్పునకు y లో స్థిరమైన మార్పు వ్యతిరేక మార్గంలో ఏర్పడితే దానిని సరళరేఖా ఋణాత్మక సహసంబంధం అంటాము. ఉదాహరణకు ధర స్థిరమైన విలువతో తగ్గుతుంటే డిమాండ్ స్థిరమైన విలువతో పెరుగుతున్నప్పుడు, అప్పుడు సరళరేఖ ఋణాత్మక సహసంబంధం ఏర్పడును. గ్రాపులో ఆ రేఖ పైన చూపిన విధంగా ఎడమ నుండి కుడికి క్రిందికి వాలి వుంటుంది.

వక్రరేఖీయ సంబంధము : ఒక చలాంకములో మార్పునకు రెండవ చలాంకములో మార్పు స్థిరనిష్పత్తిలో లేనప్పుడు వక్రీయ సహసంబంధం అంటారు. వక్రీయ సహసంబంధం ధనాత్మకంగాను లేక ఋణాత్మకంగాను వుండవచ్చు.

రేఖాపటం - 2



వక్రరేఖీయ ధనాత్మక సహసంబంధం

వక్రరేఖీయ ఋణాత్మక సహసంబంధం

x లో 10% మార్పు వస్తే y లో అందుకు భిన్నమైన మార్పు ఏర్పడితే అప్పుడు వక్రరేఖీయ సహసంబంధం ఏర్పడుతుంది. x 10% పెరిగినప్పుడు y అంతకు భిన్నమైన శాతంలో పెరిగితే, అది వక్రరేఖీయ ధనాత్మక సంబంధం అంటాము. పై గ్రాపులో చూపినట్లుగా ఎడమ నుండి కుడికి పైకి రేఖ పోతుంది. x లో వచ్చిన మార్పునకు y లో భిన్నమైన మార్పు వ్యతిరేఖమైన మార్పులో ఏర్పడితే అది వక్రరేఖీయ ఋణాత్మక సంబంధము. x 10% తగ్గితే, y అంతకు భిన్నమైన శాతం పెరిగితే, అది వక్రరేఖీయ ఋణాత్మక సంబంధం అవుతుంది. పై గ్రాపులో చూపిన విధంగా వక్రరేఖగా ఎడమ నుండి కుడికి క్రిందగా వాలి వుంటుంది.

9.3.3 సామాన్య సహసంబంధం లేదా బహుళ సహసంబంధం : రెండు చలరాశుల మధ్య వున్న సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేస్తే దానిని సామాన్య సహసంబంధం అంటారు. రెండుకు మించిన చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేయటాన్ని బహుళ సహసంబంధం అంటారు.

9.4 సహసంబంధము - గణన పద్ధతులు

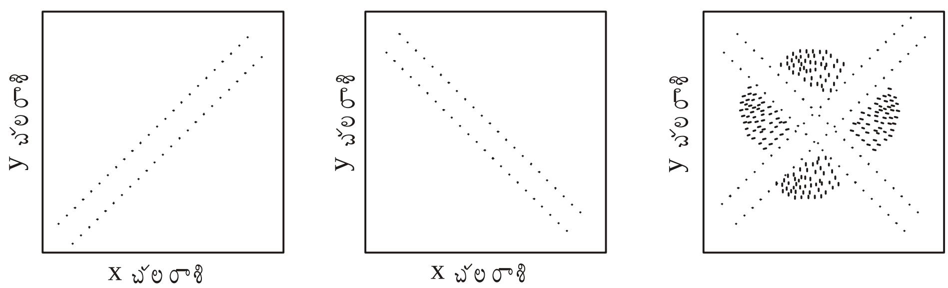
సహసంబంధం అధ్యయనం చేయడానికి చాలా పద్ధతులున్నాయి. రెండు చలాంకాల మధ్య ధనాత్మకమైన లేక రుణాత్మకమైన సంబంధము వుండవచ్చును. దీనిని అధ్యయనం చేయడానికి ఈ క్రింది పద్ధతులు ఉపయోగపడతాయి.

1. వ్యాపన పటము
2. సహసంబంధ రేఖా చిత్రపటం
3. సహసంబంధ గుణకం
4. స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకము
5. సారూప్య విచలనాల పద్ధతి

9.4.1 వ్యాపన పటము : రెండు చలాంకాల మధ్య సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేయడానికి గీసే చిత్రపటమే వ్యాపాన పటము. ఇది చాలా సులువైన ప్రక్రియ. x, y అనే రెండు చలరాశులు వున్నట్లయితే వాటిని గ్రాపు కాగితంపై x, y రేఖలపై గుర్తించాలి. రెండు చలాంకాలలో ఒకటి స్వతంత్ర చలాంకము అవుతుంది. రెండవది ఆధారిత చలాంకము అవుతుంది. స్వతంత్ర చలాంకము పెరిగినప్పుడు దానిపై ఆధారపడిన అస్వతంత్ర చలాంకము కూడా పెరిగితే ఆ రెండింటి మధ్య ధనాత్మకమైన సహసంబంధం వుంటుంది.

రేఖాపటం - 3

పటము - ఎ పటము - బి పటము - సి



(a) ధనాత్మక సహసంబంధం (b) రుణాత్మక సహసంబంధం (c) సహసంబంధ రాహిత్యము

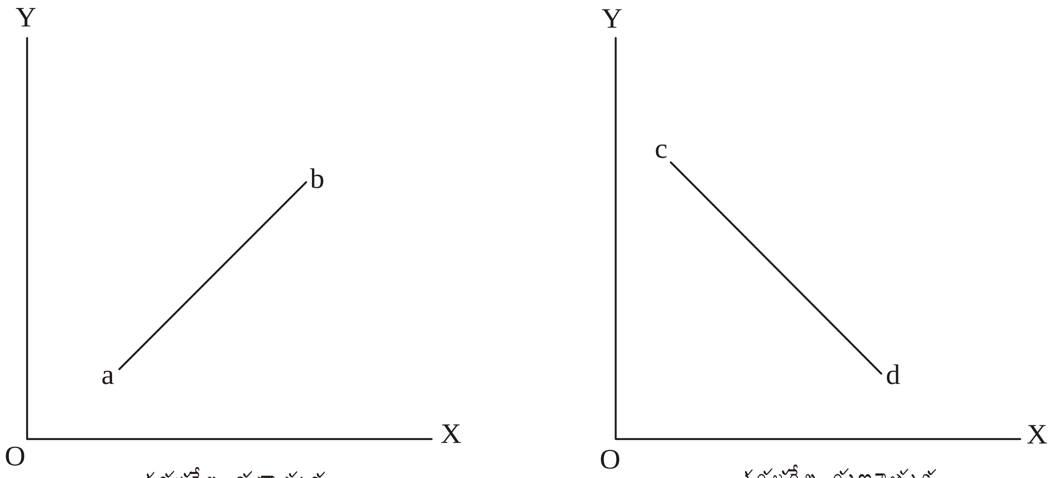
(a) గ్రాపులో x పెరుగుతుంటే y పెరుగుతుంది కాబట్టి ధనాత్మక సహసంబంధంగా గుర్తింపవచ్చు. (b) గ్రాపులో x, y విలువలకు విలోమ సంబంధము వున్నది. అందువలన దానిని రుణాత్మక సహసంబంధము అంటాము. అనగా x విలువ తగ్గుతుంటే y విలువ పెరుగుట x విలువ పెరుగుతుంటే y విలువ తగ్గుట వలన రుణాత్మక సంబంధము ఏర్పడుతుంది. (c) పటంలో x, y చలాంకాలకు సంబంధము లేకుండా వుంటుంది. దీనినే సహసంబంధ రాహిత్యము అంటాము. x, y అనే రెండు చలరాశులని భావించి క్రింది రేఖాపటాలు గీయటం జరిగింది.

9.4.2 సహసంబంధ రేఖాచిత్రము : రెండు చలాంకాల మధ్య సహసంబంధాన్ని రేఖాచిత్ర పటము ద్వారా గుర్తించవచ్చు. రెండు చలాంకాల మధ్య వున్న సంబంధాన్ని, అది ధనాత్మకమైనదా లేక రుణాత్మకమైనదా అనే విషయాన్ని రేఖాచిత్రం ద్వారా చూపించవచ్చు.

x, y అనేవి రెండు చలరాశులని భావించి కింది రేఖాపటాలు గీయటం జరిగింది.

రేఖాపటం - 4

పటం - ఎ పటం - బి



సరళరేఖ ధనాత్మక సహసంబంధం సరళరేఖ రుణాత్మక సహసంబంధం

X అక్షంపై x చలాంకపు విలువ, Y అక్షంపై చలాంక విలువ గ్రాఫు కాగితంపై గుర్తించాలి. పై గ్రాఫులో x విలువ పెరుగుతున్న కొలది y విలువ కూడా పెరుగుతూ రెండు చలాంకాల మధ్య ధనాత్మక సంబంధాన్ని రేఖాపటం 4లోని పటం - ఎ లోని ab రేఖ సూచిస్తుంది. రేఖ ఎడమ నుండి కుడికి పైకి పోవునప్పుడు x, y చలాంకాల మధ్య ధనాత్మక సంబంధం వుంటుంది. x విలువ పెరిగేటప్పుడు y చలాంకం విలువ తగ్గుతూ - x విలువ తగ్గేటప్పుడు y చలాంకపు విలువ పెరుగుతూ వుంటే x, y చలాంకాల మధ్య రుణాత్మక సంబంధం ఏర్పడుతుంది. పై రేఖాపటం - 4లోని పటం-బిలో వలే cd రేఖ ఎడమ నుండి కుడికి క్రిందికి వాలి వుంటుంది. డిమాండ్ రేఖ ఎడమ నుండి కుడికి క్రిందికి వాలి వుంటుంది. ధర, డిమాండ్‌లకు విలోమ సంబంధం సూచిస్తుంది.

9.4.3 కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము : వ్యాపన పటం ద్వారా, రేఖా చిత్రపటం ద్వారా సహసంబంధాన్ని చూపినప్పుడు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధ స్వభావాన్ని చెప్పగలుగుతాము. కాని ఆ రెండు చలాంకాల మధ్య సహసంబంధ పరిమాణాన్ని లేదా సహసంబంధ విలువను నిర్దిష్టంగా చెప్పలేము. రెండు చలాంకాల మధ్యయున్న సహసంబంధ పరిమాణాన్ని (శుద్ధ సంఖ్యలో) సహసంబంధ గుణకం ద్వారా తెలుసుకోవచ్చు. రెండు చలాంకాల మధ్య సహసంబంధ పరిమాణాన్ని తెలుసుకోవటానికి ప్రముఖ జీవశాస్త్రవేత్త, గణాంక శాస్త్రవేత్తలయిన కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని రూపొందించారు. ఈ గుణక విలువ ద్వారా సహసంబంధ పరిమాణాన్ని, సహసంబంధ స్వభావాన్ని తెలుసుకోవచ్చు.

కార్ల్ పియర్సన్ ప్రకారం "రెండు శ్రేణుల అంకమధ్యమాల నుండి వాటి వివిధ అంశాలకు విచలనాలను తీసి వాటి అనురూప లబ్ధాల సంకలనాన్ని, వాటి ప్రామాణిక విచలనాల లబ్ధాన్ని శ్రేణులలోని జతల సంఖ్యతో గుణిస్తే వచ్చిన మొత్తంతో భాగిస్తే రెండు చలనాల సహసంబంధ గుణకం వస్తుంది", అని నిర్వచనం చేసారు.

దీనిని సూత్ర రూపంగా,

$$r = \frac{\Sigma dx\ dy}{N \cdot \sigma_x\ \sigma_y}$$

r = సహసంబంధ గుణకము, $\Sigma dx\,dy$ = రెండు చలనాల అంకమధ్యమాల నుంచి తీసుకున్న విచలనాల లబ్ధాల మొత్తం

N = జతల సంఖ్య, σ_x = x శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం, σ_y = y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం,

$dx = (x - \bar{x})$ x శ్రేణిలో చలాంకాలకు x శ్రేణి అంకమధ్యమమునకు గల విచలనాలు.

$dy = (y - \bar{y})$ y శ్రేణిలో చలాంకాలకు y శ్రేణి అంకమధ్యమునకు గల విచలనాలు.

పై సూత్రము సహసంబంధ గుణకాన్ని వాడినప్పుడు రెండు శ్రేణుల ప్రామాణిక విచలనాన్ని విడివిడిగా కనుక్కోవాలి. రెండు శ్రేణులలో అంకమధ్యమము పూర్ణసంఖ్యలుగా వుండాలి. అంకమధ్యమము పూర్ణసంఖ్యలుగా ఉన్నప్పుడు పై సూత్రాన్ని క్రింద విధంగా మార్చి వాడవచ్చు.

$$r = \frac{\Sigma dx\, dy}{\sqrt{\Sigma\, dx^2 \times \Sigma\, dy^2}}$$

అంకమధ్యమాలు భిన్నాలలో వున్నప్పుడు, పూర్ణసంఖ్యలు కానప్పుడు, విచలనాలను ఊహించిన సగటును తీసుకోవడం సులభంగా వుంటుంది. ఊహించిన అంకమధ్యమం ప్రాతిపదికగా సహసంబంధ గుణకాన్ని గణన చేసేటప్పుడు ఈ క్రింది సూత్రాన్ని వాడాలి.

$$r = \frac{\Sigma Dx\ Dy - \frac{(\Sigma Dx)(\Sigma Dy)}{N}}{\sqrt{\Sigma Dx^2 - \frac{(\Sigma Dx)^2}{N}}\ \sqrt{\Sigma Dy^2 - \frac{(\Sigma Dy)^2}{N}}} \quad \text{or} \quad \frac{N \cdot \Sigma Dx\ Dy - \Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{\sqrt{N \cdot \Sigma Dx^2 - (\Sigma Dx)^2 \cdot N\Sigma Dy^2 - (\Sigma Dy)^2}}$$

$\Sigma Dx\, Dy$ = $x\,y$ చలరాశులను వాటి ఊహించిన అంకమధ్యమాల నుంచి తీసుకున్న విచలనాల లబ్ధాల మొత్తము

$Dx = x - A,\ Dy = y - A$

ΣDx = x చలరాశుల ఊహించిన అంకమధ్యమం నుండి x చలరాశుల విచలనాల మొత్తం.

ΣDy = y చలరాశుల ఊహించిన అంకమధ్యమం నుండి y చలరాశుల విచలనాల మొత్తం.

ΣDx^2 = x చలరాశుల ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి x చలరాశుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

ΣDy^2 = y చలరాశుల ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి y చలరాశుల విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

N = జతల సంఖ్య

ఉదాహరణ - 1 : ఈ క్రింది సమాచారమునకు సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x	9	8	7	6	5	4	3	2	1
y	15	16	14	13	11	12	10	8	9

సమాధానము : ప్రత్యక్ష పద్ధతిలో (అంకమధ్యమం ప్రాతిపదికగా) గణించటం జరిగింది.

జతల సంఖ్య	x	dx	dx^2	y	dy	dy^2	dx dy
1	9	4	16	15	3	9	12

2	8	3	9	16	4	16	12
3	7	2	4	14	2	4	1
4	6	1	1	13	1	1	1
5	5	0	0	11	-1	1	0
6	4	-1	1	12	0	0	0
7	3	-2	4	10	-2	4	4
8	2	-3	9	8	-4	16	12
9	1	-4	16	9	-3	9	12

$N = 9$ $\Sigma x = 45$ $\Sigma dx = 0$ $\Sigma dx^2 = 60$ $\Sigma y = 108$ $\Sigma dy = 0$ $\Sigma dy^2 = 60$ $\Sigma dxdy = 57$

అంకమధ్యమము ప్రాతిపదికగా సహసంబంధ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి గణన చేయడం జరిగింది.

$$r = \frac{\Sigma dx\, dy}{N \cdot \sigma_x\, \sigma_y}$$

మొదట x, y శ్రేణుల అంకమధ్యమాలను, ప్రామాణిక విచలనాలను గణన చేసి తరువాత పై సూత్రాన్ని ఉపయోగించి గణన చేయడం జరిగింది.

X విభాజన అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{45}{9} = 5$

Y విభాజన అంకమధ్యమం $(\bar{y}) = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{108}{9} = 12$

x విభాజన ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma_x) = \sqrt{\frac{\Sigma dx^2}{N}} = \sqrt{\frac{60}{9}} = \sqrt{6.67} = 2.58$

y విభాజన ప్రామాణిక విచలనం $(\sigma_y) = \sqrt{\frac{\Sigma dy^2}{N}} = \sqrt{\frac{60}{9}} = \sqrt{6.67} = 2.58$

$N = 9$

$$r = \frac{\Sigma dx\, dy}{N \sigma_x \cdot \sigma_y} = \frac{57}{9(2.58)\,(2.58)}$$

$$r = \frac{57}{59.91} = +0.951$$

$\sigma_x =$ x శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

$\Sigma dx^2 =$ x శ్రేణిలో అంశాలకు, అంకమధ్యమమునకు మధ్య విచలనాలకు వర్గాల మొత్తం.

$\sigma_y =$ y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనం

$\Sigma dy^2 =$ y శ్రేణిలో అంశాలకు, అంకమధ్యమమునకు మధ్య విచలనాల వర్గాల మొత్తం

$N =$ జతల సంఖ్య

పై లెక్కనే - అంకమధ్యమము పూర్ణసంఖ్య అయినప్పుడు - ఈ క్రింది సూత్రం ద్వారా సహసంబంధాన్ని లెక్కించవచ్చు.

$$r = \frac{\Sigma dx\, dy}{\sqrt{\Sigma dx^2\, \Sigma dy^2}} = \frac{57}{\sqrt{60 \times 60}}$$

$$r = \frac{57}{60} = 0.95$$

సహసంబంధము - దగ్గర పద్ధతి : అంకమధ్యమాలు పూర్ణ సంఖ్యలు కానప్పుడు వాటి నుంచి వర్గాలు లెక్కించడం కష్టం. అప్పుడు రెండు శ్రేణులలో ఊహించిన సగటు నుండి విచలనాలు తీసుకుని ఈ క్రింది సూత్రమును ఉపయోగించి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనవచ్చు.

$$r = \frac{\Sigma Dx\, Dy - \frac{\Sigma Dx\, \Sigma Dy}{N}}{\sqrt{\Sigma Dx^2 - \frac{(\Sigma Dx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Dy^2 - \frac{(\Sigma Dy)^2}{N}}} \text{ or } \frac{N \cdot \Sigma\, Dx\, Dy - \Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{\sqrt{N \cdot \Sigma Dx^2 - (\Sigma Dx)^2 \cdot N\Sigma Dy^2 - (\Sigma Dy)^2}}$$

ఉదాహరణ - 2 : కింది సమాచారానికి సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుక్కోండి.

ఉష్ణోగ్రత	57	42	40	38	42	45	42	44	40	46	44	43
బీజోత్పత్తి కాలం	10	26	30	41	29	27	27	19	18	19	31	29

సమాధానం :

Sl.No. జతల సంఖ్య	X	$Dx(x-A)$ $(x-44)$	Dx^2	y	$Dy(y-A)$ $y-26$	Dy^2	DxDy
1	57	13	169	10	-16	256	-208
2	42	-2	4	26	0	0	0

3	40	-4	16	30	+4	16	-16
4	38	-6	36	41	+15	225	- 90
5	42	-2	4	29	+3	9	-6
6	45	+1	1	27	+1	1	+1
7	42	-2	4	27	+1	1	-2
8	44	0	0	19	-7	49	0
9	40	-4	16	18	-8	64	+32
10	46	+2	4	19	-7	49	-14
11	44	0	0	31	+5	25	0
12	43	-1	1	29	+3	9	-13

$N = 12$ $\Sigma Dx = -5$ $\Sigma Dx^2 = 225$ $\Sigma Dy = -6$ $\Sigma Dy = -6$ $\Sigma Dy^2 = 704$ $\Sigma Dx\,Dy = 306$

$$r = \frac{\Sigma Dx\,Dy - \frac{\Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{N}}{\sqrt{\Sigma Dx^2 - \frac{(\Sigma Dx)^2}{N}}\sqrt{\Sigma Dy^2 - \frac{(\Sigma Dy)^2}{N}}}$$

$$= \frac{-306 - \frac{(-5)(-6)}{12}}{\sqrt{255 - \frac{(-5)^2}{12}}\sqrt{704 - \frac{(-6)^2}{12}}} = \frac{-306 - 2.5}{\sqrt{255-2.1}\,\sqrt{704-3}} = \frac{-308.5}{\sqrt{252.9}\,\sqrt{701}}$$

సంవర్గమానాలు తీసుకుని

$$= -\left[\log 308.5 - \frac{1}{2}(\log 252.9 + \log 701)\right]$$

$$= -AL\left[2.4893 - \frac{1}{2}(2.4029 + 2.8457)\right]$$

$$= -AL\left[2.4893 - \frac{1}{2}(5.2486)\right]$$

$$= -AL[2.4893 - 2.6243] = -AL(-1350)$$

$$= -AL\left[\bar{1}.8650\right]$$

$$r = -\left[AL\,\bar{1}.8650\right]$$

$$r = -0.733$$

మరో విధంగా

$$r = \frac{N \cdot \Sigma Dx\,Dy - \Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{N \cdot \Sigma Dx^2 - (\Sigma Dx)^2 \cdot N\Sigma Dy^2 - (\Sigma Dy)^2}$$

$$= \frac{12 \times 306 - (-5)(-6)}{\sqrt{12 \times 255 - (-5)^2 \cdot 12 \times 704 - (-6)^2}}$$

$$r = -0.733$$

ఉదాహరణ 3 : ఒక కుటుంబం యొక్క 7 నెలల ఆదాయ వ్యయాలకు సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

నెల	జనవరి	ఫిబ్రవరి	మార్చి	ఏప్రియల్	మే	జూన్	జూలై
ఆదాయం	46	54	56	56	58	60	62
వ్యయం	36	40	44	54	42	58	54

సమాధానము : x విభాజనంలో 56ను, y లో 45ను ఊహించిన అంకమధ్యమంగా భావించటం జరిగింది.

నెలలు	x	$Dx(x-A)$ $(x-56)$	Dx^2	y	$Dy(y-A)$ $(y-45)$	Dy^2	$Dx\,Dy$
జనవరి	46	-10	100	36	-9	81	+90
ఫిబ్రవరి	54	-2	4	40	-5	25	+10
మార్చి	56	0	0	44	-1	1	0
ఏప్రిల్	56	0	0	54	+9	81	0
మే	58	+2	4	42	-3	9	-6
జూన్	60	+4	16	58	+13	169	+52
జూలై	62	+6	36	54	+9	81	+54
$N = 7$		ΣDx =0	ΣDx^2 =160		ΣDy =+13	ΣDy^2 =447	$\Sigma Dx\,Dy$ =+200

$$r = \frac{\Sigma Dx\,Dy - \frac{(\Sigma Dx \times \Sigma Dy)}{N}}{\sqrt{\Sigma Dx^2 - \frac{(\Sigma Dx)^2}{N}}\ \sqrt{\Sigma Dy^2 - \frac{(\Sigma Dy)^2}{N}}}$$

$\Sigma Dx\,Dy = 200$, $\Sigma Dx = 0$ $\Sigma Dy = 13$, $\Sigma Dx^2 = 160$

$\Sigma dy^2 = 447,\ N = 7$

$$\therefore r = \frac{200 - \frac{(0)(13)}{7}}{\sqrt{160 - \frac{(0)^2}{7}}\ \sqrt{447 - \frac{(13)^2}{7}}}$$

$$r = \frac{200}{\sqrt{160}\ \sqrt{422.86}}$$

$$r = \frac{200}{\sqrt{67656.6}} = \frac{200}{260.1} = +0.769$$

ఉదాహరణ **4 :** కింది సమాచారంలో ఉత్పత్తి చేసిన వస్తువుల సంఖ్య మరియు లోపాలున్న వస్తు సంఖ్యను ఇవ్వడం జరిగింది. తరగతి సైజుకు, లోపాలున్న వస్తు సంఖ్యకు సహసంబంధ గుణకం కనుక్కోండి.

తరగతి సైజు	15-16	16-17	17-18	18-19	19-20	20-21
వస్తు సంఖ్య	200	270	340	360	400	300
లోపాలున్న వస్తు సంఖ్య	150	162	170	180	180	114

సమాధానం : తరగతి సైజుల మధ్య విలువలను x గాను, లోపాలున్న వస్తు శాతాలను y గాను పరిగణించడం జరిగింది.

సహసంబంధ గుణక గణన

తరగతి పరిమాణం	మధ్య విలువ x	$(x-17.5)$ Dx	Dx^2	లోపాలున్న వస్తు శాతాలు(y)	Dy	Dy^2	Dx Dy
15-16	15.5	-2	4	75	+25	625	-50
16-17	16.5	-1	1	60	+10	100	-10
17-18	17.5	0	0	50	0	0	0
18-19	18.5	+1	1	50	0	0	0
19-20	19.5	+2	4	45	-5	25	-10
20-21	20.5	+3	9	38	-12	144	-36
		$\Sigma Dx = 3$	$\Sigma Dx^2 = 19$		$\Sigma Dy = 18$	$\Sigma Dy^2 = 894$	$\Sigma DxDy$ =-106

$$r = \frac{N \cdot \Sigma Dx\,Dy - \Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{\sqrt{N\Sigma D^2x - (\Sigma Dx)^2} \cdot \sqrt{N\Sigma D^2y - (\Sigma Dy)^2}} = \frac{6 \times -106 - 3 \times 18}{\sqrt{6 \times 19 - (3)^2}\ \sqrt{6 \times 894 - (18)^2}}$$

$$r = \frac{-636 - 54}{\sqrt{105}\ \sqrt{5040}} = \frac{-690}{727.46} = -0.949$$

9.4.3.1 సహసంబంధ గుణకానికి అవధులు : సహసంబంధ గుణకం విలువ ఎప్పుడూ అనే రెండు అవధుల మధ్య అంటే -1 నుంచి +1 మధ్య వుంటుంది.

అతి కనిష్ట విలువ -1, అతి గరిష్ట విలువ +1గా వుంటుంది. x, y చలాంకాలకు ఒకే దిశలో ఒకే నిష్పత్తిలో మారుతూ వుంటే, సహసంబంధ గుణకం +1గా వుండవచ్చు. x, y చలాంకాలు వ్యతిరేక దిశలో స్థిరమైన నిష్పత్తిలో మారుతూ వుంటే సహసంబంధ గుణకము -1గా వుంటుంది. రెండు చలాంకాల మధ్య సంబంధం '0' అయితే రెండు చలాంకాల మధ్య సంబంధం లేదు అని చెప్పాలి.

వివిధ రకాలైన సహసంబంధాలు

సహసంబంధం	ధనాత్మక	రుణాత్మక
సంపూర్ణ సహసంబంధం	+1	-1
చాలా ఎక్కువ డిగ్రీ	+0.9 ఆ పైన నుంచి	-0.9 ఆ పైన
ఎక్కువ డిగ్రీ	+0.75 నుంచి +0.9	-0.75 నుంచి -0.9
మోడరేట్ డిగ్రీ	+0.50 నుంచి +0.75	-0.5 నుంచి - 0.75
తక్కువ డిగ్రీ	+0.25 నుంచి +0.50	-0.25 నుంచి -0.50
అతి తక్కువ డిగ్రీ	+0.25	-0.25
సహసంబంధ రాహిత్యం	0	0

9.4.3.2 సహసంబంధ గుణకం - ప్రమేయాలు : కార్ల్ పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకం ఈ క్రింది ప్రమేయాలపై ఆధారపడి వుంది.

(1) సహసంబంధాన్ని పరిశీలించే రెండు శ్రేణులు సామాన్య విభాజనాన్ని రూపొందించే స్వతంత్ర కారణాల వల్ల ప్రభావితం చెందాలి. ఉదాహరణకు విద్యార్థుల ఎత్తులు, బరువులు, భార్య, భర్తల వయస్సులు - మొదలగు వాటికి సంబంధించిన శ్రేణులలో తమ ప్రభావాన్ని కనపరుస్తూ వుంటాయి.

(2) శ్రేణులను ప్రభావితం చేసే శక్తుల మధ్య కార్యకారణ సంబంధం వుండాలి.

(3) చలరాశుల మధ్య లీనియర్ లేదా సరళరేఖాత్మక సహసంబంధం ఉంటుంది.

9.4.3.3 సంభావ్య దోషము - సహసంబంధ గుణకము (Probable Error of Coefficient of Correlation) : ప్రతిచయన ప్రాతిపదికగా గణించిన సహసంబంధ గుణక విలువను బట్టి అసలు దత్తాంశ విలువ ఏ విధంగా ఉంటుందో అంచనా వేయటానికి సంభావ్యతా దోషం ఉపకరిస్తుంది. సహసంబంధ గుణక సంభావ్యదోషం వల్ల మనము గణన చేసిన సహసంబంధ గుణకం మీద ఎంతవరకు ఆధారపడవచ్చు అనేది తెలుసుకోవచ్చు.

కారల్‌పియర్‌సన్ సహసంబంధ గుణక సంభావ్య దోషము (Probable Error)ను కింది సూత్రం ద్వారా కనుగొంటాము.

$$P.E. = \frac{0.6745\left(1-r^2\right)}{\sqrt{N}}$$

ఇక్కడ r = సహసంబంధ గుణకము, N = జతల సంఖ్య

సహసంబంధ గుణకము విలువ ఏ అవధుల మధ్య మారుతూ ఉంటుందో తెలుసుకోవడానికి ఈ సంభావ్య దోషాన్ని కలపడం లేదా తీసివేయడం చేయవలె. అంటే సహసంబంధ గుణకం విలువ $\pm$ సంభావ్యదోషము మనకు సహసంబంధ గుణకము అవధులను తెలుపుతాయి.

సహసంబంధ గుణకం(r), సంభావ్యత దోషం కనుగొన్న తరువాత వాటిపై ఆధారపడి

1. సహసంబంధ గుణకం(r) విలువ సంభావ్యతా దోషం కన్నా తక్కువగా వుంటే r విలువ Significant కాదు.
2. r విలువ PE కి ఆరు రెట్ల కన్నా ఎక్కువగా వుంటే r విలువ significant గా చెప్పవచ్చు.
3. $r \pm PE$ విలువలు అసలు దత్తాంశం ద్వారా గణన చేస్తే వచ్చే సహసంబంధ గుణకం ఉండే అవధులను తెలుపుతాయి.

ప్రతిచయనాలను అధ్యయం చేసేటప్పుడు సంభావ్యదోషం ప్రాముఖ్యము ఎక్కువ. మనం తీసుకునే యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన (Random Sampling) స్థితి మీద ఆధారపడి వుంటుంది. ఉదాహరణకు ఒక కాలేజీలో 100 మంది విద్యార్థులున్నారు అనుకొందాము. వారి బరువు, ఎత్తుల మధ్య సహసంబంధాన్ని తెలుసుకోవలెనంటే మొత్తం 100 మంది విద్యార్థులను తీసుకొని సహసంబంధ గుణకాన్ని గణన చేయవచ్చు లేదా 100 మంది నుంచి 10 మంది విద్యార్థులను యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయనం ద్వారా తీసుకొని 'r' విలువను కనుక్కోవచ్చు. అయితే రెండో పద్ధతిలో చాలా సౌలభ్యమున్నదని వేరే చెప్పనవసరం లేదు. కాని మొత్తం చలనాలనన్నిటిని తీసుకొని గణన చేసిన సహసంబంధ గుణకానికి యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపగ్రహణ ద్వారా కనుక్కోన్న సహసంబంధ గుణకానికి తేడా ఎంతో తెలుసుకోగలిగితే రెండో పద్ధతిని మనము ఉపయోగించుకోవచ్చు. సంభావ్యదోషము సహసంబంధ గుణకపు విలువ అవధులు చెబుతుంది. అంటే మొత్తం సమూహం అంతా తీసుకుంటే సహసంబంధ గుణకము (r) విలువ ఎట్లా ఉంటుందో లేదా సమూహం నుంచి యాదృచ్ఛిక ప్రతిరూపాలను తీసుకొంటే సహసంబంధ గుణకము(r) ఎట్లా ఉంటుందో చెప్పగలదు.

సంభావ్యదోషము సహసంబంధ గుణకానికి కలిపితే మనకు ఎగువ అవధి, దానిని తీసివేస్తే దిగువ అవధి వస్తాయి. ఈ రెండు అవధుల మధ్య మన విలువ చలించే అవకాశం ఉన్నది. ఉదాహరణకు భార్యల ఎత్తు, భర్తల ఎత్తుకు మధ్య వున్న సహసంబంధము **+0.94** అనుకొంటే, దీని అవధులు **+0.94** . $\pm$P.E. (P.E. అంటే సంభావ్యదోషానికి సాంకేతికము) అవుతాయి.

ఉదాహరణ 5 : ఒక స్కూలు పరీక్షా ఫలితాలు కింద ఇచ్చినారు. వాటి నుంచి సహసంబంధ గుణకాన్ని, దాని సంభావ్యదోషాన్ని కనుక్కోండి.

విద్యార్థుల వయస్సు	కృతార్థులు కాని వారి శాతం
13	39
14	40
15	43
16	34
17	36
18	39
19	48
20	47
21	54

జతల సంఖ్య Sl.No.	విద్యార్థుల వయస్సు x	ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలు Dx	విచలనాల వర్గాలు Dx^2	కృతార్థులు కానివారి y	ఊహించిన అంకమధ్యమం నుంచి విచలనాలు Dy	విచలనాల వర్గాలు Dy^2	లబ్దాలు $Dx \cdot Dy$
1	13	-4	16	39	0	0	0
2	14	-3	9	40	+1	1	-3
3	15	-2	4	43	+4	16	-8
4	16	-1	1	34	-5	25	+5
5	17	0	0	36	-3	9	0
6	18	+1	1	39	0	0	0
7	19	+2	4	48	+9	81	+18
8	20	+3	9	47	+8	64	+24
9	21	+4	16	54	+15	225	+60
$N=19$		$\left.\begin{matrix}+10\\-10\end{matrix}\right\}\Sigma Dx=0$	$\Sigma Dx^2=60$		$\left.\begin{matrix}+37\\-8\end{matrix}\right\}=29\Sigma Dy$	$\Sigma Dy^2=421$	$\left.\begin{matrix}+107\\-11\end{matrix}\right\}96$ $\Sigma Dx \cdot \Sigma Dy$

సంభావ్య దోషము-సహసంబంధ గుణకము $r = \dfrac{N \cdot \Sigma Dx \cdot Dy - \Sigma Dx \cdot \Sigma Dy}{\sqrt{N \cdot \Sigma Dx^2 - (\Sigma Dx)^2 \cdot N \cdot \Sigma Dy^2 - (\Sigma Dy)^2}}$

$N = 9,\ \Sigma Dx = 0,\ \Sigma Dy = 29,\ \Sigma Dx = 60,\ \Sigma Dy^2 = 421,\ \Sigma Dx \cdot Dy = 96$ ఈ విలువలను పై సూత్రంలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$r = \frac{9 \times 96 - 0 \times 29}{\sqrt{9 \times 60 - (0)^2 \cdot 9 \times 421 - (29)^2}}$$

$$= +0.6836$$

$\therefore$ సహసంబంధ గుణకము $= +0.6836$

సహసంబంధ గుణక సంభావ్య దోషము $(P.E) = \pm \dfrac{0.6745(1 - r^2)}{\sqrt{N}}$

ఇక్కడ $r = 0.684,\ N = 9$

కాబట్టి $P.E. = \pm 0.6745 \dfrac{\{1 - (0.684)^2\}}{\sqrt{9}}$

$$= \pm \frac{0.6745(1 - 0.469225)}{3}$$

$$= \pm \frac{0.6745 \times 0.5308}{3} = \pm 0.1193$$

$\therefore$ సంభావ్య దోషము $P.E. = \pm\ 0.119$

x, y చలరాశులు ప్రతిచయనాలైతే అసలు దత్తాంశం ద్వారా వచ్చు r విలువ $r - PE$ నుంచి $r + PE$ మధ్య అనగా **0.684 - 0.119** నుంచి **0.684 + 0.119** మధ్య ఉంటుంది. అంటే **0.565** నుంచి **0.803** మధ్య ఉంటుంది.

10.4.4 స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకం : మానవ జీవితంలో అన్ని అంశాలను సంఖ్యారూపంలో చెప్పలేము. ముఖ్యముగా గుణాత్మక విషయాలలో ఈ సమస్య ఏర్పడుతుంది. అనగా అందచందాలు, తెలివితేటలు, నీతి నిజాయితీలు మొదలగు గుణాత్మక అంశాలను అధ్యయనం చేయడానికి స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణక పద్ధతి కనుగొన్నాడు.

ఏ అంశాన్ని అయినా దాని లక్షణాన్ని అంకెలలో తెలపలేకపోతే వాటికి ర్యాంకులు (కోటీలు) ఇవ్వవచ్చు. గరిష్ట విలువకు మొదటి ర్యాంకు తరువాత గరిష్ట విలువ రెండవ ర్యాంకు, కనిష్ట విలువకు చివరి ర్యాంకు ఇవ్వాలి. మొదట శ్రేణిలో విలువలకు ఈ విధంగా ఇచ్చిన ర్యాంకులను R_1గా సూచిస్తాము. రెండవ శ్రేణిలో ఇచ్చిన ర్యాంకులను R_2గా సూచిస్తారు. ప్రతి జతలో R_1కు R_2కు మధ్య తేడాను $(R_1 - R_2)$ను Dతో సూచిస్తాము. ఒక్కొక్క దానికి వర్గం (D^2) కనుక్కోవాలి. ఆ తరువాత ఈ క్రింది సూత్రంను ఉపయోగించి కోటి సహసంబంధం గణన చేయటం జరుగుతుంది.

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} \quad \text{or} \quad 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N^3 - N}$$

$r_s =$ స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకం

$\Sigma(R_1 - R_2)^2 = \Sigma D^2 =$ మొదట విభాజన కోటీలకు, రెండో విభాజన కోటీలకు మధ్య తేడాల వర్గాల మొత్తం

$N =$ రెండు శ్రేణులలోని జతల సంఖ్య

ఉదాహరణ 6 : ఈ క్రింది అంశములకు కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

x :	415	434	420	430	424	428
y :	330	332	328	331	327	325

వివరణ :

x	R_1	y	R_2	$(R_1 - R_2) = D$	D^2
415	6	330	3	3	9
434	1	332	1	0	0
420	5	328	4	1	1
430	2	331	2	0	0
424	4	327	5	-1	1
428	3	325	6	-3	9
					$\Sigma D^2 = 20$

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N\left(N^2 - 1\right)}$$

$$= 1 - \frac{6(20)}{6\left(6^2 - 1\right)} = 1 - \frac{120}{210}$$

$$= \frac{210 - 120}{210} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$$

$$r_S = 0.429$$

కొన్ని సందర్భాలలో ర్యాంకులు ఇవ్వగా కోటి సహసంబంధ గుణకం చేయాల్సి వస్తుంది.

ఉదాహరణ - 7 : పది మంది విద్యార్థులకు A, B అధ్యాపకులు ఇచ్చిన కోటీలకు కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

A అధ్యాపకుడు ఇచ్చిన ర్యాంకులు :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
B అధ్యాపకుడు ఇచ్చిన ర్యాంకులు :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9

సమాధానం :

R_1	R_2	$D(R_1 - R_2)$	D^2
1	3	-2	4
6	5	1	1
5	8	-3	9
10	4	6	36
3	7	-4	16
2	10	-8	64
4	2	2	4
9	1	8	64
7	6	1	1
8	9	1	1
			$D^2 = 200$

$$r_S = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N\left(N^2 - 1\right)} = 1 - \frac{6 \times 200}{10 \times 99} = \frac{7}{33} = -0.212$$

కొన్ని సందర్భాలలో మూడు శ్రేణులు గాను అంతకన్నా ఎక్కువ శ్రేణుల మధ్య కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనవలసి వస్తుంది.

ఉదాహరణ 8 : ఒక అందాల పోటీలో పది మంది పాల్గొనగా వారిని ముగ్గురు జడ్జీలు ఈ క్రింది విధమైన ర్యాంకులు ఇచ్చారు. కోటి సహసంబంధ గుణకం ఉపయోగించి ఏ ఇరువురు జడ్జీలు మధ్య ఎక్కువ సామీప్యత ఉన్నదో కనుగొనుము.

మొదటి జడ్జీ	1,	5,	4,	8,	9,	6,	10,	7,	3,	2,
రెండవ జడ్జీ	4,	8,	7,	6,	5,	9,	10,	3,	2,	1
మూడవ జడ్జీ	6,	7,	8,	1,	5,	10,	9,	2,	3,	4

సమాధానం :

మొదట జడ్జి ఇచ్చిన కోటీలు (R_1)	రెండవ జడ్జి ఇచ్చిన కోటీలు (R_2)	మూడవ జడ్జి ఇచ్చిన కోటీలు (R_3)	$(R_1-R_2)^2$ (D^2)	$(R_2-R_3)^2$ (D^2)	$(R_1-R_3)^2$ (D^2)
1	4	6	9	4	25
5	8	7	9	1	4
4	7	8	9	1	16
8	6	1	4	25	49
9	5	5	16	0	16
6	9	10	9	1	16
10	10	9	0	1	1
7	3	2	16	1	25
3	2	3	1	1	0
2	1	4	1	9	4
$N=10$			$\Sigma D^2=74$	$\Sigma D^2=44$	$\Sigma D^2=156$

మొదటి, రెండవ జడ్జీల మధ్య కోటి సహసంబంధ గుణకం

$$r_S=1-\frac{6\Sigma D^2}{N^3-N}$$

$$\Sigma D^2\ \Sigma(R_1-R_2)^2=74,\ \ N=10$$

$$\therefore r_S=1-\frac{6\times 74}{10^3-10}$$

$$=1-\frac{444}{990}$$

r_S (ఒకటవ, రెండవ, మూడవ జడ్జీల మధ్య కోటి సహసంబంధ గుణకం) $=1-0.448=+0.552$

రెండవ, మూడవ జడ్జీల మధ్య కోటి సహసంబంధ గుణకం

$$\Sigma D^2 = \Sigma(R_2 - R_3)^2 = 44, \quad N = 10$$

$$r_S = 1 - \frac{6 \times 44}{990}$$

$$= 1 - \frac{264}{990}$$

(2వ, 3వ జడ్జీలు)

$$r_S = 1 - 0267 = +0.733$$

మొదటి, మూడో జడ్జీల మధ్య కోటి సహసంబంధ గుణకం

$$\Sigma D^2 = \Sigma(R_1 - R_3)^2 = 156, \quad N = 10$$

$$r_S = 1 - \frac{6 \times 156}{990}$$

$$= 1 - \frac{936}{990}$$

$r_S =$ (1వ, 3వ జడ్జీలు) $= 1 - 0.945 = +0.055$

పై మూడు కోటి సహసంబంధ గుణకాల్లో 2వ, 3వ జడ్జీల మధ్య సహసంబంధ గుణకం ధనాత్మకంగా ఎక్కువ విలువను కలిగి వుంది కావున 2, 3 జడ్జీల మధ్య సామీప్యత ఎక్కువగా వుందని చెప్పవచ్చు.

సమాన రాంకులు : ఒకే విభాజనంలో కొన్ని సందర్భాల్లో రెండు లేదా అంతకుమించిన అంశాలు సమానంగా ఉండవచ్చు. అలాంటప్పుడు ఆ అంశాలన్నింటికి సంబంధించిన సగటు ర్యాంకు ప్రతి అంశానికి ఇవ్వడం జరుగుతుంది. ఉదాహరణకు 5 ర్యాంకు స్థానంలో రెండు అంశాలుంటే ఒక దానికి 5వ రాంకు, రెండోదానికి 6వ రాంకుగా తీసుకుని $\frac{5+6}{2} = 5.5$ రాంకును వాటికి ఇవ్వడం జరుగుతుంది. ఒకవేళ 5వ రాంకు స్థానంలో 3 అంశాలుంటే $\frac{5+6+7}{3} = 6$ను ఆ మూడింటికి ఇవ్వడం జరుగుతుంది. ఈ విధంగా ఉన్న విభాజనాలైతే సూత్రంలో సర్దుబాటు అవసరమవుతుంది. ఉపయోగించే సూత్రం సర్దుబాటుతో కూడినదిగా ఉంటుంది. ఇలాంటి సందర్భంలో కింది సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

$$r_S = 1 - \frac{6\left\{\Sigma D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_1^3 - m_2\right) + \cdots\cdots\right\}}{N^3 - N}$$

$r_S =$ కోటి సహసంబంధ గుణకం లేదా స్పియర్‌మన్ సహసంబంధ గుణకం, $\Sigma D^2 = \Sigma(R_1 - R_2)^2 =$ మొదటి విభాజన కోటీలకు, రెండో విభాజన కోటీలకు గల వ్యత్యాసాల వర్గాల మొత్తం. $N =$ జతల సంఖ్య, $m =$ సమానంగా రాంకులున్న అంశాలు.

ఉదాహరణ 9 : కింది సమాచారానికి కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

x	80	78	75	75	68	67	60	59
y	12	13	14	14	14	16	15	17

సమాధానం : కోటీ సహసంబంధం కనుగొనేందుకు ముందుగా x, y విలువలకు కోటీలను ఇవ్వాలి.

x	x విచలన రాంకులు	y	y విచలన రాంకులు	$(R_1 - R_2)^2$ D^2
80	8	12	1	49.00
78	7	13	2	25.00
75	5.5	14	4	2.25
75	5.5	14	4	2.25
68	4	14	4	0
67	3	16	7	16.00
60	2	15	6	16.00
59	1	17	8	49.00
				$\Sigma D^2 = 159.5$

తరువాత ఈ క్రింది సూత్రం ఉపయోగించాలి.

$$r_S = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{1}{12}\left(m_1{}^3 - m_1\right) + \frac{1}{12}\left(m_2{}^2 - m_2\right)\right]}{N^3 - N}$$

$r_S =$ కోటి సహసంబంధ గుణకం, $N =$ జతల సంఖ్య, $\Sigma D^2 =$ మొదటి విభాజన కోటీలకు (R_1), రెండో విభాజన కోటీలకు (R_2) గల వ్యత్యాసాల మొత్తం 159.5, $m_1 = 2$ (75 అనే అంశం రెండుసార్లు వచ్చింది కావున) $m_2 = 3$ (14 అనే అంశం మూడుసార్లు వచ్చింది).

$$r_s = 1 - \frac{6\left[159.5 + \frac{1}{12}\left(2^3 - 2\right) + \frac{1}{12}\left(3^3 - 3\right)\right]}{8^3 - 8}$$

$$= 1 - \frac{6[159.5 + 0.5 + 2]}{504}$$

$$r_S = 1 - \frac{972}{504} = 1 - 1.929 = -0.929$$

కోటి సహసంబంధ పద్ధతిలో సుగుణాలు

1. పియర్‌సన్ పద్ధతిలో పోల్చితే ఈ పద్ధతి ద్వారా గణన సులువు. అర్థం చేసుకోవటం సులువు. సమాన విలువలు లేని లేదా విలువలు పునరావృతం కాని విభాజనాలైతే SK_P మరియు r_S విలువలు సమానంగా ఉంటాయి.
2. గుణాత్మక అంశాలు అంటే అందచందాలు, మంచితనము, సామర్థ్యం, తెలివితేటలు మొదలైన వాటి గణనకు ఇది ఉత్తమమైనది.
3. రాంకులు మాత్రమే లభ్యమై, అసలు విలువలు లభ్యం కాని పరిస్థితుల్లో ఉపయోగించగల ఒకే పద్ధతి ఈ పద్ధతి.
4. అసలు విలువలున్నా కూడా ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చు.

పరిమితులు

1. పౌనఃపున్య విభాజనం లేదా తరగతులుగా వర్గీకరించిన విభాజనాలలో ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించడం సాధ్యం కాదు.
2. జతల సంఖ్య 30కి మించినట్లయితే రాంక్ సహసంబంధ గణన క్లిష్టతతో కూడుకొని వుంటుంది.

9.4.5 సారూప్య విచలనాల గుణకం : ఈ పద్ధతిలో విచలనాల పరిమాణాన్ని విస్మరించి వాటి మార్పు దిశలను (+) లేక (-)లుగా తీసుకుంటారు. ముందున్న అంశము నుండి (+) లేక (-)గా తీసుకుంటారు. ముందు అంశముకంటే తరువాత అంశము ఎక్కువగా ఉంటే ఆ అంశమునకు (+) గుర్తు కేటాయిస్తాం. ముందు అంశం కంటే తరువాత అంశం తక్కువగా (-) గుర్తు కేటాయిస్తాం. రెండు విలువలు సమానంగా వుంటే ఆ అంశం ఎదురుగుండా (=)ను కేటాయిస్తాం. ఈ విధంగా x విభాజనానికి వచ్చిన గుర్తులను Dx గా, y విభాజన గుర్తులను Dy గా సూచించి వాటిని ఒక దానితో ఒకటి హెచ్చవేసి $D_X \cdot D_y$ గుర్తులను రాయాలి. ఒకే గుర్తులు గల అంశాలను లెక్కిస్తే వీటిని సారూప్య విచలనాలు (c) లేదా ధనాత్మక గుర్తుల సంఖ్యలు అంటారు. ఈ విధంగా చేసిన తరువాత

$$r_C = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

c = ధనాత్మక గుర్తుల సంఖ్య

n = విచలనాల జతల సంఖ్య

ఉదాహరణ 10 : సారూప్య విచలనాల పద్ధతిని ఉపయోగించి సారూప్య గుణకాన్ని కనుగొనుము.

సంవత్సరం	సప్లై	ధర
1954	150	200
1955	154	180
1956	160	170
1957	172	160
1958	160	190
1959	165	180
1960	180	172

సమాధానం :

సప్లై	D_x	ధర	D_y	$D_x D_y$
150		200		
154	+	180	-	-
160	+	170	-	-
172	+	160	-	-
160	-	190	+	-
165	+	180	-	-
180	+	172	-	-

$n = 6$ $c = 0$

$$r_c = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

$c = 0,\ n = 6$

$$r_c = \pm\sqrt{\frac{2\times 0-6}{6}} = -1$$

9.5 సహసంబంధం వలన ప్రయోజనాలు

సహసంబంధ విశ్లేషణ భౌతికశాస్త్రం, వ్యాపార శాస్త్రం, ఆర్థిక శాస్త్రంలో విస్తృతంగా వుంది. కాని మనం ఆర్థిక వ్యాపార రంగాలకు దీనిని పరిమితం చేస్తూ దీని ప్రయోజనాలను తెలుసుకుందాం.

1) రెండు శ్రేణుల మధ్య వున్న సగటు సంబంధాన్ని ఒక సంఖ్యారూపంలో తేలికగా తీసుకోవచ్చు.

2) ఆర్థిక వ్యాపార రంగాలలో ధర, డిమాండ్‌ల మధ్య వున్న సంబంధం - ప్రకటన ఖర్చులు, అమ్మకాలు మధ్య సంబంధం మొదలైన అనేక ఆర్థిక చలరాశులు వాటి మధ్య గల సహసంబంధాన్ని తెలుసుకొనవచ్చు.

3) రెండు చలరాశుల చలాంకాల మధ్య సంబంధాన్ని బట్టి ఒక చలాంకం విలువ యిస్తే రెండవ చలాంకపు విలువను అంచనా కట్టవచ్చు.

4) రెండు పరస్పరాధారమైన చలరాశుల సహసంబంధ గుణకం వల్ల భవిష్యత్ సహసంఘటనలను ఊహించవచ్చు.

5) వైద్య శాస్త్రంలో పొగ త్రాగటానికి, అనారోగ్యానికి కార్యాకారణ సంబంధం తెలుసుకొనవచ్చు.

9.6 సారాంశము

రెండు శ్రేణులకు సంబంధించిన దత్తాంశమునకు ఒక సంఖ్య రూపంలో చెప్పబడే అంశమే సహసంబంధము. దీనిని కార్ల్‌పియర్సన్ వివరించారు. భార్య-భర్తల వయస్సులు, తండ్రి - కొడుకుల ఎత్తులు మొదలైన అనేక అంశాలకు గల సంబంధాన్ని

ధనాత్మకమయిన, రుణాత్మకమైన సహసంబంధ గుణక రూపంలో వ్యక్తం చేయవచ్చు. అంతేకాకుండా వ్యక్తి నిర్దిష్టమైన అంశాలయిన అందము, వినయము, మంచితనము మొదలయిన వాటికి ఇచ్చిన ర్యాంకులకు కోటి సహసంబంధ గుణకము కనుగొనవచ్చునని స్పియర్‌మన్ పేర్కొన్నాడు.

9.7 ముఖ్యపదాలు

సహసంబంధము : ఒక చలరాశిలో మార్పు వలన మరొక చలరాశిలో ఏర్పడే మార్పును పరిశీలించి ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య సన్నిహిత సంబంధాన్ని సహసంబంధము అంటారు. కార్ల్‌పియర్సన్ ఈ రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధాన్ని సంఖ్యారూపంలో వివరించటానికి పద్ధతులు, సూత్రాలు వివరించారు.

వ్యాపన పటము : రెండు చలరాశులకు సంబంధించిన దత్తాంశమును ఒక గ్రాఫ్ కాగితముపై బిందువులుగా గుర్తించినపుడు ఏర్పడే చిత్రాన్ని వ్యాపాన పటము అంటారు. ఆ బిందువుల వ్యాపనాన్ని బట్టి, ఆ రెండు చలరాశుల మధ్య సహసంబంధం వున్నది/లేనిది ధనాత్మకం లేక రుణాత్మక అని నిర్ణయించవచ్చు.

సహసంబంధ రేఖాచిత్రపటము : రెండు చలరాశులకు సంబంధించిన దత్తాంశమును గ్రాపుపై గుర్తించి ఆ బిందువులను కలపగా ఏర్పడే రేఖయున్న గ్రాపును సహసంబంధ రేఖా చిత్రపటము అని అంటారు.

కోటి సహసంబంధ గుణకము : సంఖ్యారూపంలో వ్యక్తం చేయలేని అందచందాలు, తెలివితేటలు, నీతి నిజాయితీలు మొదలగునవి గుణాత్మక విషయాల మధ్య సహసంబంధాన్ని నిర్ణయించటానికి ఛార్లెస్ ఎడ్వర్డ్ స్పియర్‌మన్ కనుగొనిన పద్ధతిని కోటి సహసంబంధ గుణకము అంటారు.

సారూప్య విచలనాల గుణకము : రెండు చలరాశులకు సంబంధించిన పరిమాణాలను విస్మరించి, వాటి దిశలను మాత్రమే పరిగణించి సహసంబంధం చెప్పే పద్ధతిని సారూప్య విచలనాల గుణకము అంటారు.

9.8 నమూనా ప్రశ్నలు

(1) సహసంబంధమంటే ఏమిటీ? అది రెండు చలనాల మధ్య కార్య-కారణ సంబంధాన్ని ఎల్లవేళలా చూపుతుందా?

(2) సహసంబంధ గుణకమంటే ఏమిటీ? క్రింది వాటితో సహసంబంధం ఎట్లా అధ్యయనం చేస్తారో చెప్పండి.

1. రేఖాచిత్ర పటాలు   2. కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకం

(3) క్రింది వాటిని గురించి సంక్షిప్తంగా రాయండి.

1. ధనాత్మక, రుణాత్మక సహసంబంధం   2. సరళరేఖా, వక్రరేఖీయ సహసంబంధం

(4) వ్యాపాన పటం అంటే ఏమిటీ? రెండు చలనాల మధ్య సహసంబంధం అధ్యయనం చేయడానికి ఇది ఎట్లా తోడ్పడుతుంది.

(5) గత పది సం॥లలో సాలుసరి ఎగుమతుల విలువలకు, అదే ఆవర్తన కాలంలో సాలుసరి పుట్టిన పిల్లలకు మధ్య వున్న సహసంబంధ గుణకం +0.8 అయితే దీని నుంచి గ్రహించేదేమిటీ? విశదీకరించండి.

(6) ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు సారూప్య విచలనాల గుణకము కనుగొనుము.

సం॥ము	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969
సప్లై	80	82	86	91	83	85	89	96	93
ధర (రూ॥లో)	146	140	130	117	133	127	115	95	100

జవాబు : $r = -1$

(7) సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

x :	67	69	71	75	85	93	87	73
y :	95	80	87	80	79	75	80	85

జవాబు : $r = 0.9042$

(8) సారూప్య విచలనాల పద్ధతి ఉపయోగించి సహసంబంధ గుణకం ఉపయోగించుము.

x :	150	135	90	140	100
y :	60	50	100	80	90

జవాబు : $r = 0.7071$

(9) కార్ల్‌పియర్సన్ సూత్రంను ఉపయోగించి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

దిగుమతులు(టన్నులలో) :	42	44	58	55	89	98	66
ఎగుమతులు(టన్నులలో) :	56	49	53	58	65	76	58

జవాబు : $r = 0.9042$

(10) సారూప్య గుణక విచలనాల పద్ధతిని ఉపయోగించి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

x :	100	120	135	135	115	100	100
y :	50	40	60	60	80	55	65

జవాబు : $r = 0$

(11) ఆదాయము, బరువులకు సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

ఆదాయం (రూ॥లలో) :	100	200	300	400	500	600
బరువు (పౌండ్లు) :	110	120	135	140	160	165

జవాబు : $r = 0.9862$

(12) సారూప్య విచలనాల గుణకం కనుగొనుము.

జతల సంఖ్య 96

సారూప్య విచలనాలు 36

జవాబు : $r = -0.492$

(13) ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	10	17	28	22	27	30
y :	25	35	45	55	65	75

జవాబు : $r = 0.865$

(14) ఒక పెయింటింగ్ పోటీలో పాల్గొన్న 12 మందికి ఇద్దరు జడ్జీలు ఈ క్రింద విధమయిన ర్యాంకులు యిచ్చారు. కోటి సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
మొదటి జడ్జి :	5	2	3	4	1	6	8	7	10	9	12	11
రెండవ జడ్జి :	4	5	7	1	6	7	10	9	11	12	3	8

(15) కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	1	2	3	4	5	6
y :	20	35	60	100	120	130

జవాబు : 0.9862

(16) ఒక అందాల పోటీలో పది మంది పాల్గొన్నారు. ఆ పది మందికి ముగ్గురు జడ్జీలు ఈ క్రింది విధమయిన ర్యాంకులు ఇచ్చారు. ఏ ఇద్దరు జడ్జీలకు అందాన్ని నిర్ణయించడంలో ఎక్కువ సామీప్యత వున్నదో నిర్ణయించుము.

మొదటి జడ్జి :	1	5	4	8	9	6	10	7	3	2
రెండవ జడ్జి :	4	8	7	6	5	9	10	3	2	1
మూడవ జడ్జి :	6	7	8	1	5	10	9	2	3	4

జవాబు : $r_{12} = 0.5515$; $r_{13} = 0.0545$; $r_{23} = 0.7333$

(17) ఈ క్రింది పట్టికలో వస్త్ర, ఇనుము పరిశ్రమలలో శ్రామికులకు ఇచ్చే వేతనాలకు సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

వస్త్రపరిశ్రమలో ఆదాయం :	90	100	105	110	115	120	130
ఇనుము పరిశ్రమలో ఆదాయం :	90	95	100	115	120	125	135

జవాబు : $r = 0.977$

(18) పది మంది విద్యార్థులకు రెండు సబ్జెక్టులలో పది మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులకు కోటి సహసంబంధ గుణకమును కనుగొనుము.

అర్థశాస్త్రం :	78	36	98	25	75	82	92	62	65	39
గణాంక శాస్త్రం :	84	51	91	69	68	62	86	68	35	49

జవాబు : $r_s = 0.6121$

(19) కార్ల్‌పియర్సన్ సహసంబంధ గుణకాన్ని కనుగొనుము.

9	10	11	13	12	15	14
3	4	5	6	7	8	9

జవాబు : $r = 0.93$

(20) పది మంది పిల్లల మనోవైజ్ఞానిక పరిక్షా స్కోరులకు (x), వారి వారి గణిత సామర్థ్యం (y)నకు స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకంను కనుగొనుము.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
x :	105	104	102	101	100	99	98	96	93	92
y :	101	103	100	98	95	96	104	92	97	94

జవాబు : $r = 0.6$

(21) x, y విలువల మధ్య సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	42	44	58	55	89	98	66
y :	56	49	53	58	65	76	58

జవాబు : $r = 0.9042$

(22) ఒక తరగతిలో పది మంది విద్యార్థులు గణితం (x), గణాంకశాస్త్ర (y)లలో పొందిన మార్కులు ఈ క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినవి. వాటికి స్పియర్‌మన్ సూత్రంను ఉపయోగించి కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

సంఖ్య :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x :	12	18	32	18	25	24	25	40	38	22
y :	16	15	28	16	24	22	28	36	34	19

జవాబు : $r_S = 0.95$

(23) ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు కార్ల్‌పియర్సన్ సూత్రం ద్వారా సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

x :	2	3	1	5	6	4
y :	4	5	3	4	6	2

జవాబు : $r = 0.45357$

(24) ఈ దిగువన ఇవ్వబడిన x, y శ్రేణులకు కోటి సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	32	35	49	60	43	37	43	49	10	20
y :	40	30	70	20	30	50	72	60	45	25

జవాబు : $\rho = 0.0758$

(25) కార్ల్‌పియర్సన్ సూత్రం ఆధారంగా ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	78	89	96	69	59	79	68	61
y :	125	137	156	112	107	136	123	108

జవాబు : $r = 0.955$

(26) కోటి సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

ఇంగ్లీషు మార్కులు:	29	28	17	15	20	26	27	25	34	19
గణితం మార్కులు:	31	32	25	29	42	15	43	32	20	40

జవాబు : -0.0848

(27) సారూప్య విచలనాల పద్ధతిని ఉపయోగించి సహసంబంధ గుణకము కనుగొనుము.

x :	150	135	90	140	100
y :	60	50	100	80	90

జవాబు : $r = 0.7071$

(28) సారూప్య విచలనాల పద్ధతి ద్వారా సహసంబంధం కనుగొనుము.

x :	100	120	135	135	115	110	110
y :	50	40	60	60	80	55	65

జవాబు : $r = 0$

(29) స్పియర్‌మన్ కోటి సహసంబంధ గుణకం కనుగొనుము.

గణితము :	46	56	39	45	54	58	36	40
అర్థశాస్త్రము :	30	60	40	50	70	60	30	50

జవాబు : $r_S = +0.714$

(30) ఒక తరగతిలో పది మంది విద్యార్థుల గణాంక శాస్త్రము, గణితములలో ర్యాంకులు ఇవ్వబడినవి. వాటికి స్పియర్‌మన్ సూత్రంను ఆధారం చేసుకుని కోటి సహసంబంధంను కనుగొనుము.

గణాంక శాస్త్రము:	9	6	1	2	3	7	10	5	8	4
గణిత శాస్త్రము:	1	5	8	2	6	7	10	4	9	3

జవాబు : $r_S = 0.24$

(31) ఒక అందాల పోటీలో పాల్గొన్న పది మంది అభ్యర్థులను ముగ్గురు జడ్జీలు ఈ క్రింది విధంగా ర్యాంకులు యిచ్చారు. స్పియర్‌మన్ సూత్రంను ఉపయోగించి ఏ ఇద్దరు జడ్జీలకు అందాన్ని నిర్ణయించడంలో సామీప్యత యున్నదో నిర్ధారించుము.

జడ్జి A :	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
జడ్జి B :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
జడ్జి C :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

జవాబు : $r_{AB} = 0.212$, $r_{BC} = 0.297$, $r_{CA} = +0.636$

9.9 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. Allen. R.G.D. : Statistics for Economists
2. Craxton and Cauden : Applied General Statistics
3. Gupta S.P. : Advanced Practical Statistics
4. Secrist Harace : An Introduction to Statistical Methods
5. Yule and Kendall : An Introduction to the Therory of Statistics

పాఠం - 10

ప్రతిగమనం

పాఠ్యాంశ నిర్మాణ క్రమం

10.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగం చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలను తెలుసుకోగలరు.

* ప్రతిగమనం అంటే ఏమిటి ?
* ప్రతిగమన సమీకరణాలు
* ప్రతిగమన గుణకం - లక్షణాలు
* ప్రతిగమనం - ప్రాముఖ్యత
* ప్రతిగమనం - ప్రయోజనాలు

10.1 విషయపరిచయం

సహసంబంధం ద్వారా రెండు చలాంకాల శ్రేణుల మధ్య సంఖ్యా రూపంలో సంబంధాన్ని తెలుసుకోవచ్చు అని గత పాఠంలో తెలుసుకున్నాం. అయితే ఒక శ్రేణిలో ఒక చలాంకాన్ని బట్టి రెండవ శ్రేణిలో దానికి సంబంధించిన విలువను తెలుసుకునే పద్ధతిని ప్రతిగమనం అంటారు. Regression (ప్రతిగమనం) అనే పదానికి నిఘంటువు అర్థం వెనుకకు మరలటం(Stepping back) అని అర్థం. ఈ పదాన్ని మొదట గాల్టన్ తండ్రుల ఎత్తు, కుమారుల ఎత్తు మధ్య సంబంధాన్ని కనుగొనేందుకు ఉపయోగించారు. అర్థశాస్త్రంలో ప్రతిగమనం విశ్లేషణ రెండు చలాంకాల సంబంధాన్ని గూర్చి అధ్యయనం చేస్తుంది. గణాంక శాస్త్రజ్ఞుడు ప్రతిగమనాన్ని ఈ క్రింది విధంగా నిర్వచించారు.

10.2 నిర్వచనాలు

వివిధ శాస్త్రవేత్తలు ఇచ్చిన నిర్వచనాలలో కొన్నింటిని పరిశీలిద్దాం. "పరస్పరాధారమైన రెండు చలాంకాలలో స్వతంత్ర విలువ ప్రాతిపదికగా, అస్వతంత్ర చలరాశి విలువను తెలుసుకోవటానికి సహకరించే సమీకరణ సాధననే ప్రతిగమన విశ్లేషణ" అనవచ్చును అని రిచ్‌డిమాండ్ అంటారు. "దత్తాంశపు యూనిట్లలో రెండు లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చలనాల మధ్య గల సగటు సంబంధాన్ని మదింపు చేసే సాధనను ప్రతిగమనం" అని బ్లెయిర్ నిర్వచించాడు. "ప్రతిగమనం అనగా వెనుక్కుపోవడం లేక మరలడం" అంటారు. ప్రతిగమనాన్ని మొట్టమొదటగా తండ్రి కొడుకుల మధ్య పొడవు గల సంబంధాన్ని పరిశీలించడానికి 19వ శతాబ్దంలో సర్ ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ ఉపయోగించాడు. పొడవైన తండ్రులకు సాధారణంగా పొడవైన కుమారులు వుంటారని ఈ పరిశీలనలో గమనించారు.

గాల్టన్ తన అధ్యయనంలో కొన్ని ఆసక్తికరమైన విషయాలు వెల్లడించారు. పొడవైన తండ్రులకు పొడవైన కొడుకులు, పొట్టి తండ్రులకు పొట్టి కొడుకులు యున్నారు. పొడవైన కుమారుల సగటు ఎత్తు వారి తండ్రుల సగటు ఎత్తుకంటే తక్కువగా వుంటుంది. పొట్టి తండ్రుల కుమారుల సగటు ఎత్తు వారి తండ్రుల సగటు ఎత్తు కంటే ఎక్కువగా వుంటుంది.

యం.యం. బ్లెయిర్ అభిప్రాయం ప్రకారం, ప్రతిగమన విశ్లేషణ అనగా రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ చలరాశుల మధ్య గల సగటు సంబంధాన్ని గణిత పద్ధతి ద్వారా కొలవడం. స్వతంత్ర చలరాశి ఆధారంగా అస్వతంత్ర చలరాశి విలువను అంచనా వేయడానికి ఉపయోగపడే గణాంక పద్ధతినే ప్రతిగమనం అంటారు.

10.3 ప్రతిగమనం - ఉపయోగాలు

గణాంకశాస్త్రంలో ప్రతిగమన విశ్లేషణ ఒక ముఖ్యమైన విశ్లేషణ. దీన్ని అన్ని శాస్త్రాల్లో విరివిగా ఉపయోగిస్తున్నారు. ఈ విశ్లేషణ వల్ల అనేక ప్రయోజనాలున్నాయి. అవి :

(1) స్వతంత్ర చలరాశి విలువ ఆధారంగా అస్వతంత్ర చలరాశి విలువను అంచనా వేయవచ్చు.

(2) కార్యకరణ సంబంధాలపై ఆధారపడిన ఆర్థిక, వ్యాపార పరిశోధనలకు ప్రతిగమన విశ్లేషణ ఉపయోగపడుతుంది.

(3) ప్రతిగమన గుణకాల సహాయంతో సహసంబంధ గుణకం గణన చేయవచ్చు.

(4) చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాన్ని నిరూపించటానికి, అంచనాలో సంభవించే దోషాన్ని కనుక్కోవటానికి ఉపయోగపడుతుంది.

10.4 ప్రతిగమనం - పరిమితులు

ప్రతిగమనం వలన అనేక ప్రయోజనాలు వున్నప్పటికీ ఈ క్రింది పరిమితులకు లోబడి యున్నవి.

(1) పరిమితమైన దత్తాంశాన్ని ఆధారంగా చేసుకొని నిర్ణయించిన చరరాశుల మధ్య సంబంధం జనాభా మొత్తానికి ప్రాతినిధ్యం వహించక పోవచ్చు. దత్తాంశంలో చలరాశుల సంఖ్య పెరిగినప్పుడు ప్రతిగమన విశ్లేషణ క్లిష్టంగా లేదా ఆచరణ సాధ్యం కాకపోవచ్చు.

(2) చలరాశుల మధ్యనున్న కార్యాకరణ సంబంధంలో మార్పు వుండదని ప్రమేయం చేస్తారు. ఈ ప్రమేయం సత్యదూరం అయితే, తత్ఫలితంగా అంచనా వేసిన విలువలు కూడా వాస్తవికతకు దూరంగా వుంటాయి.

(3) ప్రతిగమన విశ్లేషణలో దీర్ఘమైన, క్లిష్టమైన పద్ధతులుంటాయి.

(4) నిజాయితీ, అందం మొదలయిన గుణాత్మక అంశాలను అధ్యయనం చేయటానికి ప్రతిగమనం ఉపయోగపడదు.

10.5 సహసంబంధం - ప్రతిగమనముల మధ్య తేడా

x, y అనే రెండు చలరాశులు ఉంటే ఆ రెండు రాశుల మధ్య ఏ విధమైన సంబంధం వుందీ అంటే x పెరిగితే y పెరుగుతుందా? లేదా x తగ్గితే y పెరుగుతుందా? ఏ విధమైన సంబంధం ఉందనే విషయాన్ని సహసంబంధం తెలిపితే, x విలువను బట్టి y విలువ ఎంత ఉంటుందీ? లేదా y విలువను బట్టి x విలువ ఎంత ఉండవచ్చు అనే విషయాన్ని ప్రతిగమనం తెల్పుతుంది. సహసంబంధం, ప్రతిగమనంల మధ్య వ్యత్యాసాలు ఈ క్రింది విధంగా పేర్కొనవచ్చు.

(1) రెండు శ్రేణుల చలరాశులలో కదలికలను సహసంబంధం తెలియచేస్తుంది. ఈ కదలికలు ఒకే దిశలో లేక వ్యతిరేక దిశలలో యున్నాయో సహసంబంధం తెలియజేస్తుంది. కాని ప్రతిగమనం రెండు చలరాశుల సగటు సంబంధాన్ని తెలియచేస్తుంది.

(2) సహసంబంధంలో చలరాశుల మధ్య గల సంబంధ స్థాయిని తెలుసుకుంటాం. కాని ప్రతిగమనంలో కార్యకరణ సంబంధాన్ని అధ్యయనం చేస్తుంది.

(3) సహసంబంధంలో x, y రెండు చలరాశులు యాదృచ్ఛిక చలరాశులు. కాని ప్రతిగమనంలో x యాదృచ్ఛిక చలరాశి అయితే, y స్థిర చలరాశి కావచ్చు. లేదా రెండు యాదృచ్ఛిక చలరాశులే కావచ్చు.

(4) సహసంబంధంలో రెండు చలరాశుల మధ్య గల సంబంధాన్ని సంఖ్యారూపంలో నిర్ణయించటానికి సహసంబంధం సహాయపడుతుంది. కాని ప్రతిగమనంలో ఒక శ్రేణిలో విలువను ఆధారం చేసుకుని వేరొక శ్రేణిలో చలరాశి విలువను అంచనా వేయవచ్చు.

(5) సహసంబంధం రెండు చలరాశుల మధ్య సహచర్యానికి ఒక ఉజ్జాయింపు కొలమానం. అయితే ప్రతిగమన విశ్లేషణలో స్వతంత్ర చలరాశి విలువ ఆధారంగా, అస్వతంత్ర చలరాశి విలువను నిర్ణయించవచ్చు.

(6) సహసంబంధం విశ్లేషణలో చలరాశుల మధ్య సంబంధం శూన్యంలో $(r = 0)$ కావచ్చును. కాని ప్రతిగమనం అర్థరహితంగా యుండదు.

(7) సహసంబంధ గుణకం సాపేక్ష సాధనంగా పేర్కొనవచ్చు. కాని ప్రతిగమనం గుణకమును ఒక పరమ సాధనంగా చెప్పవచ్చును.

10.6 ప్రతిగమన రేఖలు

ఒక చలరాశి మధ్యమ విలువలకు ప్రతిరూపమైన ఇంకో చలరాసి మధ్యమ విలువలను తెలియజేసే రేఖలను ప్రతిగమన రేఖలు అంటారు. శ్రేణులు రెండు x, y అయితే ప్రతిగమన రేఖలు కూడా రెండు వస్తాయి. ఒక రేఖ y శ్రేణి సగటు విలువకు ప్రతిరూపమైన సగటు విలువను, x శ్రేణిలో తెలిపితే మరొకటి x శ్రేణి సగటు విలువకు ప్రతిరూపమైన y సగటు విలువను తెలుపుతుంది. ఈ రెండు రేఖలు, సరళరేఖలుగా ఉంటే x, y ల మధ్య గల సహసంబంధము సరళరేఖా సహసంబంధము (Linear correlation). ఈ రెండు రేఖలు ఒకదానితో ఒకటి కలిసిపోయినట్లయితే (Coinside) వాటి మధ్య సంబంధం పరిపూర్ణము (perfect). ఈ రెండు రేఖలు ఒకదాని నుంచి ఇంకొకటి ఎంత దూరంగా (farther) చెల్లాచెదురుగా (scattered) ఉంటాయో, వాటి మధ్య సహసంబంధం అంత తక్కువ అని అర్థము. ఒక దానిని మరొకటి సమకోణంగా (right angle) ఖండించుకొన్నట్లయితే, వాటి మధ్య సహసంబంధం శూన్యము.

ప్రతిగమన రేఖలు x అనే శ్రేణికి y అనే శ్రేణి మధ్య సహసంబంధం ఉన్నదీ లేనిది తెలియజేస్తాయి. ఒక వేళ సహసంబంధం ఉన్నట్లయితే, అది ధనాత్మకమో (positive) ఋణాత్మకమో (negative) ఎక్కువో, తక్కువో తెలియజేస్తాయి. ఒక చలరాసిలోని ఒక రకమైన మార్పుకు, మరో చలరాసిలో ఎట్లాంటి మార్పు వస్తుందో చెప్పడానికి (represes) కూడా ఉపయోగిస్తాయి. x, y శ్రేణులకు ప్రతిగమన రేఖలను గీయడం యుక్తమైన మధ్యమ విలువలను, పొందడాన్ని ప్రతిగమన సమీకరణాల (regression equations) సహాయంతో సాధించవచ్చు.

10.7 ప్రతిగమన సమీకరణాలు

ప్రతిగమన సమీకరణాలు అంటే ప్రతిగమన రేఖలనే బీజీయ సమాసాల రూపంలో ప్రకటించడం. వీటి వల్ల అనేక ప్రయోజనాలున్నాయి.

(ఎ) ఇవి ప్రతిగమన రేఖలు గీయటానికి అవసరమైన విలువలు సమకూర్చుతాయి.

(బి) x అనే చలాంకం ఇచ్చిన విలువలకు y అనే చలాంకం అత్యుత్తమ సగటు విలువలు - y అనే చలాంకం ఇచ్చిన విలువలకు x అనే చలాంకం అత్యుత్తమ సగటు విలువలు కనుక్కోవటానికి సంఖ్యాత్మక పద్ధతి చేకూరుస్తాయి.

ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని అంచనా రేఖలు అని కూడా పిలుస్తారు. x, y రెండు చలరాశులను తీసుకొన్నప్పుడు రెండు రేఖలు వుంటాయి. కాబట్టి రెండు సమీకరణాలు ఏర్పడతాయి.

(1) x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణం : "దీనివలన x విలువ ఆధారంగా y విలువను అంచనా వేస్తారు. x స్వతంత్ర చలాంకం, దానిలో మార్పు y ను ఏ విధంగా ప్రభావితం చేస్తుందో తెలుసుకోవడానికి ఈ దిగువ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

$y_C = a + bx$

$y_C =$ x విలువ ఆధారంగా అంచనా వేసి గణన చేసే y విలువ.

a = ప్రతిగమన రేఖ y అక్షాన్ని ఖండించుకునే (intercept) బిందువు వద్ద ఉన్న విలువ

b = ప్రతిగమన రేఖ వాలు(slope)ను తెలియపరచే విలువ

పై సమీకరణంలో a, b లు స్థిరసంఖ్యలు - వీటిని ప్రతిగమన రేఖ పరిమితులు అంటారు. వీటిలో ఒకదాని విలువ మారిన, లేక రెండు విలువలు మారినా వేరొక రేఖ ఏర్పడుతుంది.

(2) y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణం : యిందులో y విలువ ఆధారంగా x విలువను అంచనా వేస్తాము. అనగా y విలువలో వచ్చే మార్పు x ను ఏ విధంగా ప్రభావితం చేస్తుందో తెలుసుకోవచ్చు. y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణం.

$x_c = a + by$ అనగా

పై సమీకరణంలో $x_c =$ y విలువ ఆధారంగా అంచనా వేసి గణన చేసిన x విలువ

$a =$ ప్రతిగమన రేఖ y అక్షాన్ని ఖండించుకొన్న బిందువు వద్ద వున్న విలువ

$b =$ ప్రతిగమన రేఖ వాలును తెలియపరచే విలువ

పై సమీకరణలలో a, b లను కనుగొంటే ప్రతిగమన రేఖలు లేదా సమీకరణాలు వచ్చినట్లే. ఈ విలువలు రాబట్టేందుకు కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ఉత్తమమైన సమాధానాన్ని ఇస్తుంది.

10.7.1 కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి : ప్రతిగమన సమీకరణాలను గణన చేయుటకు అనేక పద్ధతులున్నాయి. వీటిలో ముఖ్యమైనవి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి. కనిష్ట వర్గాల ప్రమేయంతో ప్రతిగమన రేఖలను గీయవచ్చును. ఈ ప్రమేయం ప్రకారం ప్రతిగమన రేఖలను గీయవచ్చును. ఈ ప్రమేయం ప్రకారం ప్రతిగమన రేఖకు సంబంధించిన విచలనాల వర్గాల మొత్తము లేదా అసలు విలువలకు, అంచనా వేసిన విలువలకు మధ్యగల వ్యత్యాసాల వర్గాల మొత్తం $\left(\Sigma(y-y_c)^2\right)$ కనిష్టంగా వుంటుంది.

y మీద x ప్రతిగమన గుణకము : ఈ సమీకరణంలో $x_c = a + by$ అనే సమీకరణను వాడతారు. a, b విలువలు గణన చేయటానికి ఈ క్రింది బీజీయ సూత్రములను వాడతారు.

$\Sigma x = Na + b\Sigma y$ --------- (1)

$\Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2$ ------ (2)

$x_c =$ y విలువ ఆధారంగా గణన చేసిన x విలువ

$a =$ సంధాన రేఖ స్థాయి

$b =$ y మీద x లో ప్రతిగమన గుణకం (bxy)

$\Sigma x =$ x శ్రేణి విలువల మొత్తం

$\Sigma y =$ y శ్రేణి విలువల మొత్తం.

$\Sigma y^2 =$ y శ్రేణి విలువల వర్గాల మొత్తం

$\Sigma xy =$ x, y శ్రేణుల విలువలను గుణించగా వచ్చు లబ్ధాల మొత్తం.

x మీద y ప్రతిగమన గుణకం : ఈ సమీకరణంలో $y_c = a + bx$ అనే సూత్రంను ఉపయోగిస్తాము. సూత్రంలోని a, b విలువలు గణన చేయడానికి ఈ దిగువ బీజీయ సమీకరణాలు వాడతారు.

$\Sigma y = Na + b\Sigma x$ ------- (1)

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$ ------ (2)

y_c = x విలువ ఆధారంగా అంచనా వేసిన y విలువ.

a = సంధానరేఖస్థాయి

b = x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణంలో ప్రతిగమన గుణకం (byx)

Σx = x శ్రేణి విలువల మొత్తం

Σx^2 = x శ్రేణి విలువల వర్గాల మొత్తం

Σy = y శ్రేణి విలువల మొత్తం

పై పద్ధతిలో y మీద x, x మీద y సమీకరణలను సాధించడం కష్టంతో కూడుకున్న పని. అందుచేత సులువుగా ప్రతిగమన సమీకరణాలను కనుగొనేందుకు $\overline{x}$, $\overline{y}$ లను ప్రాతిపదికగా చేసుకొని రూపొందించడం జరుగుతుంది.

10.7.2 x, y విభాజనాల అంకమధ్యమాల ప్రాతిపదికగా సమీకరణలు సాధించడం

x విభాజనం, y విభాజనాల అంకమధ్యమాల ప్రాతిపదికపై ఆధారపడి ప్రతిగమన సమీకరణలను రూపొందించే విధానాన్ని ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం.

1. y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణం :

$$x-\overline{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$$

$\overline{x}$ = x శ్రేణి అంకమధ్యమం, $\overline{y}$ = y శ్రేణి అంకమధ్యమము, r = సహసంబంధ గుణకము, σ_x - x శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము, σ_y = y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము. $r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ నే bxy అంటారు.

ఈ విలువలను $\frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma dy^2}$ ద్వారా కనుక్కోవచ్చు. దీనికి Mathematical Proof ఉంది. $dx = x-\overline{x}$, $dy = y-\overline{y}$.

$\Sigma dx\ dy$ = x, y విభాజన అంకమధ్యమాలను అనుబంధ శ్రేణుల నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం.

Σdy^2 = y శ్రేణి అంకమధ్యమం నుంచి తీసుక్ను విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

2. x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణం :

$$y-\overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$$

ఇందులో, $\overline{x}$ = x శ్రేణి అంకమధ్యమము

$\overline{y}$ = y శ్రేణి అంకమధ్యమము,

r = సహసంబంధ గుణకము, σ_x = x శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము, σ_y = y శ్రేణి ప్రామాణిక విచలనము)

$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ నే byx అంటారు. ఈ విలువను $\frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma dx^2}$ ద్వారా కనుగొంటాము. (దీనికి Mathematical-Proof కలదు.) $dx = x-\overline{x}$, $dy = y-\overline{y}$, $\Sigma dx\,dy$: x, y శ్రేణుల అంకమధ్యమాలను అనుబంధ శ్రేణుల నుంచి తీసుకున్న విచలనాలను గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం. Σdx^2 = x శ్రేణుల అంకమధ్యమం నుంచి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

10.7.3 ఊహించిన అంకమధ్యమము ప్రాతిపదికగా సమీకరణాల సాధన :

y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణం :

విచలనాలను ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకొనునప్పుడు y మీద x ప్రతిగమన గుణకమును ఈ క్రింది సూత్రము సహాయంతో కనుగొనవచ్చును.

$$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma dx\,dy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

$bxy = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} =$ y మీద x ప్రతిగమన గుణకము.

ఇందులో $dx = x - A,\ dy = y - A$, where A = ఊహించిన అంకమధ్యమం.

Σdx = x శ్రేణిలో 'ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం'.

Σdy = y శ్రేణిలో 'ఊహించిన సగటు నుండి తీసుక్ను విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

Σdy^2 = y శ్రేణి విలువల మొత్తం

$\Sigma dx\,dy$ = x, y శ్రేణి విలువల మొత్తం.

N = జతల సంఖ్య

x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణం :

విచలనాలను ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకొనునప్పుడు x మీద y ప్రతిగమన గుణకమును ఈ క్రింది సూత్రము సహాయంతో కనుగొనవచ్చును.

$$byx = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma dx\,dy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dx^2 - \frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

$byx = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} =$ x మీద y ప్రతిగమన గుణకము.

Σdx = x శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం.

Σdx^2 = x శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుక్ను విచలనాల వర్గాల మొత్తం.

Σdy = y శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం.

Σdy^2 = y శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం.

$\Sigma dx\,dy$ = x, y శ్రేణులలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల మొత్తం.

N = జతల సంఖ్య

ఉదాహరణ (1) : క్రింది సమాచారానికి వివిధ పద్ధతుల్లో x మీద y, y మీద x సమీకరణాలను సాధించండి.

x	6	2	10	4	8
y	9	11	5	8	7

సమాధానం : ప్రతిగమన సమీకరణాల సాధన

x	y	xy	x^2	y^2
6	9	54	36	81
2	11	22	4	121
10	5	50	100	25
4	8	32	16	64
8	7	56	64	49
$\Sigma x = 30$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma xy = 214$	$\Sigma x^2 = 220$	$\Sigma y^2 = 340$

మొదటి పద్ధతి : y మీద x సమీకరణ = $a + bx$

పై సమీకరణలో a, b లను కనుగొనేందుకు కింది సమీకరణాలు సాధించాలి.

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$$

విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే $40 = 5a + 30b$ --------- (1)

$214 = 30a + 220b$ -------- (2)

(1)వ సమీకరణమును 6తో గుణిస్తే $6, 240 = 30a + 180b$ -------- (3)

$214 = 30a + 220b$ -------- (4)

(4) నుంచి (3) తీసివేస్తే $-40b = 26$ లేదా $b = -0.65$

b విలువను (1)లో ప్రతిక్షేపిస్తే

$40 = 5a + 30(-0.65)$ లేదా $5a = 40 + 19.5 = 59.5$ లేదా $a = 11.9$

a, b విలువలను సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$y = 11.9 - 0.65$$

Regression line of x మీద y సమీకరణ : $x = a + by$

a, b లను కనుగొనేందుకు క్రింది సమీకరణాలను సాధించాలి.

$$x = Na + b\Sigma y$$

$$\Sigma xy = a\Sigma y + b\Sigma y^2$$

$30 = 5a + 40b$ ----------- (1)

$214 = 40a + 340b$ ---------- (2)

(1) సమీకరణను 8తో గుణిస్తే : $240 = 40a + 320b$ -------- (3)

$214 = 40a + 340b$ -------- (4)

(3) నుంచి (4)ను తీసివేస్తే : $-20b = 26$ లేదా $b = -1.3$

b విలువను (1) సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే : $30 = 5a + 40(-1.3)$

$5a = 30 + 52 = 82 \quad \therefore a = 16.4$

a, b విలువలను సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే y మీద x : $= 16.4 - 1.3y$

రెండో పద్ధతి : $\bar{x} = 6, \bar{y} = 8$

x	dx $(x-6)$	dx^2	y	dy $(y-8)$	dy^2	dxdy
6	0	0	9	+1	1	0
2	- 4	16	11	+3	9	- 12
10	+4	16	5	-3	9	-12
4	-2	4	8	0	0	0
8	+2	4	7	-1	1	-2
$\Sigma x = 30$	$\Sigma dx = 0$	$\Sigma dx^2 = 40$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma dy = 0$	$\Sigma dy^2 = 20$	$\Sigma xy = -26$

గమనిక : ఈ గణనలో $dx = x - \bar{x}$ అని, $dy = y - \bar{y}$ అని గుర్తించాలి.

y మీద x సమీకరణ : $(x - \bar{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$

$$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma dx\,dy}{\Sigma dy^2} = \frac{-26}{20} = -1.3$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{30}{5} = 6; \; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

కావున $x - 6 = -1.3(y - 8) = -1.3y + 10.4$

$x = -1.3y + 16.4$ లేదా $x = 16.4 - 1.3y$

x మీద y సమీకరణ : $(y - \bar{y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \bar{x})$

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma dx\ dy}{\Sigma dx^2} = \frac{-26}{40} = -0.65$$

$y - 8 = -0.65(x - 6) = -0.65x + 3.9$

$y = -0.65x + 11.9$ లేదా $y = 11.9 - 0.65x$

పై పద్ధతి ద్వారా వచ్చిన సమీకరణలే ఈ పద్ధతి ద్వారా కూడా వచ్చినవి. అయితే మొదటి పద్ధతి కన్నా ఈ పద్ధతి ద్వారా సమీకరణలను రాబట్టడం సులువు.

మూడవ పద్ధతి ద్వారా : x చలరాశుల్లో 5ను ఊహించిన అంకమధ్యమముగా, y చలరాశుల్లో 7 ఊహించిన అంకమధ్యమంగా ఊహించడం జరిగింది.

x	dx $(x-5)$	dx^2	y	dy $(y-7)$	dy^2	dxdy
6	+1	1	9	+2	4	+2
2	-3	9	11	+4	16	-12
10	+5	25	5	-2	4	-10
4	-1	1	8	+1	1	-1
8	+3	9	7	0	0	0
$\Sigma x = 30$	$\Sigma xdx = +5$	$\Sigma dx^2 = 45$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma dy = 5$	$\Sigma dy^2 = 25$	$\Sigma dxdy = -21$

గమనిక : ఈ గణనలో $dx = x - A,\ dy = y - A$ అని గుర్తించాలి.

y మీద x సమీకరణ : $x-\bar{x} = r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{y}}}(y-\bar{y})$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{30}{5} = 6;\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{N} = \frac{40}{5} = 8$$

$$r\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{y}}} = \frac{\Sigma dx\,dy - \dfrac{\Sigma dx \cdot \Sigma dy}{N}}{\Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2 / N}$$

$$= \frac{-21-(5)(5)/5}{25-(5)^2/5} = -1.3$$

$$x - 6 = 1.3(y-8)$$

$x - 6 = -1.3y + 10.4$ లేదా $x = 16.4 - 1.3y$

x మీద y సమీకరణ : $y-\bar{y} = r\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}}}(x-\bar{x})$

$$r\frac{\sigma_{\bar{y}}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{\Sigma dx\,dy - \dfrac{\Sigma dx \cdot \Sigma dy}{N}}{\Sigma d^2x - \dfrac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

$$= \frac{-21-\dfrac{(5)(5)}{5}}{45-\dfrac{(5)^2}{5}} = -0.65$$

$$y-8=-0.65(x-6)$$

$$y-8=-0.65x+3.9 \text{ లేదా } y=11.9-0.65x$$

ఈ పద్ధతి వల్ల కూడా అవే సమీకరణలు వచ్చినట్టు గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ (2) : ఈ క్రింది ఉదాహరణకు దత్తాంశమును ఉపయోగించుకుని y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణమును, x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణమును సాధింపుము. (ఎ) 25 సం॥ వున్న భార్యకు భర్త వయస్సును, (బి) 30 సం॥రాలు వున్న భర్త యొక్క భార్య వయస్సును నిర్ణయించుము.

భర్తల వయస్సు (సం॥లు) :	25	28	30	32	35	36	38	39	42	45
భార్యల వయస్సు (సం॥లు):	20	26	29	30	25	18	26	35	35	46

సమాధానం : భర్త వయస్సులను x గాను, భార్యల వయస్సు y అనుకొనుము.

		$A=35$		$A=25$		
భర్తల వయస్సు (x)	భార్యల వయస్సు(y)	dx $(x-35)$	dx^2	dy $(x-25)$	dy^2	dx dy
25	20	-10	100	-10	100	100
28	26	-7	49	-4	16	28
30	29	-5	25	-1	1	5
32	30	-3	9	0	0	0
35	25	0	0	-5	25	0
36	18	1	1	-12	144	-12
38	26	3	9	-4	16	-12
39	35	4	16	5	25	20
42	35	7	49	5	25	35
45	46	10	100	16	256	160
		$\Sigma dx=0$	$\Sigma d^2x=358$	$\Sigma dy=-10$	$\Sigma d^2y=608$	$\Sigma dxdy=324$

x = భర్తల వయస్సు

y = భార్యల వయస్సు

dx = x శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు (A) నుండి విచలనాలు మొత్తం

$\Sigma dy=$ y శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు (A) నుండి విచలనాలు మొత్తం

$\Sigma dx^2=$ x శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల మొత్తము

$\Sigma dy^2 =$ y శ్రేణిలో ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల వర్గాల మొత్తము.

$\Sigma dx\, dy =$ x, y శ్రేణులలో వాటి వాటి ఊహించిన సగటు నుండి తీసుకున్న విచలనాల లబ్దాల మొత్తం.

(1) 25 సం॥లు యున్న భార్య (y) యొక్క భర్త (x) వయస్సును కనుగొనుటానికి y మీద x సమీకరణమును సాధించవలెను.

y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణము

$$(x-\overline{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$$

$\overline{x}$ = x శ్రేణి యొక్క అంకమధ్యమము

$\overline{y}$ = y శ్రేణి యొక్క అంకమధ్యమము

$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ = bxy – X ప్రతిగమన గుణకము. ఊహించిన సగటు (A) నుండి విచలనాలను తీసుకొన్నప్పుడు, x ప్రతిగమన గుణకాన్ని ఈ క్రింది సూత్రంతో సాధించవచ్చును.

$$r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma dx\, dy - \frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dy^2 - \frac{(\Sigma dy)^2}{N}}$$

$$= \frac{324 - \frac{(0)(-10)}{10}}{608 - \frac{(-10)^2}{10}}$$

$$bxy = \frac{324}{608-10} = \frac{324}{598} = 0.541$$

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma dx}{N} = 35 + \frac{0}{10} = 35 + 0 = 35 \text{ సం॥లు.}$$

$$\overline{Y} = A + \frac{\Sigma dy}{N} = 30 + \frac{-10}{10} = 29 + 0 = 29 \text{ సం॥లు}$$

y మీద x సమీకరణము : $(x-\overline{x}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$

$$x - 35 = 0.541(25-29)$$

$$x - 35 = 13.525 - 15.689$$

$$x - 35 = -2.164 + 35$$

$$x = -2.164 + 35$$

$$x = 32.836 \text{ సం॥లు}$$

భార్య వయస్సు (y) 25సం॥లు అయితే భర్త వయస్సు (x) = 32.836 సం॥లు.

(2) 30సం॥లు వున్న భర్త (y) యొక్క భార్య (x) వయస్సును కనుగొనటానికి x మీద y సమీకరణమును కనుగొనవలెను.

x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణము : $(y-\overline{y})=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$

$\overline{x}$ - x శ్రేణి యొక్క అంకమధ్యమము

$\overline{y}$ - y శ్రేణి యొక్క అంకమధ్యమము

$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=$ byx = y ప్రతిగమన గుణకము. ఊహించిన సగటు (A) నుండి విచలనాలను తీసుకొన్నప్పుడు, y ప్రతిగమన గుణకాన్ని ఈ క్రింది సూత్రంతో సాధించవచ్చును.

$$r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}=\frac{\Sigma dx\,dy-\frac{(\Sigma dx)(\Sigma dy)}{N}}{\Sigma dx^2-\frac{(\Sigma dx)^2}{N}}$$

$$byx=\frac{\frac{324-(0)-(10)^2}{10}}{358-\frac{(0)^2}{N}}$$

$$=\frac{324}{358}=0.9050$$

x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణము : $(y-\overline{y})=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$

భర్త వయస్సు (x) 30 సం॥లుగా ప్రతిక్షేపిస్తే

$y-29=0.9050(30-35)$

$y-29=27.15-31.675$

$y-29=-4.525+29$

$y=24.475$ సం॥లు

$\therefore$ భర్త వయస్సు 30 సం॥లు అయితే భార్య వయస్సు 24.475 సం॥లు.

ఉదాహరణ (3) : ఈ క్రింది దత్తాంశం ఆధారంగా ఇంగ్లీషులో 50 మార్కులు వచ్చిన విద్యార్థికి గుణితంలో ఎన్ని మార్కులు వచ్చునో నిర్ణయించుము.

గణితంలో మార్కుల అంకమధ్యమము	:	80
ఇంగ్లీషులో మార్కుల అంకమధ్యమము	:	50
గణితంలో మార్కుల ప్రామాణిక విచలనము	:	15

ఇంగ్లీషులో మార్కుల ప్రామాణిక విచలనము : 10

సహసంబంధ గుణకము : 0.4

జవాబు : గణితంలో మార్కులను x గాను; ఇంగ్లీషులో మార్కులను y అనుకొనుము. ఇప్పుడు ఇంగ్లీషులో(y) 50 మార్కులు వచ్చి విద్యార్థికి గణితంలో (x) కనుగొనవలెను. అనగా y మీద x సమీకరణము సాధించాలి.

x సమీకరణము $x-\overline{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$

$\overline{x} = 80, \; \sigma_Y = 50, \; \sigma_y = 10, \; r = 0.4,$

$$x-80 = 0.4\frac{15}{10}(y-50)$$

$$x-80 = 0.6(y-50)$$

$$x-80 = 0.6y-30$$

$$x = 0.6y-30$$

$y = 60$ అయినచో

$$x = 0.6(60)+50$$

$x = 86$ మార్కులు

ఉదాహరణ (4) : ఈ క్రింది దత్తాంశమును ఉపయోగించి, (1) x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణము, y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణములను సాధించుము. (2) x విలువ 50 వుండగా y విలువను కనుగొనుము.

$\overline{x} = 52.33 \qquad \overline{y} = 140.33$

$bxy = +0.675 \qquad byx = +1.09$

జవాబు : x మీద y ప్రతిగమన సమీకరణము

$$y-\overline{y} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$$

$$y-140.33 = 1.09(x-52.33)$$

$$y-140.33 = 1.09(x-52.33)$$

$$y-140.33 = 1.09\times-57.04$$

$$y-140.33 = 1.09\times-57.04+140.33$$

$$y = 1.09x+83.29$$

y మీద x ప్రతిగమన సమీకరణము

$$x-\overline{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$$

$$x-52.33 = 0.675(y-140.33)$$

$$x-52.33 = 0.675y-94.72$$

$$x = 0.675\ y-94.72+52.33$$

$$x = 0.675y-42.39$$

(2) x విలువ 50 వుండగా y విలువను కనుగొనుటకు y ప్రతిగమన సమీకరణమును ఉపయోగించాలి.

$$y = 1.09x+83.29$$

x విలువ = 50 యుండగా

$$y = 1.09(50)+83.29$$

$$= 54.5+83.29$$

$$= 137.79$$

10.7.4 ప్రతిగమన గుణకం యొక్క లక్షణాలు :

(1) రెండు ప్రతిగమన గుణకాలు 1 కంటే ఎక్కువగా వుండవు. అనగా 2 ప్రతిగమన గుణకాలు 1 కంటే తక్కువగాను, లేక 1 ప్రతిగమన గుణకమైన 1 కంటే తక్కువగా యుండాలి. ఎందువలన అనగా రెండు ప్రతిగమనాల యొక్క లబ్ధము యొక్క వర్గమూలము 1కి సమానముగాను లేక 1 కంటే తక్కువగాను వుండాలి.

$$\sqrt{b_{xy}\cdot b_{yx}} \le 1$$

(2) రెండు ప్రతిగమన గుణకాలకు ఒకే గుర్తు యుంటుంది. అనగా b_{yx} ధనాత్మకమైతే, b_{xy} కూడా ధనాత్మకమే అవుతుంది. b_{yx} రుణాత్మకమైతే, b_{xy} కూడా రుణాత్మకమే. ఈ విధంగా రెండూను ఒకే గుర్తును కలిగి యుంటాయి. రెండు ప్రతిగమన గుణకాల లబ్ధం 1కి సమానం లేక 1 కంటే తక్కువ.

(3) రెండు ప్రతిగమన గుణకాల లబ్ధము యొక్క వర్గమూలము ఆ రెండు శ్రేణుల సహసంబంధ గుణకానికి సమానము.

$$r = \sqrt{b_{xy}\ \times b_{yx}}$$

ప్రతిగమన గుణకాల గుర్తు, సహసంబంధ గుణకం యొక్క గుర్తులు రెండూ ఒకటిగానే యుంటాయి. ప్రతిగమన గుణకాలు ధనాత్మకమైతే సహసంబంధ గుణకం కూడా ధనాత్మకమే. అవి రుణాత్మకం అయితే సహసంబంధ గుణకం కూడా రుణాత్మకమే.

(4) రెండు ప్రతిగమన గుణకాల అంకమధ్యమము సహసంబంధ గుణకానికి సమానముగాను లేక ఎక్కువగాను వుంటుంది.

$$\frac{b_{yx}+b_{xy}}{2} \ge r$$

(5) $byx = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ కావునా, ఈ నాలుగింటిలో ఏ మూడింటిని ఇచ్చినా నాల్గవది కనుగొనవచ్చును.

(6) $\sigma_x = \sigma_y$ అయితే, అప్పుడు సహసంబంధ గుణకము ప్రతిగమన గుణకాలు సమానం అవుతాయి.

$$r = b_{yx} = b_{xy}$$

సహసంబంధ గుణకం '0' అయితే ప్రతిగమన గుణకాలు కూడా '0'గా వుంటాయి.

10.8 విచరణ నిష్పత్తి (Ratio of Variation)

రెండు శ్రేణులు x, y ఉంటే వాటి మధ్య సాపేక్ష విచరణ (relative variation)ను గురించి ప్రతిగమన సమీకరణాల ద్వారా పైన తెలుసుకోవడం జరిగింది. దీనినే విచరణ నిష్పత్తిని గణించి కూడా అదే విషయాన్ని తెలుసుకోవచ్చు. రెండు శ్రేణుల మధ్య ఉండే సహసంబంధం (correlation) పరిపూర్ణం(perfect)గా ఉన్నప్పటికీ వాటి మధ్య కలుగుతున్న అనుపాత విచరణలు (proportionate variations) ఒక దాని నుంచి మరొకటి వేరుగా ఉండవచ్చు. ధరకు (price) డిమాండ్ (Demand)కు మధ్య అత్యధికమైన (high degree) వ్యతిరేక సహసంబంధం (negative correlation) ఉంటుంది. అయినప్పటికీ ధరలోని విచరణాలు (variations), డిమాండ్‌లోని విచరణాలలో మార్పులను తరచితరచి అనుపాతంగా (proportionate) చూస్తే అవి వేర్వేరుగా ఉండవచ్చు. ధరలో 1% పెరగగా, డిమాండ్‌లో అనుపాతంగా తగ్గుదల ఎంత ఉంటుందో తెలుసుకోవడానికి, ఆ రెండు శ్రేణులకు విచరణ నిష్పత్తిని గుణించవలె. విచరణ నిష్పత్తిని దిగు విధంగా గుణించవచ్చు.

1. ఇచ్చిన సాపేక్షకాలకు (given relatives) అంకగణిత మాధ్యమాన్ని ముందుగా కనుక్కోవలె. దానిని 100కు సమానం చేసి, మిగతా విలువలను దానిలో శాతాలుగా ప్రకటించవలె (express). ఈ శాతాల విచలనాలను 100 నుంచి గణించవలె. ఈ విచలనాలను, విచలన శాతాలు (percentage derivations) అంటారు.
2. అట్లాగే సబ్జెక్టు శ్రేణికి కూడా విచలన శాతాలను గుణించవలె.
3. సాపేక్షిక శ్రేణిలోని విచలన శాతాలను సబ్జక్టు శ్రేణిలోని విచలన శాతాలతో భాగించవలె.
4. మూడులో వచ్చిన గుణకాలను అంకగణిత మాధ్యమాన్ని గుణించవలె. అదే విచరణ నిష్పత్తి.

క్రమరాహిత్యంగా ఉండే శ్రేణులలో (irregular series) విచరణ నిష్పత్తిని, పైన వివరించిన గణితపద్ధతి కంటే (mathematical procedure), రేఖా చిత్రం ద్వారా తెలుసుకోవడం శ్రేయస్కరము. ఎందుచేతనంటే రేఖాచిత్రం రెండు శ్రేణుల సాపేక్ష విచరణలను గురించి ఉత్తమంగా వివరిస్తుంది.

10.8.1 గాల్టన్ రేఖా చిత్రము (Galton's graph) : తండ్రుల, వారి వారి కుమారుల సగటు ఎత్తుల (mean height)ను గురించి వివరిస్తూ, ప్రతిగమనము (regression) అనే పదాన్ని ముందుగా వాడింది గాల్టన్ శాస్త్రవేత్త. విచరణ నిష్పత్తిని గురించి వివరణ కోసం రేఖాచిత్రాన్ని కూడా ఆయనే తయారుచేసినాడు. దానిని 'గాల్టన్ గ్రాఫ్' అనే పిలుస్తారు. శ్రేణులలోని విచరణలు చాలా క్రమరాహిత్యం (irregular)గా ఉన్నప్పుడు ఈ రేఖాచిత్రం చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

గాల్టన్ రేఖాచిత్రాన్ని దిగువ విధంగా గీస్తారు.

1. x, y శ్రేణులను, వాటి వాటి మాధ్యమ విలువల (mean height) ఆధారంగా సూచీ సంఖ్యలు (index Nos.)లోకి మార్చండి.
2. విచరణాలు తక్కువగా ఉండే సాపేక్షక శ్రేణిగాను విచరణాలు ఎక్కువగా ఉండే శ్రేణిని సబ్జెక్ట్ శ్రేణిగాను తీసుకోండి. ఇందువల్ల యూనిట్ కంటే తక్కువగా ఉండే విచరణ నిష్పత్తి లభిస్తుంది.
3. ఊర్ధ్వరేఖ మీద (vertical scale) సబ్జక్టు శ్రేణికి చెందిన సూచీసంఖ్యను, క్షితిజరేఖ (horizontal scale) మీద సాపేక్ష శ్రేణికి సంబంధించిన సూచీసంఖ్యలను గుర్తించండి.
4. ఆ విధంగా గుర్తింపు చేసిన బిందువులు ఒక వ్యాపన పటాన్ని (scatter diagram) ఇస్తుంది. ఫ్రీహ్యాండ్ పద్ధతి ద్వారా

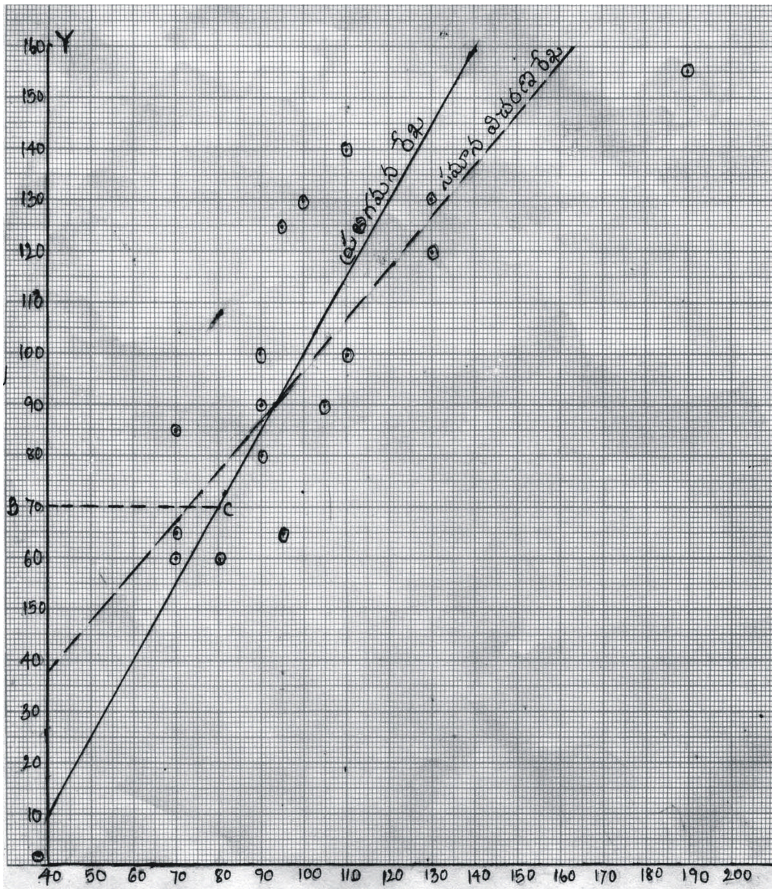
(feehand method) సుస్థుతమ సామీప్య రేఖను (line of best fit) గీయండి. ఈ రేఖను గీసేటప్పుడు రేఖకు రెండు ప్రక్కల బిందువులు సమానంగా ఉండవలె. ఆ బిందువులకు రేఖ నుంచి ఉండే దూరాలు రెండు ప్రక్కల సమానంగా ఉండవలె. ఆ రేఖ రెండు శ్రేణుల మాధ్యమ విలువల ద్వారా పోవలె. రెండు శ్రేణుల మాధ్యమ విలువలను 100 అనుకొని, సూచీసంఖ్యలను బట్టి, వాటిని గుర్తించినాము. కాబట్టి రేఖ 100 ద్వారా పోవలె.

ఈ విధంగా రేఖను గీసిన తరువాత Y కి x కి మధ్యకోణానికి స్పర్శరేఖను (Tangent of the angle between Y and x) కనుక్కోవలె. ఇది Y కి x కి మధ్య ఉండే విచరణ నిష్పత్తిని తెలియజేస్తుంది. దాని తాలూకు విపర్యయము x కి Y కి మధ్య ఉండే విచరణ నిష్పత్తిని తెలియజేస్తుంది.

ఉదాహరణ : దిగువ ఇచ్చిన శ్రేణులకు విచరణ నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.
(గాల్టన్ రేఖా చిత్ర పద్ధతి ప్రకారము)

వరుస సంఖ్య (Serial No.)	సబ్జక్టు (x)	రెలిటివ్ (y)
1	24	7.0
2	40	9.0
3	36	9.0
4	50	9.5
5	36	0.5
6	26	9.5
7	24	8.0
8	34	7.0
9	52	10.0
10	52	13.0
11	64	16.5
12	56	11.0
13	48	13.0
14	40	11.0
15	32	9.0
16	26	7.0
	640	160.0

పై దత్తాంశాలను వాటి వాటి మధ్యమ విలువల ఆధారం మీద సూచీ సంఖ్యలుగా మార్చవలె.



x శ్రేణికి అంకగణిక సగటు (Arithmetic Average) $= \frac{640}{16} = 40$

y శ్రేణికి అంకగణిత సగటు = $\frac{160}{16} = 10$

x శ్రేణికి అంకగణిత సగటు 40ని 100కు సమానం చేసి, y శ్రేణికి అంకగణిత సగటు 10ని కూడా 100కు సమానం చేయగా, వాటి వాటి విలువలకు లభ్యమయ్యే సూచీ సంఖ్యలు కింది విధంగా ఉంటాయి.

వరుస సంఖ్య	x సూచీసంఖ్య 40 = 100	y సూచీసంఖ్య 10 = 100	వరుససంఖ్య	x సూచీసంఖ్య 40 = 100	y సూచీసంఖ్య 10 = 100
1	60	70	9	130	100
2	100	90	10	130	130
3	90	90	11	160	165
4	125	95	12	140	110
5	90	105	13	120	130

6	65	95	14	100	110
7	60	80	15	80	90
8	85	70	16	65	70

ఈ సూచీసంఖ్యలను రేఖాచిత్రంలో గుర్తింపు చేయడం జరిగింది.

పై రేఖా చిత్రంలో x శ్రేణిని సబ్జక్టుగాను y శ్రేణిని రెలిటెవ్‌గాను తీసుకోవడం జరిగింది. ఎందుచేతనంటే x శ్రేణి సూచీసంఖ్యలు ప్రామాణిక విచలనము y శ్రేణి సూచీసంఖ్యల ప్రామాణిక విచలనము కంటే ఎక్కువ. సబ్జక్టు శ్రేణిని ఊర్ధ్వ రేఖ మీద (vertical scale), రెలిటివ్ శ్రేణిని క్షితిజ రేఖ (horizontal scale) మీద గుర్తింపు చేసినాము. అట్లాగేసిన రేఖ రెండు శ్రేణులకు ఉండే సగటు అయిన 100 ద్వారా పోతుంది. ఆ రేఖకు రెండు ప్రక్కల సమానమైన బిందువులు ఉన్నాయి. అదీగాక బిందువులు రేఖ నుంచి సమానమైన దూరంలో ఉన్నాయి. విచరణనిష్పత్తిని కనుక్కోడానికి, y కి x కి మధ్య ఉండే కోణానికి స్పర్శరేఖను కనుక్కోవలె. (longest of the angle between y and x). ఇందుకోసం ఊర్ధ్వరేఖ మీద ఏదో ఒక బిందువును తీసుకోండి. అక్కడ నుంచి క్షితిజ రేఖకు (horizontal) సమానాంతరంగా (parallel) పోయే ఒక రేఖను ప్రతిగమన రేఖ మీద గీయవలె. పై రేఖాచిత్రంలో BC అనేదే ఈ రేఖ. అది ప్రతిగమన రేఖ మీద C అనే బిందువు వద్ద పడుతుంది. BC దూరాన్ని B A దూరంచేత భాగించగా, (A అనేదే ప్రతిగమన రేఖ ఊర్ధ్వరేఖకు తగిలే బిందువు) వచ్చేదే విచరణ నిష్పత్తి. పై రేఖా చిత్రంలో BC = 40, BA = 60 అందుచేత

$$\text{విచరణ నిష్పత్తి} = \frac{BC}{BA} = \frac{40}{60} = 0.66$$

దీనివల్ల తెలుసుకోవలసింది ఏమంటే, సబ్జక్టు శ్రేణిలో వచ్చే 1% మార్పుకు, సాపేక్ష శ్రేణిలో 66% మార్పు కలుగుతుంది. విచరణ నిష్పత్తికి యూనిట్‌కి మధ్య ఉండే తేడాయే ప్రతిగమన నిష్పత్తి. ఈ ఉదాహరణలో ప్రతిగమన నిష్పత్తి = 1 - 0.66 = 0.34.

10.9 సారాంశం

రెండు చలరాశుల మధ్య యున్న సంబంధాన్ని సంఖ్యారూపంలో వ్యక్తం చేయటానికి సహసంబంధ గుణకం ఉపయోగిస్తారు. అయితే ఒక శ్రేణిలో ఒక విలువ యిచ్చినప్పుడు, రెండవ శ్రేణిలోని యుక్తతమమైన విలువను తెలుసుకోవటానికి ఉపయోగించే గణాంక సాధనమును ప్రతిగమనం అంటాము. ప్రతిగమన సమీకరణాల ద్వారా ఒక శ్రేణిలో యివ్వబడిన విలువకు మరొక శ్రేణిలో యుక్తతమమైన విలువను కనుగొనవచ్చును. ప్రతిగమనం అనగా వెనక్కిపోవడం లేదా మరలడం. మొట్టమొదటిసారిగా 19వ శతాబ్దంలో తండ్రులు, కొడుకుల మధ్య యుండే సంబంధాన్ని పరిశీలించడంలో సర్ ఫ్రాన్సిస్ గాల్టన్ ప్రతిగమనంను వాడాడు. ఈ గణాంక పద్ధతిని ఆర్థిక, వాణిజ్య శాస్త్రాలలో విరివిగా ఉపయోగించడం జరుగుతుంది.

10.10 ముఖ్యపదాలు

(1) ప్రతిగమనము : ఒక శ్రేణిలో విలువ ఒక విలువ ఇచ్చినప్పుడు రెండవ శ్రేణిలో యుక్తతమైన విలువను తెలుసుకోవడానికి ఉపయోగించే గణాంక సాధనమును ప్రతిగమనము అని అంటారు.

(2) సరళరేఖీయ ప్రతిగమనము : పరస్పర ఆధారమైన రెండు చలరాశుల విలువల మధ్య సరళరేఖ సంబంధం యున్నట్లు అయితే, దానిని సరళరేఖీయ ప్రతిగమనం అని అంటాము.

(3) ప్రతిగమన సమీకరణాలు : పరస్పర ఆధారమైన రెండు శ్రేణులకు సంబంధించిన ప్రతిగమన రేఖల బీజీయ సమాసాలను ప్రతిగమన సమీకరణాలు అంటారు. యివి రెండుగా యుంటాయి. x చలాంకము యిచ్చిన, y చలాంకము సగటు విలువను, y చలాంకము యిచ్చిన విలువకు x చలాంకము కనుక్కోవటానికి సంఖ్యాత్మకమైన పద్ధతిని

చేకూరుస్తాయి.

x విలువ ఇచ్చి y విలువను కనుగొనవలెనంటే, దానిని x పై y ప్రతిగమన సమీకరణం అంటారు.

$$y-\overline{y}=r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x-\overline{x})$$

y విలువ ఇచ్చి x విలువను కనుగొనవలెనంటే దానిని y పై x ప్రతిగమన సమీకరణం అంటారు.

$$x-\overline{x}=r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y-\overline{y})$$

(4) ప్రతిగమన గుణకాలు : x పై y సమీకరణంలో 'bxy' y పై x సమీకరణంలో 'bxy' లను ప్రతిగమన గుణకాలు అని అంటారు. ఈ రెండింటిని హెచ్చించి వర్గమూలం చేస్తే సహసంబంధ గుణకం వస్తుంది.

10.11 నమూనా ప్రశ్నలు

1. ప్రతిగమనం అనగానేమి? ప్రతిగమనం యొక్క ప్రాముఖ్యతను వివరించండి.

2. ప్రతిగమన సమీకరణాలు అనగానేమి? వాటిని విపులంగా వివరించండి?

3. ఈ క్రింది దత్తాంశమును ఉపయోగించి రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలు కనుగొనుము.

x :	15	27	27	30	34	38	46
y :	120	140	150	170	180	200	250

జవాబు : $y=40.62+4.2657x$; $x=0.2189y-6.8383$

4. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు x పై y ప్రతిగమన సమీకరణము y పై x ప్రతిగమన సమీకరణమును సాధించుము.

x :	1	5	3	2	1	1	7	3
y :	6	1	0	0	1	2	1	5

జవాబు : $2.874-0.304x$; $x=3.431-0.278y$

5. x పై y ప్రతిగమన సమీకరణము, y పై x ప్రతిగమన సమీకరణమును కనుగొనుము.

x :	8	10	9	12	10	11	12
y :	2	2	3	4	5	5	5

జవాబు : $y=0.638x-2.848$; $x=7.5+0.75y$

6. ఈ క్రింది ఉదాహరణలను భర్తల వయస్సులు, వారి వారి భార్యల వయస్సు (సం॥లు) ఇవ్వబడినవి. ప్రతిగమన పద్ధతి ద్వారా భార్య వయస్సు 16 సం॥లు యుండగా, ఆమె భర్త వయస్సు ఎంత వుండవచ్చునో నిర్ణయించుము?

భర్తల వయస్సు(x) :	36	23	27	28	28	29	30	31	33	35
భార్యల వయస్సు (y) :	29	18	20	22	27	21	29	27	29	28

జవాబు : 23 - 25 సం॥లు

7. పది మంది తండ్రులు వారి కుమారుల ఎత్తులు ఈ దిగువనున్నాయి. సరైన ప్రతిగమన సమీకరణాన్ని ఉపయోగించి తండ్రి ఎత్తు 16.4 సెం.మీ. అయినప్పుడు, కుమారుని ఎత్తు అంచనా వేయుము.

తండ్రి ఎత్తులు(x) :	158	160	163	165	167	170	167	172	177	181
కుమారుని ఎత్తు (y) :	163	158	167	170	160	180	170	175	172	175

జవాబు : 165.84

8. పది కుటుంబాల నెలసరి ఆదాయం (x) ఆహారంపై వ్యయము (y) ఈ క్రింది దత్తాంశంలో యివ్వబడినవి. ఆదాయముపై ఆహారపు వ్యయము యొక్క ప్రతిగమన సమీకరణములను సాధించుము.

ఆదాయం రూ॥(x) :	120	90	80	50	130	140	110	95	75	105
వ్యయం రూ॥ (y) :	40	36	40	45	40	44	45	38	50	35

జవాబు : $y = 0.0193x + 39.18$

9. పది మంది వ్యక్తుల వయస్సులు (x), వారి వారి రక్తపోటు (y)లను ఉపయోగించి 45 సం॥ల వయస్సున్న వ్యక్తికి ఎంత రక్తపోటు యుండవచ్చునో నిర్ధారించుము.

వయస్సు (x) :	56	42	36	47	49	42	60	72	63	55
రక్తపోటు (y) :	143	125	118	128	145	140	155	160	149	150

జవాబు : 134

10. y = 200 అయితే, x విలువ ఎంతో ఈ క్రింది దత్తాంశాల నుంచి కనుక్కోండి.

x :	250	248	297	338	463	383
y :	137	147	184	196	276	260

జవాబు : 331.5

11. క్రింద ఇచ్చిన ధర, డిమాండ్‌ల పట్టీ నుండి రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

ధర (రూ॥లలో) :	10	12	13	12	16	15
డిమాండ్ :	40	38	43	45	37	43

జవాబు : 39.25

12. ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు రెండు ప్రతిగమన సమీకరణములు కనుగొందుము.

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y :	9	8	10	12	11	13	14	16	15

13. ఈ క్రింది దత్తాంశంలో ప్రకటీకరణ వ్యయం (x) వేల రూపాయలలోను, అమ్మకాలు (y) లక్షల రూపాయలలోను ఇవ్వడం అయింది. (1) ప్రకటీకరణపై అమ్మకాలకు ప్రతిగమన సమీకరణమును సాధించి, (2) ప్రకటీకరణ రూ. 60,000 యున్నప్పుడు అమ్మకాలు నిర్ణయించుము.

ప్రకటీకరణ (x) :	12	15	15	23	24	38	42	48
అమ్మకాలు (y) :	50	56	58	70	72	88	92	95

జవాబు : (1) $y = 3.87 + 0.125 \times i$ (2) రూ. 113.7 లక్షలు

14. దిగువ దత్తాంశానికి రెండు ప్రతిగమన రేఖలను కనుక్కోండి.

x :	42	44	58	55	89	98	66
y :	56	49	53	58	65	76	58

జవాబు : $x = 2.24 + 65.868;\ y = 0.37x + 3540$

15. ఈ దిగువ దత్తాంశమునకు రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలను కనుగొనుము? y విలువ 75 అయితే x విలువను అంచనా వేయుము.

	x	y
అంకమధ్యమము	36	85
ప్రామాణిక విచలనము	11	8

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకము = 0.66

16. ఈ క్రింది దత్తాంశం నుంచి

(1) x = 12 అయినప్పుడు y ను, (2) y = 30 అయినప్పుడు, x విలువను కనుగొనుము.

	x	y
అంకమధ్యమము	27.6	14.8
ప్రామాణిక విచలనము	40	20

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకము = 0.8

జవాబు : (1) 8.56 (2) 51.92

17. రెండు ప్రతిగమన సమీకరణాలు సాధించుము.

(1) వర్షపాతం 2 సెం.మీ. వున్నప్పుడు పంట దిగుబడి;

(2) పంట దిగుబడి 600 కె.జీలున్నప్పుడు వర్షపాతంను కనుగొనుము.

	వర్షపాతం	దిగుబడి
అంకమధ్యమము	26.7	508.4
ప్రామాణిక విచలనము	4.6	36.8

సహసంబంధ గుణకము = 0.52

జవాబు : $x = 0.065y - 6.346;\ y = 416x + 397.33$

18. దిగువ సమాచారంలో $x = 70$ అయితే y విలువను, y = 90 అయితే x విలువను కనుక్కోండి?

	x	y
అంకమధ్యమము	18	100
ప్రామాణిక విచలనము	14	20

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకము = 0.8 జవాబు : $y = 159.4;\ x = 12.4$

19. ఒక తరగతిలో విద్యార్థులు గణితం, ఇంగ్లీషులకు సంబంధించిన దత్తాంశమును ఈ దిగువ యివ్వబడింది.

	గణితం (x)	ఇంగ్లీషు (y)
అంకమధ్యమము	18	100
ప్రామాణిక విచలనము	10.8	16.8

x, y ల మధ్య సహసంబంధ గుణకము = 0.42

1. రెండు ప్రతిగమన సమీకరణములను సాధించుము.
2. x విలువ 50 యున్నప్పుడు y విలువ ఎంత.
3. y విలువ 30 అయినప్పుడు x విలువ ఎంత.

జవాబులు : 1. $x = 0.27y + 26.68;\ y = 0.653x + 21.71$ (2) 54 (3) 34.78

20. రెండు ప్రతిగమన సమీకరణములను కనుగొనుము.

x :	6	2	10	4	8
y :	9	11	5	8	7

జవాబు : $y = 11.9 - 0.65x;\ x = 16.4 - 1.3y$

10.12 చదువదగిన గ్రంథాలు

1. Allen. R.G.D. : Statistics for Economics
2. Graxton and Cauder : Applied General Statistics
3. Gupta S.P. : Advanced Practical Statistics
4. Secrist Harace : An Introduction to Statistical Methods
5. Yure and Kendall : An Introduction to the Therory of Statistics

పాఠం - 11

సూచీ సంఖ్యలు (Index Numbers)

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

11.0 లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగము చదివిన తరువాత మీరు ఈ క్రింది అంశాలు తెలుసుకోగలరు.

* సూచీ సంఖ్యలు, వాటిలోని రకాలు, వాటి వలన ఉపయోగాలు

* సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు

* లాస్పియర్, పాషె, ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి మొదలగు సూచీల నిర్మాణం

* సూచీ సంఖ్యల స్థిరత్వంకు పరీక్షలు
* టోకుధరల సూచీ మరియు జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు, వాటి నిర్మాణ పద్ధతులు

11.1 విషయ పరిచయం

సూచీ సంఖ్యలను ప్రత్యేకమైన సగటులని అంటారు. ధరల్లో, పరిమాణాల్లో లేదా ఏదైనా ఆర్థిక విషయాల్లో వచ్చే సాపేక్ష మార్పులను కొలిచేందుకు వీటిని ఉపయోగిస్తారు. అందుచేత వీటిని ఆర్థిక భారమితులు అని కూడా అంటారు. ఆర్థిక, ఆర్థికేతర విషయాల్లో సూచీసంఖ్యలు, వాటి ప్రాముఖ్యం, ప్రయోజనం నానాటికి పెరుగుతున్నాయని చెప్పవచ్చు. సూచీ అంటే సూచిక అని అర్థం. ఇవి ప్రత్యేక్షంగా కొలవలేని మార్పుల అధ్యయనానికి తోడ్పడతాయి. ఈ పాఠంలో మనం, వివిధ సూచీ సంఖ్యలు వాటి ప్రయోజనాలు, వాటి పరిమితులు మరియు నిర్మించే పద్ధతులను గూర్చితెలుసుకుందాం.

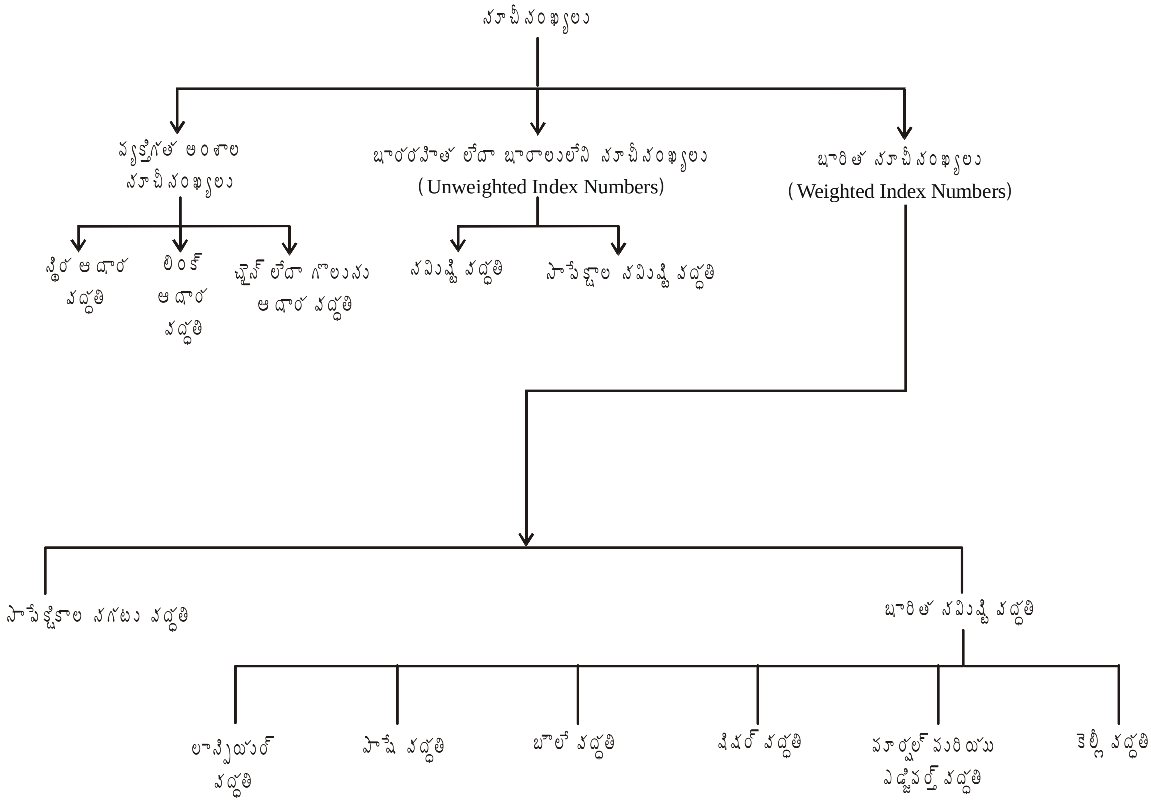
11.2 సూ చీసంఖ్యలు - వివిధ రకాలు

ఆర్థిక మరియు పారిశ్రామిక సంబంధిత చలరాశుల కాలగమనంలో పెరుగుదల లేక తరుగుదలలో సంభవిస్తూ వుంటాయి. ఈ పెరుగుదలలను, తరుగుదలలను సూచించడానికి ఉపయోగించే సంఖ్యలే సూచీ సంఖ్యలు. సూచీ సంఖ్యలు వస్తువుల ధరలలో, పారిశ్రామిక ఉత్పత్తి పరిమాణంలో, వస్తువుల విలువలో అనునిత్యం సంభవించే మార్పులను కొలిచే ఒక రకమైన సాధనాలు. సూచీ సంఖ్యలను ముఖ్యంగా వస్తువుల ధరలలోకాని, పరిమాణంలోకాని, వ్యక్తుల ఆదాయ వ్యయాలలో కానీ కాలానుగుణంగా లేక భౌగోళికంగా వచ్చిన మార్పును తులనాత్మకంగా కొలవడానికి ఉపయోగించే పరికరాలుగా కూడా భావించవచ్చు. ఈ తులానాత్మక పరిశీలన రెండు కాలాల మధ్యగాని, రెండు ప్రాంతాల మధ్యగాని చేస్తారు.

సూచీ సంఖ్యలను వాటి స్వభావం బట్టి కింది ఐదు విధాలుగా వర్గీకరించవచ్చు.

1. **ధరల సూచీ సంఖ్యలు :** వీటిని వస్తువుల ధరలలో సంభవించే మార్పును కొలవటానికి ఉపయోగిస్తారు.
2. **పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు :** వీటిని వస్తువుల పరిమాణంలో ఏర్పడే మార్పును కొలవడానికి ఉపయోగిస్తారు.
3. **విలువల సూచీ సంఖ్యలు :** వీటిని వస్తువుల విలువలలో వచ్చే మార్పును కొలవడానికి ఉపయోగిస్తారు.
4. **టోకుధరల సూచీ సంఖ్యలు (Wholesale Price Index Numbers) :** వీటిని నిత్యావసర వస్తువుల టోకు ధరలో ఏర్పడే మార్పును కొలవడానికి ఉపయోగిస్తారు.
5. **వినియోగదారుల ధరల సూచీ సంఖ్యలు (Consumers Price Index Numbers) :** వీటిని వినియోగదారుడు ఉపయోగించే వస్తువుల ధరలలో వచ్చే మార్పును కొలవడానికి ఉపయోగిస్తారు. దీనిని జీవన వ్యయం సూచీసంఖ్య అని కూడా అంటారు (Cost of Living Index).

సూచీ సంఖ్యలను వాటి నిర్మాణ పద్ధతుల దృష్ట్యా కూడా వర్గీకరించవచ్చు. అవి ఏవనగా : 1. వ్యక్తిగత అంశాల సూచీ సంఖ్యలు, 2. భారరహిత లేదా భారాలు లేని సూచీ సంఖ్యలు, 3. భారిత సూచీ సంఖ్యలు. వీటిని మళ్ళీ కూడా వర్గీకరించవచ్చు. ఈ వర్గీకరణలను కింద చూపడం జరిగింది.



11.3 సూచీ సంఖ్యల వల్ల ఉపయోగాలు

సూచీ సంఖ్యల వలన చాలా ఉపయోగాలు వున్నాయి. అవి :

1. అనేక ఆర్థిక, వ్యాపార నిర్ణయాలను ఎక్కువగా సూచీ సంఖ్యల ఆధారంగానే తీసుకుంటారు.
2. మనదేశంలో ప్రభుత్వం సూచీ సంఖ్యల ఆధారంగా ఉద్యోగుల జీతం మరియు కరువు భత్యాలను నిర్ణయిస్తుంది.
3. ధరల సూచీ సంఖ్యలు ధరల మార్పు విశ్లేషణలో అత్యంత విశేషంగా ఉపయోగపడతాయి.
4. దేశంలో పారిశ్రామిక ఉత్పత్తిలో ఒడుదుడుకులు విశ్లేషించడానికి పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తాయి.
5. దేశంలోని వ్యాపార పరిమాణము, ఎగుమతులు మరియు దిగుమతుల పరిమాణం తెలుసుకొనుటకు కూడా సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తారు.
6. నికర జాతీయ ఆదాయంలోని అభివృద్ధిని కొలుచుటకు సూచీ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తారు.
7. ఒక రాష్ట్రం లేక దేశం యొక్క ఆర్థిక దృగ్విషయాలు వేరొక రాష్ట్రం లేక దేశం యొక్క విషయాలతో పోల్చిచూచుటకు సూచీసంఖ్యలు ఎంతో ఉపయోగకరంగా వుంటాయి.
8. వేర్వేరు ప్రాంతాలకు, కాలాలకు చెందిన ప్రజల జీవన వ్యయాన్ని సరిపోల్చి చూచుటకు కూడా సూచీ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తారు.
9. ఆర్థిక, వ్యాపార శాస్త్రాలలోనే గాక, మానసిక శాస్త్రంలో విజ్ఞాన స్థాయిలను (Inteligent Quotient) కొలవటానికి, ఆరోగ్య శాస్త్రంలో ఆరోగ్యసూచీ (Health Index)ని కొలవడానికి, విద్యాసంస్థలలో విద్యా నిర్వహణ అభివృద్ధిని కొలవడానికి కూడా సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగిస్తారు.

ఈ విధంగా ఎన్నో ప్రయోజనాల్లో సూచీ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తున్నారు. సూచీసంఖ్యలను విరివిగా ఆర్థిక, వ్యాపార వ్యవహారాలను విశ్లేషించడానికి ఉపయోగిస్తారు కావున వాటిని 'ఆర్థిక భారమితులు' (Economic Barometers) అని తరచుగా పిలుస్తుంటారు.

11.4 సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో తీసుకోవల్సిన జాగ్రత్తలు

సూచీసంఖ్యలు నిర్మించేటప్పుడు కొన్ని ప్రత్యేకమైన జాగ్రత్తలు తీసుకోవాలి. అవి :

1. సూచీసంఖ్య నిర్మాణం యొక్క లక్ష్యం, 2. సూచీసంఖ్యలో ప్రాతినిధ్యం వహించే అంశాల నిర్ణయం, 3. ధరల సేకరణ,

4. ఆధార సమయాన్ని నిర్ణయించుట, 5. సూచీసంఖ్య నిర్మాణంలో ఏ రకమైన సగటును ఉపయోగించాలో నిర్ణయించుట.

6. సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో ఏ విధమైన 'భారాలు' ఉపయోగించాలో నిర్ణయించుట,

7. ఏ రకమైన సూచీసంఖ్యను నిర్మించాలో నిర్ణయించుట మొదలగునవి.

ఈ అంశాలను గూర్చి వివరంగా తెలుసుకుందాం.

1. **సూచీసంఖ్య నిర్మాణం యొక్క లక్ష్యం :** ఒక సూచీసంఖ్యను ఏ ప్రయోజనం ఆశించి నిర్మిస్తున్నామో ముందుగానే నిర్ణయించాలి. ఎందుకనగా, అన్ని సందర్భాలకు ఉపయోగపడే విధంగా ఒకే సూచీసంఖ్యను నిర్మించుట సాధ్యం కాదు. వేరు వేరు సందర్భాలకు, వేరు వేరు ప్రయోజనాలకు వేర్వేరు సూచీసంఖ్యలు నిర్మించాలి. ఉదాహరణకు వ్యవసాయ ఉత్పత్తులలో జరిగే మార్పును తెలుసుకోవటానికి సూచీసంఖ్యలు నిర్మించేటప్పుడు వ్యవసాయ ఉత్పత్తులకు సంబంధించిన అంశాలను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. అదే విధంగా వినియోగదారుల సూచీ నిర్మాణంలో ఒకేస్థాయి వినియోగదారులు ఉపయోగించే వస్తువుల చిల్లర ధరలను మాత్రమే పరిగణించవచవలెను. చిల్లర ధరలను మాత్రమే పరిగణించవలెను. కావున, ఏ ప్రయోజనం లేదా ఏ ఉద్దేశంతో సూచీసంఖ్యను నిర్మిస్తున్నామో ముందుగానే నిర్ణయించాలి. అప్పుడు అందుకు అనువైన సమాచారం సేకరించుటకు వీలు కలుగుతుంది. అందువలన సమయము, ధన వ్యయంలో దుబారాను నిరోధించవచ్చు.

2. **సూచీసంఖ్య ప్రాతినిధ్యం వహించే అంశాల నిర్ణయం :** సూచీసంఖ్యను ఏ ప్రయోజనం కోసం నిర్మిస్తున్నామో నిర్ణయించిన తరువాత ఆ ప్రయోజనాన్ని లేక ఉద్దేశాన్ని నెరవేర్చటానికి వీలుగా వున్న అంశాలు లేక వస్తువులను మాత్రమే పరిగణనలోకి తీసుకోవాలి. ఉదాహరణకు అధిక ఆదాయ వర్గానికి వినియోగసూచిక నిర్మించాలంటే అధిక వర్గాల వారు వినియోగించే వస్తువుల ధరలను మాత్రమే పరిగణించాలి. అన్ని వస్తువుల ధరలు పరిగణనలోకి తీసుకుని సూచీసంఖ్యను నిర్మిస్తే అది అవాస్తవ పరిస్థితిని తెలియజేస్తుంది.

3. **ధరల సేకరణ :** సూచీసంఖ్య యొక్క ఉద్దేశం, నిర్మాణంలో వినియోగించవలసిన అంశాలుగూర్చి నిర్ణయించిన తరువాత ఆ అంశాల ధరలు సేకరించుట ముఖ్యమైన పని ధరల సేకరణ చాలా జాగ్రత్తగా చేయవలెను. ఎందుకనగా ఒకే వస్తువు ధర వేర్వేరు ప్రాంతాలలో వేర్వేరుగా వుంటుంది. కానీ వివిధ ప్రాంతాల నుంచి ధరల సేకరణ చాలా కష్టం. అందువలన పరిస్థితులను బట్టి ఎక్కడ నుండి ధరలను సేకరించాలో ముందుగా నిర్ణయించుకోవాలి. ఉదాహరణకు ఒక వస్తువు అది తయారయ్యే ప్రాంతంలో తక్కువ ధరకు, మిగిలిన ప్రాంతాలలో కొంచెం ఎక్కువ ధరకు లభిస్తుంది. కాబట్టి అటువంటి వస్తువుల ధరలను నిర్ణీత ధరలకు అమ్మే ప్రాంతాల నుంచి మాత్రమే సేకరించాలి. ఒకే ప్రాంతం నుండి కాక వేర్వేరు ప్రాంతాల నుండి ధరలు సేకరించి వాటి 'సగటు'ను సూచీసంఖ్య నిర్మాణంలో ఉపయోగిస్తే మంచి ఫలితం వుంటుంది.

4. **ఆధార సమయ నిర్ణయం :** సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో 'ఆధార సంవత్సరం' లేక 'ఆధార సమయం' ఎక్కువ ప్రాముఖ్యత

వహిస్తుంది. సరైన ఆధార సమయాన్ని ఎన్నుకొని, ఉపయోగించినట్లయితే ఆ సూచీసంఖ్య ఉద్దేశించిన ప్రయోజనాలు యివ్వదు. సామాన్యంగా ఆధార సమయాన్ని ఎంచుకుంటానికి ఈ కింది విషయాలు పరిగణనలోకి తీసుకుంటారు.

(ఎ) అసాధారణమైన సంవత్సరాన్ని ఆధార సమయంగా ఎంచుకోకూడదు. అనగా కరువుకాటకాలు, వరదలు, భూకంపాలు, యుద్ధాలు, కార్మిక సంక్షోభాలు, ఆర్థిక మాంధ్యం, వ్యాపార అస్థిరతలు మొదలగు లక్షణాలు కలిగిన సంవత్సరాలను ఆధార సమయాలుగా ఎంచుకోకూడదు. ఎందుకనగా ఆ పరిస్థితులలో ధరలు, పరిమాణాలు, సామాజిక విషయాలు నిలకడ కోల్పోయి అవాస్తవికతను ప్రతిబింబిస్తాయి. కాబట్టి అటువంటి పరిస్థితులపై ఆధారపడి నిర్మించిన సూచీసంఖ్యలు అవాస్తవిక పరిస్థితులను సూచిస్తాయే కాని నిజమైన పరిస్థితిని తెలియజేయజాలవు. కానీ అన్ని విధాలా సామాన్యంగా వుండే సమయాన్ని ఆధార సమయంగా ఎంచుకోవడం ఎల్లప్పుడు సాధ్యపడదు. అటువంటి సందర్భాలలో కొన్ని సంవత్సరాల ధరల సగటును ఆధార సంవత్సర విలువగా పరిగణించి సూచీసంఖ్యలను నిర్మింపవచ్చు.

(బి) ఆధార సమయం అత్యంత దూరమైనది కాకూడదు. ఎందుకనగా సూచీసంఖ్యలు స్వల్పకాలిక నిర్ణయాలు తీసుకోవడంలోను, ప్రణాళికలు రూపొందించడంలో తోడ్పడతాయి కాబట్టి ఆధార సమయం వీలైనంత దగ్గరగా వుండాలి. ఉదాహరణకు 2000 సం॥లో వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య నిర్మించేటప్పుడు 1970వ సంవత్సరాన్ని ఆధార సమయంగా ఎన్నుకొనుట సమంజసం కాదు.

5. **ఉపయోగించవలసిన 'సగటు'ను నిర్ణయించుట :** సూచీసంఖ్య నిర్మాణంలో అంకమధ్యమం, మధ్యగతము మరియు గుణమధ్యమం మొదలగు సగటులను ఉపయోగిస్తారు. కానీ వేర్వేరు సగటులకు వేర్వేరు ప్రయోజనాలు మరియు పరిమితులుంటాయి. కాబట్టి సూచీసంఖ్య నిర్మాణ ఉద్దేశాన్ని దృష్టిలో వుంచుకొని తదనుగుణమైన సగటును ఉపయోగించుట వలన సరైన ప్రయోజనం పొందవచ్చు.

సంకేతాలు (Notations) : సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో కొన్ని సంకేతాలను ఉపయోగిస్తారు. అవి :

1. వర్తమాన సంవత్సరాన్ని లేదా సమయాన్ని (Current Year) '1'తో సూచిస్తారు.
2. ఆధార సంవత్సరాన్ని లేదా సమయాన్ని (Base Year) 'O' తో సూచిస్తారు.
3. ఆధార సంవత్సరాన్ని లేదా సమయంలోని ధరను p_0 చే మరియు వర్తమాన సమయంలో ధరను p_1 చే సూచిస్తారు.
4. ఆధార సమయంలోని పరిమాణాన్ని q_0 చే మరియు వర్తమాన సమయంలో పరిమాణాన్ని q_1 చే సూచిస్తారు.
5. ఆధార సమయంలోని వస్తువుల ధరల మొత్తాన్ని Σp_0 చేతనూ, వర్తమాన సమయంలో వస్తువుల ధరల మొత్తాన్ని Σp_1 చేత సూచిస్తారు.
6. వర్తమాన సంవత్సర ధరల సూచీసంఖ్యను P_{01} చేతనూ, వర్తమాన సంవత్సర పరిమాణ సూచీసంఖ్యను Q_{01} చేతనూ, వర్తమాన సంవత్సర విలువల సూచీసంఖ్యను V_{01} చేత సూచిస్తారు.

ఆధార సమయాన్ని ఎంపిక పద్ధతులు : సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో ఆధార సమయం ఎన్నిక చాలా ముఖ్యమైనది. ఎన్నిక చేయబడిన ఆధార సమయం ఏ విధమైన వైపరీత్యాలకు లోను కానిదై వుండాలి. ధరల సూచీసంఖ్య నిర్మిస్తున్నప్పుడు యుద్ధాలు, కరువు, భూకంపాలు, వరదలు లేక ఆర్థిక మాంద్యం మొదలగు వైపరీత్యాలు కలిగిన సమయాన్ని ఆధార సమయంగా ఎంచుకుంటే ఆ వైపరీత్యాల ప్రభావం ధరలపైబడి సూచీసంఖ్య వాస్తవానికి దూరమై నిరుపయోగమవుతుంది. కావున 'ఆధారంగా' ఎంపిక చేసే సమయం అన్ని విషయాలలోనూ ఏ విధమైన ఒడుదుడుకులు లేని సామాన్య సమయం అయి వుండాలి.

ఆధార సమయాన్ని మూడు విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చు. అవి : 1. స్థిర ఆధార పద్ధతి (Fixed Base Method), 2. లింక్ ఆధార పద్ధతి (Linc Base Method) 3. గొలుసు ఆధార పద్ధతి (Chain Base Method), 4. సగటు ఆధార పద్ధతి (Average Base Method)

1. స్థిర ఆధార పద్ధతి (Fixed Base Method) : ఈ పద్ధతిలో ఆధార సమయం స్థిరంగా వుంటుంది. అనగా నిర్ణయించబడిన ఆధార సమయాన్ని మార్చకుండా సూచీ సంఖ్యలను నిర్మిస్తారు. ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన సమయంలోని విలువను, ఆధార సమయంలో విలువచే భాగించగా వచ్చిన మొత్తాన్ని నూరుచే గుణించి సూచీని కనుక్కొంటాము. అనగా

$$\text{అస్థిర ఆధార ధరల సూచీసంఖ్య} = \frac{\text{వర్తమాన సమయంలో ధర}}{\text{స్థిర ఆధార సమయంలో ధర}} \times 100 = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

$$\text{అట్లే స్థిర ఆధార పరిమాణ సూచీసంఖ్య} = \frac{\text{వర్తమాన సమయంలో పరిమాణం}}{\text{స్థిర ఆధార సమయంలో పరిమాణం}} \times 100 = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

2. లింక్ ఆధార పద్ధతి (Link Based Method) : ఒక వస్తువు యొక్క ధరలో వచ్చిన మార్పులను ఏడాది, ఏడాదికి పోల్చి చూడాలనుకున్నప్పుడు సూచీసంఖ్యలను గొలుసు ఆధార పద్ధతిలో నిర్మిస్తారు. ఈ పద్ధతిలో ఆధార సమయం స్థిరంగా వుండదు. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సరం ఆ తరువాత వచ్చే సంవత్సరానికి ఆధార సమయం అవుతుంది. ఉదాహరణకు **1995** సంవత్సరానికి **1994** సంవత్సరం ఆధార సమయం అవుతుంది. అదే విధంగా **1996**కు, **1995** ఆధార సమయం అవుతుంది. ఈ విధంగా ఒక సమయం స్థిర ఆధార సమయంగా వుండదు.

$$\text{లింక్ ధర సూచీ} = \frac{\text{వర్తమాన సంవత్సర ధర}}{\text{గత సంవత్సర ధర}} \times 100 = \frac{p_1}{p_0} \times 100$$

$p_1 =$ వర్తమాన సంవత్సర ధర, $p_0 =$ గత సంవత్సర ధర

3. గొలుసు పద్ధతి (Chain Base Method) : ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సర అంకెలను గత సంవత్సర విలువతో శాతంగా మొదట చూపాలి. ఈ గత సంవత్సర శాతాన్ని తరువాత సంవత్సరాలను నిర్మించే సూచీతో గుణిస్తూ పోతే గొలుసు సూచీ ఏర్పడుతుంది. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సరము ఆధార, వర్తమాన సంవత్సరాలు మారుతూ వుంటాయి.

$$\text{గొలుసు సూచీ} = \frac{\text{గత సంవత్సర గొలుసు} \times \text{వర్తమాన సంవత్సర లింక్}}{100} \quad \text{లేదా}$$

$$\text{గత సంవత్సర గొలుసు} \times \frac{\text{వర్తమాన సంవత్సర ధర}}{\text{గత సంవత్సరం ధర}}$$

4. సగటు ఆధార పద్ధతి (Average Base Method) : ఈ పద్ధతిలో యివ్వబడిన అన్ని సంవత్సరాలలో 'ధరల సగటు'ను ఆధార సమయంలోని ధరగా తీసుకుంటారు. ఈ విధంగా చేయుట వల్ల ఏదైనా ఒక సంవత్సరంలో ప్రకృతి వైపరీత్యాలు వున్నా వాటి ప్రభావం తగ్గించబడుతుంది.

$$\text{సగటు ఆధార సూచీ} = \frac{\text{వర్తమాన సంవత్సర ధర}}{\text{అన్ని సంవత్సరాల సగటు ధర}} \times 100$$

ఈ వివిధ సాపేక్షకాలను కనుగొనే విధానాన్ని సరళ లేదా వ్యక్తిగత అంశాల సూచీ నిర్మాణం నందు ఉదాహరణలతో వివరించటం జరిగింది.

11.5 సరళ లేదా సాధారణ లేదా వ్యక్తిగత అంశాల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణం (Construction of Simple Index Numbers)

ఒకే ఒక వస్తువుకు సంబంధించిన ధరలు, పరిమాణం మొదలగు దత్తాంశం ఆధారంగా నిర్మించబడే సూచీసంఖ్యలను సరళసూచీ సంఖ్యలంటారు. ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఎక్కువగా వాడుకలో వుంటాయి. కాబట్టి ఈ పాఠంలో ధరల సూచీసంఖ్యలకు ప్రాముఖ్యతనిచ్చి వాటి నిర్మాణం విపులంగా వివరించబడ్డాయి.

11.5.1 స్థిర ఆధార పద్ధతిలో సరళసూచీ సంఖ్యలను నిర్మించుట : ఆధార సమయాన్ని నాలుగు విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చని యింతకుముందే తెలుసుకున్నాం. వాటిలో స్థిర ఆధార పద్ధతి ఒకటి. దిగువ దత్తాంశంలో బియ్యం ధరలు ఒక క్వింటాకి రూపాయలు 1995 నుంచి 2000 సం॥రము వరకు యివ్వబడ్డాయి. 1995 సంవత్సరాన్ని ఆధార సమయం లేక ఆధార సంవత్సరంగా పరిగణిస్తూ సరళ సూచీ సంఖ్యలు ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

ఒక వస్తువు యొక్క సరళ సూచీ సంఖ్యను వర్తమాన సంవత్సరంలో ఆ వస్తువు ధరను, ఆధార సంవత్సరంలోని ధరచే భాగించి, 100చే గుణించుట ద్వారా కనుగొనవచ్చు.

సంకేతాలలో ఆధార సంవత్సరంలో ధర : p_0, వర్తమాన సంవత్సరంలో ధర : p_1

అయితే సరళ ధర సూచీసంఖ్య $P_{01} = \dfrac{\text{వర్తమాన సంవత్సరంలో ధర}}{\text{ఆధార సంవత్సరంలో ధర}} \times 100 = \dfrac{p_0}{p_1} \times 100$

సంవత్సరం	బియ్యం ధర (రూ॥లలో)	స్థిర ఆధార సాపేక్ష ధరలు
1995	500	$\frac{500}{500}\times 100 = 100.00$
1996	480	$\frac{480}{500}\times 100 = 96.00$
1997	610	$\frac{610}{500}\times 100 = 112.00$
1998	550	$\frac{550}{500}\times 100 = 110.00$
1999	650	$\frac{650}{500}\times 100 = 130.00$
2000	740	$\frac{740}{500}\times 100 = 148$

ఈ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి సూచీ సంఖ్యలు ఈ కింది విధంగా లెక్కించవచ్చు.

1995 సం॥నికి ధరల సూచీ సంఖ్య $= \dfrac{500}{500} \times 100$

(యిక్కడ వర్తమాన కాలంలో ధర కూడా రూ॥ 500లు అయినది)

1996 సం॥నికి ధరల సూచీ సంఖ్య $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$$= \frac{480}{500} \times 100 = 96$$

1997 సం॥నికి ధరల సూచీ సంఖ్య $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$

$$= \frac{610}{500} \times 100 = 112$$

మిగిలిన సం॥లకు లెక్కించిన ధరల సూచీ సంఖ్యలు పై పట్టికలో చూపబడినది.

పై ఉదాహరణ నుండి 1995వ సం॥ నుండి 1996 సం॥నికి బియ్యం ధర 1 క్వింటాకి 4 శాతం తగ్గినట్లు, 1995 నుండి 1997కు 12%, 1998కి 10 శాతం, 1999కి 30 శాతం, 2000కి 148 శాతం పెరిగినట్లు గమనించవచ్చు.

11.5.2 లింక్ ఆధార పద్ధతిలో సరళ సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించుట : లింక్ ఆధార పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుట వలన వర్తమాన సం॥నికి, గడచిన సం॥రానికి మధ్య వచ్చిన తేడాను తెలుసుకోవచ్చు. స్థిర ఆధార పద్ధతిలో ఈ విధమైన తేడాను కనుగొనుట వీలుపడదు. ఆధార సంవత్సరం వర్తమాన సంవత్సరానికి దూరంగా వుంటే స్థిర ఆధార పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య నిరుపయోగం అవుతుంది. లింక్ ఆధార పద్ధతి స్థిర ఆధార పద్ధతిలోని ఈ విధమైన లోపాలను అధిగమిస్తుంది. ఈ పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలను లింక్ సూచీ సంఖ్యలంటారు (Link Index Number).

ఈ పద్ధతిలో సరళ ధరల సూచీ సంఖ్యను వర్తమాన కాలం ధరల సాపేక్షకాన్ని, గడచిన సంవత్సర గొలుసు సూచీ సంఖ్యచే గుణించి వచ్చిన లబ్దాన్ని 100చే భాగించి లెక్కిస్తారు.

$$\text{లింక్ ధరల సూచీ సంఖ్య} = \frac{\text{వర్తమాన సంవత్సర ధర}}{\text{గత సంవత్సరం ధర}} \times 100$$

11.5.3 గొలుసు సూచీ : ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సర అంకెలను గత సంవత్సర విలువతో శాతంగా మొదట చూపాలి. ఈ గత సంవత్సర శాతాన్ని తరువాత సంవత్సరాలను నిర్మించే సూచీతో గుణిస్తూ పోతే గొలుసు సూచీ ఏర్పడుతుంది. ఈ పద్ధతిలో ప్రతి సంవత్సరము ఆధార, వర్తమాన సంవత్సరాలు మారుతూ వుంటాయి.

$$\text{గొలుసు సూచీ} = \frac{\text{గత సంవత్సర గొలుసు సూచీ} \times \text{వర్తమాన సంవత్సర లింక్ సూచీ}}{100} \quad \text{లేదా}$$

$$= \text{గత సంవత్సర గొలుసు} \times \frac{\text{వర్తమాన సంవత్సర ధర}}{\text{గత సంవత్సరం ధర}}$$

ఉదాహరణకు ఈ దిగువ దత్తాంశానికి గొలుసు సూచీ సంఖ్యలు ఎలా నిర్మించాలో చూద్దాం.

సం॥రం	బియ్యం ధర రూ॥లో (1 క్వింటా)	లింక్ సూచీ	గొలుసు ధరల సూచీ సంఖ్య
1995	500	$\frac{500}{500} \times 100 = 100$	100

1996	480	$\frac{480}{500}\times 100 = 96$	$\frac{96\times 100}{100} = 96$
1997	610	$\frac{610}{480}\times 100 = 127.08$	$\frac{127.08\times 96}{100} = 121.99$
1998	550	$\frac{550}{610}\times 100 = 90.16$	$\frac{90.16\times 121.99}{100} = 109.99$
1999	650	$\frac{650}{550}\times 100 = 118.18$	$\frac{118.18\times 109.99}{100} = 129.99$
2000	740	$\frac{740}{650}\times 100 = 113.85$	$\frac{113.85\times 129.99}{100} = 147.99$

11.5.4 సగటు ఆధార పద్ధతిలో సరళ సూచీ సంఖ్య నిర్మించుట : ఈ పద్ధతి నుపయోగించి సరళ ధరల సూచీ సంఖ్య ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం. ఈ పద్ధతిలో యివ్వబడిన అన్ని సంవత్సరాలలోని ధరల సగటు విలువను ఆధార సంవత్సరంగా భావిస్తాము. ఉదాహరణకు పైన యివ్వబడిన దత్తాంశానికి సగటు ఆధార పద్ధతిలో సూచీ సంఖ్యను నిర్మించే విధానం చూడండి.

సంవత్సరం	వస్తువు ధర రూ॥లో	సగటు ధర రూ॥లో	సూచీ సంఖ్యలు
1995	500		$\frac{500}{588.3}\times 100 = 84.99$
1996	480		$\frac{480}{588.3}\times 100 = 81.59$
1997	610		$\frac{610}{588.3}\times 100 = 103.69$
1998	550		$\frac{550}{588.3}\times 100 = 93.49$
1999	650		$\frac{650}{588.3}\times 100 = 110.48$
2000	740		$\frac{740}{588.3}\times 100 = 125.79$

11.6 సంయుక్త లేదా సమిష్టి సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు

(Methods of Constructing Complex Index Number)

కొన్ని వస్తువుల సముదాయం యొక్క దత్తాంశము పై ఆధారపడి నిర్మించే సూచీ సంఖ్యలను సంయుక్త లేదా సమిష్టి సూచీ సంఖ్యలు అంటారు. ఒక్కొక్కసారి కొన్ని వస్తు సముదాయాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకుంటూ, వాటి సముదాయానికి ధరల పరిమాణం

లేక విలువల సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించాల్సిన అవసరం ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణకు వినియోగదారుల సూచీ సంఖ్య. దీని నిర్మాణంలో తత్సంబంధిత వినియోగదారుడు ఉపయోగించే అన్ని వస్తువులు ధరలు, పరిమాణాలు పరిగణలోకి తీసుకుని సూచీ సంఖ్యను నిర్మించాల్సి వస్తుంది. ఈ భాగంలో ఆ రకమైన సంయుక్త సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణ పద్ధతులు గూర్చి తెలుసుకుందాం.

సంయుక్త సూచీ సంఖ్యలను రెండు రకాలుగా విభజించవచ్చు. అవి -

1. భారరహిత సూచీ సంఖ్యలు (Un - Weighted Index Numbers)
2. భారిత సూచీ సంఖ్యలు (Weighted Index Numbers)

1. భారరహిత సూచీ సంఖ్యలు (Un - Weighted Index Numbers): భారరహిత సూచీ సంఖ్యలను రెండు విధాలుగా నిర్మించవచ్చు. అవి ఏవనగా -

ఎ. సామాన్య లేదా సరళ సమిష్టి పద్ధతి (Simple Aggragate Method)

బి. సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతి (Average Price Relatives Method)

ఎ. సామాన్య లేదా సరళ సమిష్టి పద్ధతి : భారరహిత సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించటానికి యిది అతి తేలికైన పద్ధతి. వస్తు సముదాయం యొక్క వర్తమాన సం॥లోని ధరల మొత్తాన్ని (Σp_1) , ఆధార సం॥రం ధరల మొత్తం (Σp_0) చే భాగించగా వచ్చిన ఫలితాన్ని 100చే గుణించి లెక్కించినట్లయితే సామాన్య లేదా సరళ సమిష్టి పద్ధతి ద్వారా ధర సూచీ లభ్యమవుతుంది.

సంకేతాలలో -

$\sum p_1$ = వర్తమాన సం॥లో వస్తువుల ధరల మొత్తం

$\sum p_0$ = ఆధార సం॥లో వస్తువుల ధరల మొత్తాన్ని

P_{01} = సరళ సమిష్టి పద్ధతి ద్వారా ధర సూచీ సంఖ్య

$$P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$$

అనగా ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన సం॥లో ధరల సూచీ సంఖ్యను వస్తువుల వర్తమాన ధరల మొత్తాన్ని ఆధార సం।లో ధరల మొత్తానికి శాతంగా చూపిస్తారు.

ఒక ఉదాహరణ ద్వారా 1995 సం॥ ఆధార సం।రగా భారరహిత ధరల సూచీ సంఖ్యను ఎలా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

వస్తు సముదాయం	**ధరలు రూపాయలలో**	
	1995లో ధరలు (p_0)	**2000లో ధరలు** (p_1)
బియ్యం	400	510
గోధుమలు	300	420
పంచదార	600	710
బంగాళా దుంప	100	150
కందిపప్పు	250	400
మొత్తం	**1650** (Σp_0)	**2190** (Σp_1)

1995 సం॥రం ఆధార సంవత్సరంగా తీసుకుంటే

ఆధార సం॥లో వస్తువుల ధరల మొత్తం $= \sum p_0 = 1650$

వర్తమాన సం॥రం 2000లో వస్తువుల ధరల మొత్తం $= \sum p_1 = 2190$

2000 సం॥రానికి ధరల సూచీ సంఖ్య $= P_{01} = \frac{\sum p_1}{\sum p0} \times 100$

పై సూత్రంలో విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $P_{01} = \frac{2190}{1650} \times 100$

$= 132.73$

బి. సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతి (Average Price Relatives Method) **:** ఈ పద్ధతిలో భారరహిత ధరల సూచీ సంఖ్యను కనుగొనేందుకు మొదట వస్తువుల ధరల సాపేక్షకాలు కనుగొని ఆ తరువాత వాటి సగటును కనుగొనుట ద్వారా నిర్మిస్తారు. సగటు అనగా అది కేంద్ర స్థానపు కొలతలలో ఏదైనా కావచ్చు. కానీ ఎక్కువగా అంకమధ్యమం గాని, గుణ మధ్యమం గాని లేక హర మధ్యమం గాని వాడుతుంటారు.

అంకమధ్యమం ద్వారా

అంకమధ్యమాన్ని సగటుగా ఉపయోగించి ధరల సూచీ సంఖ్యను ధరల సాపేక్షకాల మొత్తాని వస్తువుల మొత్తం సంఖ్యచే భాగించి కనుగొనవచ్చు. దీనినే సంకేతాలలో క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$\frac{p_1}{p_0} \times 100$ = ధర సాపేక్షికం

ధరల సాపేక్షకాల మొత్తం $= \sum \frac{p_1}{p_0} \times 100$, వస్తువుల మొత్తం సంఖ్య $= N$ అయితే

ధరల సూచీ సంఖ్య $= P_{01} = \frac{\sum \frac{p_1}{p_0} \times 100}{N}$

దిగువ దత్తాంశానికిసాపేక్షకాల సగటు పద్ధతిని అంకమధ్యమాని ఉపయోగిస్తూ ధరల సూచీ సంఖ్య ఏ విధంగా నిర్మించాలో తెలుసుకుందాం.

వస్తువుల సముదాయం	1995లో ధరలు	2000లో ధరలు
బియ్యం	120	200
పప్పులు	70	95
కూరగాయలు	50	70
పంచదార	60	110
కిరసనాయిలు	20	40

అంకమధ్యమాన్నుపయోగించి 1995 సం॥ ఆధార సంవత్సరంగా ధరల సూచీ సంఖ్య కనుగొనుట.

వస్తు సముదాయం	**1995లో (ఆధా॥ సం॥)** **ధరలు** (p_0)	**2000 సం॥లో** **ధరలు** (p_1)	**ధరల సాపేక్షకాలు** $\frac{p_1}{p_0}\times 100$
బియ్యం	120	200	$\frac{200}{120}\times 100 = 166.67$
పప్పులు	70	95	$\frac{95}{70}\times 100 = 135.71$
కూరగాయలు	50	70	$\frac{70}{50}\times 100 = 140.00$
పంచదార	60	110	$\frac{110}{60}\times 100 = 183.33$
కిరసనాయిలు	20	40	$\frac{40}{20}\times 100 = 200.00$
$N = 5$			$\Sigma\frac{p_1}{p_0}\times 100 = \mathbf{825.71}$

ధరల సూచీ సంఖ్య $= P_{01} = \dfrac{\sum \frac{p_1}{p_0}\times 100}{N} = \dfrac{825.71}{5} = 165.14$

గుణమధ్యమం ద్వారా

సాపేక్షకాలు సగటు పద్ధతిలో సగటుగా గుణ మధ్యమాన్ని ఉపయోగించిన యెడల ధరల సూచీ సంఖ్య సూత్రం క్రింది విధంగా వుంటుంది.

$$\log P_{01} = \frac{\sum \log\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{N}$$

లేక

$$P_{01} = \text{Anti log of}\left[\frac{\sum \log\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)}{N}\right]$$

ఉదాహరణకు ఈ దిగువ ఇచ్చిన దత్తాంశానికి సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతిలో గుణ మధ్యమాన్ని ఉపయోగించి ధరల సూచీ సంఖ్య ఎలా లెక్కించాలో తెలుసుకుందాము.

వస్తు సముదాయం	**1995లో ధరలు రూ॥ (p_0)**	**2000లో ధరలు రూ॥లో (p_1)**	**ధరల సాపేక్షకాలు $\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)$ (1995 ఆధార సం॥గా)**	**సాపేక్షకాల సంవర్గమానాలు విలువ**
A	400	620	$\frac{620}{400}\times 100 = 155$	2.1903
B	200	280	$\frac{280}{200}\times 100 = 140$	2.1461
C	150	275	$\frac{275}{150}\times 100 = 183.33$	2.2632
D	300	430	$\frac{430}{300}\times 100 = 143.33$	2.1562
E	100	140	$\frac{140}{100}\times 100 = 140$	2.1461
$N = 5$				$\Sigma \log \frac{p_1}{p_0}\times 100 = \mathbf{10.9019}$

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య } = P_{01} = \text{Anti log}\left[\frac{\sum \log \frac{p_1}{p_0}\times 100}{N}\right] = \text{Anti log of}\left[\frac{10.9019}{5}\right]$$

$$= \text{Anti log of } [2.18038]$$

$$= 151.5$$

ఈ పద్ధతిలో అంకమధ్యమం సగటుగా వుపయోగించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్య కన్నా గుణ మధ్యమం సగటుగా వుపయోగించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్య మెరుగైనది. ఎందుకనగా అంకమధ్యమంలో అతి తక్కువ లేక అతి ఎక్కువ విలువల ప్రభావం వుంటుంది. కాని గుణ మధ్యమంలో ఆ విలువల ప్రభావం శూన్యం.

2. భారిత సూచీ సంఖ్యలు (Weighted - Index Numbers): పైన వివరించిన సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో వస్తు సముదాయంలోని వస్తువులన్నింటికి సమానమైన ప్రాధాన్యత యివ్వబడింది. సూచీ సంఖ్య నిజమైన ప్రయోగకారిగా వుండాలంటే దత్తాంశంలోని ప్రతి వస్తువుకు దాని ప్రాముఖ్యతను బట్టి ప్రాధాన్యత నివ్వవలసి వుంటుంది. భారిత సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో వస్తు సముదాయంలోని వివిధ వస్తువులకు వాటి వాటి ప్రాముఖ్యతననుసరించి భారాలు యిస్తారు. భారిత సూచీ సంఖ్యలను రెండు విధాలుగా నిర్మించవచ్చు.

ఎ. భారిత సమిష్టి పద్ధతి (Weighted Aggragate Method)

బి. భారిత సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతి (Weighted Average of Price Relatives Method)

ఎ. భారిత సమిష్టి పద్ధతి : సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలకు భారాలను ఆపాదిస్తే అవి భారిత సమిష్టి పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యలౌతాయి. వస్తువులకు భారాలను వివిధ రకాలుగా ఆపాదించవచ్చు. భారాలు ఆపాదించే విధానాన్ని బట్టి భారిత సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో చాలా పద్ధతులున్నాయి. అవి -

i. లాస్పియర్ పద్ధతి (Laspeyer's Method)

ii. పాషె పద్ధతి (Paasche's Method)

iii. బౌలీ పద్ధతి (Bowley's Method)

iv. మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి (Marshall - Edgeworth's Method)

v. ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి (Fisher's Ideal Method)

vi. కెల్లీ పద్ధతి (Kelly's Method)

vii. వాల్ష్ పద్ధతి (Ealsh's Method)

i. లాస్పియర్ పద్ధతి(Laspeyer's Method**) :** ఈ పద్ధతిని లాస్పియర్ అనే జర్మనీ దేశ ఆర్థిక శాస్త్రవేత్త రూపొందించాడు. ఈ పద్ధతిలో ధర సూచీని నిర్మించేందుకు ఆధార సం॥లో వస్తువుల పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు. ఈ పద్ధతినుపయోగించి నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య అని అంటారు. ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన సంవత్సరంలోని వస్తువుల ధరలను ఆధార సంవత్సర పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని $(\Sigma p_1 q_0)$ ఆధార సంవత్సర వస్తువుల ధరలను ఆధార సం॥ర పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తంచే $(\Sigma p_0 q_0)$ భాగించి, వచ్చిన ఫలితాన్ని 100 చే గుణించి ధర సూచీ కనుగొంటారు. దీనినే సంకేతాలలో కింది విధంగా వ్రాయవచ్చు.

$$\text{లాస్పియర్ ధరల సూచీ సంఖ్య} = P_{01}^{\boxed{L}} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$P_{01}^{\boxed{L}}$ = లాస్పియర్ ధర సూచీసంఖ్య

$\Sigma p_1 q_0$ = వర్తమాన కాలంలో ధరలను ఆధార సం॥లో పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము.

$\Sigma p_0 q_0$ = ఆధార సం॥లోని ధరలను ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తము

ఈ పద్ధతి చాలా తేలికైనది మరియు అధికంగా ఆచరించబడుతుంది. ఎందుకనగా ఈ పద్ధతిలో భారాలు స్థిరంగా వుంటాయి.

ii. పాషే పద్ధతి (Paasche's Method): పాషేఅనే జర్మనీ సాంఖ్యక శాస్త్రజ్ఞుడు ఈ పద్ధతిని ప్రవేశపెట్టాడు. ఈ పద్ధతిలో ధర సూచీని నిర్మించేందుకు వర్తమాన కాలంలో పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకుంటారు. ఈ విధంగా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను పాషే సూచీ సంఖ్య అని అంటారు. వర్తమాన కాలంలోని ధరలను వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని $(\Sigma p_1 q_1)$, ఆధార సం॥లోని ధరలను వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం $(\Sigma p_0 q_1)$ చే భాగించగా వచ్చిన దానిని 100చే గుణించి కనుగొంటారు. దీనినే సంకేతాలలో

పాషే ధరల సూచీ సంఖ్య $= P_{01}^{\boxed{P}} = \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100$

ఇక్కడ, $P_{01}^{\boxed{P}}$ = పాషే ధర సూచీ సంఖ్య

$\sum p_1q_1$ = వర్తమాన కాలంలోని ధరలను వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

$\sum p_0q_1$ = అధార సం॥లో ధరలను వర్తమాన కాలం పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య కన్నా పాషే సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం కొంచెం కష్టతరమైనది. ఎందుకనగా పాషే సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలు అవసరమౌతాయి. యివి స్థిరంగా ఉండవు. ప్రతి సంవత్సరం మారుతూ వుంటాయి. కొన్ని సందర్భాలలో వీటి సేకరణ కష్టమౌతుంది.

లాస్పియర్ మరియు పాషే సూచీ సంఖ్యల పోలిక

1. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం పాషే సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం కన్నా తేలిక.
2. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలో ఆధార సమయంలోని పరిమాణాలు భారాలు ఉపయోగిస్తారు. కాని పాషే సూచీ సంఖ్యలో వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలు భారాలుగా ఉపయోగిస్తారు.
3. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో భారాలు స్థిరంగా వుంటాయి. పాషే సూచీ సంఖ్యలో భారాలు స్థిరంగా వుండవు.
4. ఆధార సం॥లోని పరిమాణాలు భారాలుగా తీసుకోవటం, వలన లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలో వర్తమాన కాలంలోని ధరలకు సాపేక్షంగా ఎక్కువ ప్రాధాన్యత యిచ్చినట్లౌతుంది. అందువలన $\sum p_1q_0$ సాపేక్షికంగా ఎక్కువ విలువ కలిగి ఉంటుంది. అందువలన లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య ఊర్ధ్వ పాక్షికతను (upward - Baise) కలిగి ఉంటుంది.

అదే పాషే సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వర్తమాన కాలంలోని పరిమాణాలు భారాలుగా తీసుకోవటం వలన ఆధార సం॥లోని ధరలకు అధిక ప్రాధాన్యత నిచ్చినట్లే అవుతుంది. అందువలన $\sum p_0q_1$ విలువ పెరుగుతుంది. అందుచే పాషే సూచీ సంఖ్యను అధోఃపాక్షితను (downward - baise) కలిగి ఉంటుంది.

iii. బౌలీ పద్ధతి (Bowley's Method) : లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలోని ఊర్ధ్వ పాక్షికతలను పాషే సూచీ సంఖ్యలోని అధోఃపాక్షికతను సమం చేస్తూ డోర్‌బిష్, బౌలీలు ఈ రెండు సూచీ సంఖ్యల అంకమధ్యమాన్ని సూచీ సంఖ్యగా ప్రతిపాదించారు. దీనినే డోర్‌బిష్ - బౌలీ సూచీ సంఖ్య అంటారు.

లాస్పియర్ మరియు పాషే సూచీ సంఖ్యల అంకమధ్యమమే, బౌలీ సూచీ సంఖ్య అవుతుంది. అనగా, లాస్పియర్ మరియు పాషే సూచీ సంఖ్యల మొత్తాన్ని రెండు (2) చే భాగించగా బౌలీ సూచీ సంఖ్య వస్తుంది. సంకేతాలలో,

బౌలీ ధరల సూచీ సంఖ్య = $P_{01}^{\boxed{B}} = \dfrac{\text{లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య + పాషే సూచీ సంఖ్య}}{2}$

$$= \frac{P_{01}^{\boxed{L}} + P_{01}^{\boxed{P}}}{2} = \frac{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times 100 + \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1} \times 100}{2}$$

లేదా $= \dfrac{\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}{2} \times 100$

iv. మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి (Marshall - Edgeworth Method) : ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన కాలం మరియు ఆధార సం॥లోని పరిమాణాల మొత్తం గాని లేక వాటి సగటును గానీ భారాలుగా పరిగణిస్తారు. ఈ విధంగా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ సంఖ్య అని అంటారు. లాస్పెయర్, పాషె ధర సూచీ సంఖ్యల లవాల మొత్తాన్ని $(\Sigma p_1q_0 + \Sigma p_1q_1)$ హారాల మొత్తంతో $(\Sigma p_0q_0 + \Sigma p_0q_1)$ భాగించి 100తో గుణిస్తే మార్షల్, ఎడ్జ్‌వర్త్ సూచీ లభ్యమవుతుంది లేదా వర్తమాన కాలం ధరలను, వర్తమాన కాలం మరియు ఆధార సం॥లోని పరిమాణాల మొత్తంచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాలను మొత్తాన్ని $\left[\Sigma p_1(q_0 + p_1)\right]$ ఆధార సం॥లోని ధరలను, వర్తమాన కాలం మరియు ఆధార సం॥లోని పరిమాణాల మొత్తంచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తంచే $\left[\Sigma p_0(q_0 + q_1)\right]$ భాగించి 100చే గుణిస్తే మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ ధరల సూచీ సంఖ్య వస్తుంది. దీనినే సంకేతాలలో

$$P_{01}^{\boxed{M\&E}} = \frac{\sum p_1(q_0 + q_1)}{\sum p_0(q_0 + q_1)} \times 100$$

ఇక్కడ, $\sum p_1(q_0 + q_1)$ = వర్తమాన కాల ధరను మరియు వర్తమాన కాల, ఆధార సం॥ పరిమాణాల మొత్తాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

v. ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి (Fisher's Ideal Method) : దీనిని ఫిషర్ అనే ప్రఖ్యాత సాంఖ్యక శాస్త్రవేత్త ప్రతిపాదించాడు. లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్యలోని ఊర్ధ్వ పాక్షితను, పాషే సూచీ సంఖ్యలోని అధః పాక్షితను సవరిస్తూ వాటి గుణమధ్యమాన్ని ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యగా సూచించాడు. దీనినే ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అని కూడా అంటారు.

లాస్పియర్ మరియు పాషే సూచీ సంఖ్యల గుణ మధ్యమాన్ని లెక్కించి ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు. అనగా లాస్పియర్ మరియు పాషే సూచీ సంఖ్యలను గుణించగా వచ్చిన లబ్దం యొక్క వర్గ మూలమే ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అవుతుంది.

సంకేతాలలో

$$P_{01}^{\boxed{f}} = \sqrt{\text{లాస్పియర్ సూచీ సంఖ్య} \times \text{పాషే సూచీ సంఖ్య}} = \sqrt{P_{01}^{\boxed{L}} \times P_{01}^{\boxed{P}}} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

$P_{01}^{\boxed{f}}$ = ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య

ఒక సూచీ సంఖ్య ఆదర్శమైనదా? కాదా? అని తెలుసుకోటానికి ఫిషర్ మూడి విపర్యయ పరీక్షలు (Reversal Tests) ప్రతిపాదించాడు. ఆ పరీక్షలలో మిగిలిన సూచీ సంఖ్యల కన్నా ఫిషర్ పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య ఎక్కువ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది. కావున ఫిషర్ సూచీ సంఖ్యను ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య అని అంటారు.

vi. కెల్లీ పద్ధతి (Kelly's Method) : ఈ శాస్త్రవేత్త భారాలు అన్ని సం॥రాలకు స్థిరంగా వుండాలే కాని నిర్దిష్టంగా ఆధార సం॥లో పరిమాణాలు గాని లేక వర్తమాన కాలంలో పరిమాణాలు గాని కావాల్సిన అవసరం లేదని ప్రతిపాదించాడు. ఇతడు ఆధార, వర్తమాన

సంవత్సర పరిమాణాల అంకమధ్యమాన్ని భారాలుగా తీసుకుంటాడు. అంతేకాక రెండు లేక మూడు సం॥రాల పరిమాణాల అంకమధ్యమాన్ని భారాలుగా ఉపయోగించవచ్చునని తెలిపాడు. ఈ పద్ధతి ద్వారా నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను స్థిర భార సమిష్టి సూచీ సంఖ్యని అంటారు. వర్తమాన సంవత్సర ధరలను భారాలతో $\left(\frac{q_0+q_1}{2}\right)$ గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తాన్ని ఆధార సంవత్సర ధరలను భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తంతో భాగించి 100తో గుణిస్తే కెల్లీ ధర సూచీ లభ్యమవుతుంది.

సూత్రం $P_{01}^{\boxed{K}} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100$

q : రెండు సం॥రాల పరిమాణాల అంకమధ్యమం $= \frac{q_0+q_1}{2}$

vii. వాల్ష్ పద్ధతి (Walsh Method) : ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన కాలం మరియు ఆధార సం॥లోని పరిమాణాల గుణ మధ్యమాన్ని భారాలు పరిగణించాలని వాల్ష్ శాస్త్రజ్ఞుడు ప్రతిపాదించాడు. ఈ పద్ధతి ప్రకారం నిర్మించిన సూచీ సంఖ్యను వాల్ష్ సూచీ సంఖ్య అంటారు.

వర్తమాన కాల మరియు ఆధార సం॥లో పరిమాణాల గుణ మాధ్యమాన్ని, వర్తమాన కాల ధరలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని, అదే గుణ మధ్యమాన్ని ఆధార సం॥లో ధరలచే గుణించి వచ్చిన లబ్దాల మొత్తంచే భాగించి వచ్చిన దానిని 100 చేత గుణించి ఈ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్యను కనుగొనవచ్చు. గుర్తులు ఉపయోగించి

$$P_{01}^{\boxed{w}} = \frac{\sum p_1\sqrt{q_0 q_1}}{\sum p_0\sqrt{q_0 q_1}} \times 100$$

$P_{01}^{\boxed{w}}$ = వాల్ష్ ధర సూచీ

$\Sigma p_1\sqrt{q_0\ q_1}$ = వర్తమాన ధరలను భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం

$\Sigma p_0\sqrt{q_0\ q_1}$ = ఆధార ధరలను భారాలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్ధాల మొత్తం

కొన్ని ఉదాహరణల ద్వారా వివిధ భారిత ధరల సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించు విధము తెలుసుకుందాము.

ఉదా॥ 1 - దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశానికి 1995 సం॥ ఆధారంగా ఎన్నుకొని లాస్పియర్ ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	**ధరలు రూ॥లో**		**1995 సం॥లో**
	1995 సం॥లో	**2000 సం॥ లో**	**పరిమాణాలు**
A	50	70	10
B	60	84	15
C	35	29	5

జవాబు : లాస్పియర్ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య నిర్మాణ పట్టిక

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥ ధర 1995 (p_0)	వర్తమాన సం॥ ధర 2000 (p_1)	ఆధార సం॥లో పరిమాణాలు 1995లో (q_0)	p_1q_0	p_0q_0
A	50	70	10	700	500
B	60	84	15	1260	900
C	35	29	5	145	175
				$\Sigma p_1q_0 =$ 2105	$\Sigma p_0q_0 =$ 1575

పై పట్టిక నుండి, $\sum p_1q_0 = 2105$, $\sum p_0q_0 = 1575$

లాస్పియర్ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య $= P_{01}^{\boxed{L}} = \dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times 100 = \dfrac{1575}{2105}\times 100$ **= 74.82**

ఉదాహరణ **2 :**

కింది దత్తాంశానికి పాషే పద్ధతిని ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి. (1999 సం॥రం ఆధార సం॥రంగా తీసుకోండి)

వస్తు సముదాయం	1999 సం॥లో ధరలు	2004వ సం॥లో ధరలు	2004వ సం॥లో పరిమాణాలు
A	40	65	10
B	20	55	4
C	70	40	5

జవాబు - పాషే పద్ధతిని ధరల సూచీ సంఖ్య నిర్మించుటకు తయారు చేయవలసిన పట్టిక

వస్తు సముదాయం 1990 వ సం॥	ధరలు 1999 p_0	2004 సం॥ p_1	2004 సం॥లో పరిమాణాలు q_1	p_1q_1	p_0q_1
A	40	65	10	$65\times 10 = 650$	$40\times 10 = 400$
B	20	55	4	$55\times 4 = 220$	$20\times 4 = 80$
C	70	40	5	$40 \times 5 = 200$	$70 \times 5 = 350$
				$\Sigma p_1q_1 = 1070$	$\Sigma p_0q_1 = 830$

పాషే పద్ధతి ధరల సూచీ సంఖ్య సూత్రం $= P_{01}^{\boxed{P}} = \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}\times 100 = \dfrac{1070}{830}\times 100 = 128.91$

ఉదాహరణ : క్రింది దత్తాంశాన్ని ఉపయోగించి ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో	
	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
A	50	10	70	8
B	60	5	55	6
C	20	4	30	5

జవాబు : ఫిషర్ ఆదర్శ ధరల సూచీ సంఖ్య నిర్మాణ పట్టిక

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో					
	ధరలు	పరిమాణాలు	ధరలు	పరిమాణాలు	p_1q_1	p_1q_0	p_0q_1	p_0q_0
	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)				
A	50	10	70	8	560	700	400	500
B	60	5	55	6	330	275	360	300
C	20	4	30	5	150	120	100	80
					$1040 = \Sigma p_1q_1$	$1095 = \Sigma p_1q_0$	$860 = \Sigma p_0q_1$	$880 = \Sigma p_0q_0$

పై పట్టిక నుండి

$$\sum p_1q_1 = 1040,\ \sum p_1q_0 = 1095,\ \sum p_0q_1 = 860,\ \sum p_0q_0 = 880$$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య సూత్రం

$$P_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times 100$$

ఇందులో పై విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$$P_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\frac{1040}{860} \times \frac{1095}{880}} \times 100 = \sqrt{1.505} \times 100 = 1.22668 \times 100 = 122.67$$

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశమునకు లాస్పియర్, పాషే మరియు ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతిని ధరల సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సంవత్సరం		వర్తమాన సంవత్సరం	
	ధరలు	పరిమాణాలు	ధరలు	పరిమాణాలు
A	600	120	900	150
B	360	80	500	120
C	120	60	320	100

జవాబు : లాస్పియర్, పాషే మరియు ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతిని ధరల సూచీ సంఖ్యలు నిర్మించుటకు ఈ కింది విధంగా పట్టిక తయారు చేయాలి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సంవత్సరం		వర్తమాన సంవత్సరం					
	ధరలు (p_0)	పరిమాణం (q_0)	ధరలు (p_1)	పరిమాణం (q_1)	p_1q_1	p_1q_0	p_0q_1	p_0q_0
A	600	12	900	15	13500	10800	9000	7200
B	360	8	500	12	6000	4000	4320	2880
C	120	6	320	10	3200	1920	1200	720
					22700	16720	14520	10800
					Σp_1q_1	Σp_1q_0	Σp_0q_1	Σp_0q_0

పై పట్టిక నుండి, $\sum p_1q_1 = 22700$, $\sum p_1q_0 = 16720$, $\sum p_0q_1 = 14520$, $\sum p_0q_0 = 10800$

లాస్పియర్ పద్ధతి

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య} = P_{01}^{\boxed{L}} = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times 100 = \frac{16720}{10800}\times 100 = 154.81$$

పాషే పద్ధతి

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య} = P_{01}^{\boxed{P}} = \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}\times 100 = \frac{22700}{14520}\times 100 = 156.34$$

ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య} = P_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0}\times\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}\times 100 = \sqrt{\frac{16720}{10800}\times\frac{22700}{14520}}\times 100 = 155.57$$

లేదా

$$P_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{156.34\times 154.81} = 155.57$$

ఉదా॥ : పై ఉదాహరణలో యిచ్చిన దత్తాంశానికి బౌలీ మరియు మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ ధరల సూచీ సంఖ్యలు కనుగొనండి.

జవాబు : పైన జవాబులోని పట్టిక నుండి

$$\sum p_1q_1 = 22700, \quad \sum p_1q_0 = 16720, \sum p_0q_1 = 14520, \quad \sum p_0q_0 = 10800$$

అని గ్రహించవచ్చు.

బౌలీ పద్ధతి

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య } = P_{01}^{\boxed{B}} = \frac{\dfrac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} + \dfrac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}}{2} \times 100$$

$$= \frac{\dfrac{16720}{10800} + \dfrac{22700}{14520}}{2} \times 100 = \frac{1.5481 + 1.5633}{2} \times 100 = 1.5557 \times 100 = 155.57$$

మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి

$$\text{ధరల సూచీ సంఖ్య } P_{01}^{\boxed{M\&E}} = \frac{\sum p_1(q_0 + q_1)}{\sum p_0(q_0 + q_1)} \times 100$$

$$= \frac{\sum p_1q_0 + \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 + \sum p_0q_1} \times 100 = \frac{16720 + 22700}{10800 + 14520} \times 100$$

$$= \frac{39420}{25320} \times 100 = 155.69$$

ఉదాహరణ - ఈ క్రింది సమాచారం ఆధారంగా కెల్లీ ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో	
	ధరలు	పరిమాణాలు	ధరలు	పరిమాణాలు
A	12	3	15	4
B	10	4	18	6
C	15	6	21	5
D	7	3	5	2

జవాబు : కెల్లీ పద్ధతిలో రెండు లేక మూడు సంవత్సరాల పరిమాణాలు సగటు అనగా అంకమధ్యమాన్ని భారాలుగా పరిగణిస్తారు.

వస్తు	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో		భారాలు		
సముదాయం	ధరలు	పరిమాణాలు	ధరలు	పరిమాణాలు	$q =$		
	(p_0)	(q_0)	(p_1)	(q_1)	$\left(\frac{q_0 + q_1}{2}\right)$	p_1q	p_0q
A	12	3	15	4	$\frac{3+4}{2} = 3.5$	52.5	42.0
B	10	4	18	6	$\frac{4+6}{2} = 5$	90.0	50.0

C	15	6	21	5	$\frac{6+5}{2}=5.5$	115.5	82.5
D	7	3	5	2	$\frac{3+2}{2}=2.5$	12.5	17.5
						270.5 = $\Sigma p_1 q$	192.0 = $\Sigma p_0 q$

కెల్లీ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య $P_{01}^{\boxed{K}} = \frac{\sum p_1 q}{\sum p_0 q} \times 100$

పై పట్టిక నుండి, $\sum p_1 q = 270.5$, $\sum p_0 q = 192.0$

ఈ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా $P_{01}^{K} = \frac{270.5}{192.0} \times 100 = 144.88$

ఉదాహరణ : పై ఉదాహరణకు వాల్ష్ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య నిర్మించండి.

జవాబు : వాల్ష్ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య వర్తమాన, ఆధార సం॥లోని పరిమాణాల గుణమధ్యమాన్ని భారాలుగా తీసుకొని నిర్మించబడుతుంది.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో ధరలు (p_0)	ఆధార సం॥లో పరిమాణాలు (q_0)	వర్తమాన సం॥లో ధరలు (p_1)	వర్తమాన సం॥లో పరిమాణాలు (q_1)	$\sqrt{q_0 q_1}$	$p_1\sqrt{q_0 q_1}$	$p_0\sqrt{q_0 q_1}$
A	12	3	15	4	$\sqrt{3\times4}=3.46$	51.9	41.52
B	10	4	18	6	$\sqrt{4\times6}=4.9$	88.2	49.00
C	15	6	21	5	$\sqrt{6\times5}=5.48$	115.08	82.2
D	7	3	5	2	$\sqrt{3\times2}=2.45$	12.25	17.15
						267.43 = $\Sigma p_1\sqrt{q_0 q_1}$	189.8 = $\Sigma p_0\sqrt{q_0 q_1}$

పై పట్టిక నుండి $\sum p_1\sqrt{q_0 q_1} = 267.43$, $\sum p_0\sqrt{q_0 q_1} = 189.87$

$\therefore$ వాల్ష్ పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్య $= p_{01}^{\boxed{W}} = \frac{\sum p_1\sqrt{q_0 q_1}}{\sum p_0\sqrt{q_0 q_1}} \times 100 = \frac{267.43}{189.87} \times 100 = 140.85$

భారిత సాపేక్షకాల పద్ధతి (Weighted Average of Price Relatives Method**) :** భారిత సమిష్టి పద్ధతులలో ధరల సూచీ సంఖ్యలను నిర్మించేటప్పుడు ధరల సాపేక్షకాలను ఉపయోగించలేదు. ధరల సాపేక్షికాలకు భారాలు ఆపాదించి సూచీసంఖ్యలు నిర్మించవచ్చు. ఈ పద్ధతినే భారిత సాపేక్షికాల సగటు పద్ధతి అంటారు. ఈ పద్ధతిలో ధరల సాపేక్షికాలకు వాటి విలువ అనగా ధరను పరిమాణంచే గుణించగా వచ్చిన మొత్తాన్ని భారంగా యిస్తారు. భారాలుగా ఆధార సం॥లోని విలువలుగానీ, వర్తమాన సం॥లో విలువలుగానీ ఉపయోగించవచ్చు. భారిత సాపేక్షకాల సగటును లెక్కించేటప్పుడు సగటుగా అంకమధ్యమాన్ని గానీ, గుణమధ్యమాన్ని గానీ

ఉపయోగించవచ్చు. అంకమధ్యమాన్ని సగటుగా ఉపయోగిస్తూ భారిత సాపేక్షికాల ధరల సూచీసంఖ్యను ఈ క్రింది విధానం అనుసరించి నిర్మించవచ్చు.

అ) వస్తు సముదాయంలోని ప్రతివస్తువుకు ధరల సాపేక్షకాలు కనుగొనండి. దీనిని 'P'గా భావించండి. . అనగా

$P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$. ఇందులో

$p_1 =$ వర్తమాన కాలంలోధర, $p_0 =$ ఆధార సం॥లో ధర.

ఆ) ఆధార సంవత్సరంలో వస్తువుల విలువలను ధరలను పరిమాణాలచే గుణించి కనుగొనండి. అనగా $p_0 \times q_0$. దీనిని V తో సూచించండి.

ఇ) ధరల సాపేక్షికాలను వాటి సంబంధిత విలువలు (V)చే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని కనుగొనండి. వీటిని PV or $\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) \times V$ తో సూచించండి.

(ఈ) (ఆ)లో లెక్కించిన విలువల మొత్తాన్ని కనుగొని దానిని ΣV తో సూచించండి.

భారిత సాపేక్షికాల సగటు పద్ధతిని ధరల సూచీసంఖ్య

$$\text{భారిత సూచీ సంఖ్య} = P_{01} = \frac{\Sigma PV}{\Sigma V} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) \times V}{\Sigma V}$$

ఇక్కడ, $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$

ఉదాహరణ : దిగువ యిచ్చిన దత్తాంశానికి భారిత సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతిలో (1) అంకమధ్యమాన్ని (2) గుణమధ్యమాన్ని సగటుగా ఉపయోగిస్తూ ధరల సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో ధరలు
	ధరలు	పరిమాణాలు	
A	4	20	5
B	3	35	6
C	6	15	4

జవాబు : ఇచ్చిన దత్తాంశంలో ఆధార సం॥ ధరలు పరిమాణాలు వున్నాయి. కాబట్టి, ఆధార సం॥లోని విలువలను భారాలుగా పరిగణించవలెను.

(అ) అంకమధ్యమం సగటుగా ఉపయోగించి :

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో ధరలు (p_0)	ఆధార సం॥లో పరిమాణాలు (q_0)	వర్తమాన సం॥లో ధరలు (p_1)	భారాలు(V) p_0q_0	$\frac{p_1}{p_0}\times 100$ or P	$\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)\times V$ or PV
A	4	20	5	80	$\frac{5}{4}\times 100=125$	125×80 $=10000$
B	3	35	6	105	$\frac{6}{3}\times 100=200$	200×105 $=21000$
C	6	15	4	80	$\frac{4}{6}\times 100=66.67$	66.67×80 $=533.36$
			మొత్తం	265 (ΣV)		36333.6 (ΣPV)

పై పట్టిక నుండి, భారాల మొత్తము $\Sigma V = 265$

ధరల సాపేక్షికాలు మరియు భారాల లబ్ధం (ΣPV) = 36333.6

$$\text{ధరల సూచీసంఖ్య } P_{01}=\frac{\Sigma PV}{\Sigma V}=\frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0}\times 100\right)V}{\Sigma V}=\frac{36333.6}{265}=137.11$$

11.7 పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు (Quantity Index Numbers)

ధరల సూచీ సంఖ్యలు ఏ విధంగా ఆధార సం॥రం నుండి వర్తమాన కాలం మధ్య ధరలలో వచ్చిన మార్పు కొలవడానికి ఉపయోగపడతాయో, అదే విధంగా ఆధార సం॥రం నుండి వర్తమాన కాలం మధ్య పరిమాణాలు (Quantities) ఏర్పడే మార్పులను కొలవడానికి పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడతాయి. ధరల సూచీసంఖ్యలు నిర్మించినట్లే పరిమాణ సూచీసంఖ్యలను నిర్మిస్తారు. ఒక వస్తు సముదాయంలోని వస్తువులను వివిధ పరిమాణంలో ఒకే ధరకు వేరు వేరు సంవత్సరాలలో కొన్నప్పుడు ఆధార సం॥కి సాపేక్షంగా వర్తమాన సం॥లో ఎంత వెచ్చించాలి అనే ప్రశ్నకు పరిమాణాల సూచీ సంఖ్య సమాధానం యిస్తుంది. ధరల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణించారు. పరిమాణ సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో ధరలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు. పరిమాణ సూచీసంఖ్యను 'Q_{01}'చే సూచిస్తారు. ధరల సూచీసంఖ్యలు నిర్మించటానికి ఉపయోగించే అన్ని పద్ధతులూ పరిమాణ సూచీసంఖ్యలు నిర్మించడానికి ఉపయోగించవచ్చు. అందులో కొన్ని ముఖ్యమైనవి.

(1) లాస్పియర్ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో ఆధార సం॥లోని ధరలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు. ఈ పద్ధతిలో, వర్తమాన సం॥ర పరిమాణాలను ఆధార సం॥ర ధరలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని, ఆధార సం॥లో పరిమాణాలను ఆధార సం॥ ధరలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తంచే భాగించి ఫలితాన్ని 100చే గుణించి లాస్పెయర్ పరిమాణ సూచీని కనుగొనవచ్చు.

దీనినే సంకేతాలలో, పరిమాణ సూచీసంఖ్య = $Q_{01}^{\boxed{L}} = \frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times 100$

ఇక్కడ, $\Sigma q_1 p_0$ = వర్తమాన కాల పరిమాణాలను ఆధార సం॥ ధరతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

$\Sigma q_0 p_0$ = అనగా ఆధార సం॥ పరిమాణాలను ఆధార సం॥ ధరలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

(2) పాషే పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో వర్తమాన సం॥ పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు. వర్తమాన పరిమాణాలను వర్తమాన ధరలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని, ఆధార సం॥ పరిమాణాలను వర్తమాన ధరలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తంచే భాగించి, వచ్చిన దానిని 100చే గుణించి కనుగొంటారు. దీనిని సంకేతాలలో

$$Q_{01}^{\boxed{P}} = \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1} \times 100$$

$Q_{01}^{\boxed{P}}$ = పాషే పరిమాణ సూచీ

$\Sigma q_1 p_1$ = వర్తమాన సంవత్సర పరిమాణాలను వర్తమాన ధరలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం

$\Sigma q_0 p_1$ = ఆధార సంవత్సర పరిమాణాలను వర్తమాన ధరలతో గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తం.

ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి : ఫిషర్ ఆదర్శ ధరల సూచీసంఖ్యలాగానే ఫిషర్ పరిమాణాల సూచీసంఖ్య ఆదర్శపరిమాణ సూచీ అంటారు. లాస్పియర్ పరిమాణ సూచీసంఖ్య మరియు పాషే పరిమాణ సూచీసంఖ్యల గుణమధ్యమం ఫిషర్ సూచీ అవుతుంది. సంకేతాలలో

ఫిషర్ ఆదర్శ పరిమాణ సూచీసంఖ్య = $\sqrt{Q_{01}^{\boxed{L}} \times Q_{01}^{\boxed{P}}}$

$$Q_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100 \qquad \text{(లేదా)}$$

$$Q_{01} = \sqrt{\text{లాస్పియర్ పరిమాణ సూచీసంఖ్య} \times \text{పాషే పరిమాణ సూచీసంఖ్య}}$$

ఇదే విధంగా మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతిలో పరిమాణ సూచీసంఖ్య సూత్రం $Q_{01}^{\boxed{M\&E}} = \frac{\Sigma q_1 (p_0 + p_1)}{\Sigma q_0 (p_0 + p_1)} \times 100$

బౌలీ పద్ధతిలో పరిమాణ సూచీసంఖ్య సూత్రం = $Q_{01}^{\boxed{B}} = \frac{\left[\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} + \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}\right]}{2} \times 100$ (లేదా)

$$Q_{01} = \frac{\text{లాస్పియర్ సూచీసంఖ్య} + \text{పాషే సూచీసంఖ్య}}{2} = \frac{Q_{01}^{\boxed{L}} + Q_{01}^{\boxed{P}}}{2}$$

ఉదాహరణ : ఈ దిగువనివ్వబడిన దత్తాంశానికి (1) లాస్పియర్ పద్ధతి (2) పాషే పద్ధతి (3) ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి (4) మార్షల్ ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి (5) బౌలీ పద్ధతులను ఉపయోగించి వర్తమాన సంవత్సరానికి పరిమాణం సూచీ సంఖ్యను కనుగొనండి.

వస్తు సముదాయం	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో	
	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
A	20	10	40	8
B	50	8	60	6
C	40	12	50	15
D	30	15	40	20

జవాబు : పరిమాణ సూచీసంఖ్యలు కనుగొనడానికి కావల్సిన పట్టిక

వస్తు సముదాయం	**ఆధార సం॥లో ధరలు** (p_0)	**ఆధార సం॥లో పరిమాణం** (q_0)	**వర్తమాన సం॥లో ధరలు** (p_1)	**వర్తమాన సం॥లో పరిమాణం** (q_1)	q_1p_1	q_1p_0	q_0p_1	q_0p_0
A	20	10	40	8	320	160	400	200
B	50	8	60	6	360	300	480	400
C	40	12	50	15	750	600	600	480
D	30	15	40	20	800	600	600	450
				మొత్తం	2230	1660	2080	1530
					$\Sigma q_1 p_1$	$\Sigma q_1 p_0$	$\Sigma q_0 p_1$	$\Sigma q_0 p_0$

పై పట్టిక నుండి,

$$\Sigma q_1p_1 = 2230, \quad \Sigma q_1p_0 = 1660,$$
$$\Sigma q_0p_1 = 2080, \quad \Sigma q_0p_0 = 1530.$$

(అ) లాస్పియర్ పద్ధతి : పరిమాణాల సూచీసంఖ్య $Q_{01}^{\boxed{L}} = \dfrac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0} \times 100 = \dfrac{1660}{1530} \times 100 = 108.5$

(ఆ) పాషే పద్ధతి : పరిమాణ సూచీసంఖ్య $Q_{01}^{\boxed{P}} = \dfrac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1} \times 100 = \dfrac{2230}{2080} \times 100 = 107.2$

(ఇ) ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి : పరిమాణ సూచీసంఖ్య $Q_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\text{లాస్పియర్ సూచీసంఖ్య} \times \text{పాషే సూచీసంఖ్య}}$

$$= \sqrt{108.5 \times 107.2} = 107.85$$

(లేదా)

$$Q_{01}^{\boxed{F}} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{1660}{1530} \times \frac{2230}{2080}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.085 \times 1.072} \times 100 = \sqrt{1.16312} \times 100$$

$$= 1.07848 \times 100 = 107.85$$

(ఈ) మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ పద్ధతి : పరిమాణ సూచీసంఖ్య $Q_{01}^{\boxed{M\&E}} = \frac{\Sigma q_1 (p_0 + p_1)}{\Sigma q_0 (p_0 + p_1)} \times 100$ (లేదా)

$$Q_{01} = \frac{\Sigma q_1 p_0 + \Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_0 + \Sigma q_0 p_1} \times 100$$

$$= \frac{1660 + 2230}{1530 + 2080} \times 100$$

$$= \frac{3890}{3610} \times 100 = 107.76$$

(ఎఫ్) బౌలీ పద్ధతి : పరిమాణ సూచీసంఖ్య **=** $Q_{01}^{\boxed{B}} = \frac{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} + \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}}{2} \times 100$

$$= \frac{\frac{1660}{1530} + \frac{2230}{2080}}{2} \times 100$$

$$Q_{01}^{\boxed{B}} = \frac{1.0849 + 1.07211}{2} \times 100 = \frac{2.1570}{2} \times 100 = 107.85$$

11.8 విలువ సూచీ సంఖ్యలు (Value Index Numbers)

ధరల, పరిమాణాల సూచీ సంఖ్యల వలెనే, ఒక వస్తువు యొక్క విలువ (ధర మరియు పరిమాణం యొక్క లబ్ధం)లో వచ్చే మార్పును కొలుచుటకు విలువల సూచీసంఖ్యను ఉపయోగిస్తారు. ఒక వస్తువు యొక్క విలువ ఆధార సం॥రం నుండి వర్తమాన సం॥ వరకు ఎంత మార్పు చెందిందో తెలుసుకోవటానికి విలువల సూచీసంఖ్యను వినియోగిస్తారు. విలువలోనే భారాలు యిమిడి వుంటాయి కనుక విలువల సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో భారాలు సామాన్యంగా ఉపయోగించరు. విలువల సూచీసంఖ్యలను చాలా అరుదుగా ఉపయోగిస్తారు.

వర్తమాన సం॥లోని వస్తువుల విలువల మొత్తాన్ని ఆధార సం॥లోని విలువల మొత్తంచే భాగించి, వచ్చిన దానిని 100చే గుణించి ఈ విలువల సూచీ సంఖ్యను కనుగొంటారు. విలువల సూచీసంఖ్యను V_{01}తో సూచిస్తారు.

సంకేతాలలో $V_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times 100$

ఇక్కడ $\Sigma p_1 q_1$ అనగా వర్తమాన సంవత్సరంలో వస్తువుల విలువ.

$\Sigma p_0\, q_0$ అనగా ఆధార సంవత్సరంలో వస్తువుల విలువ

11.9 సూచీ సంఖ్యల స్థిరత్వంకు పరీక్షలు (Tests for Consistency of Index Numbers)

పై విభాగాలలో అనేక పద్ధతుల్లో సూచీసంఖ్యలు నిర్మించే విధానాలు తెలుసుకున్నాం. అయితే ఒక్కొక్క పద్ధతి ఒక్కొక్క లక్ష్యాన్ని పరిగణనలోకి తీసుకొని రూపొందించబడినది. అయితే ఈ వివిధ సూచీ సంఖ్యలో అన్ని పరిస్థితులలో సమర్ధవంతంగా ఉండే సూచీసంఖ్యను కనుగొనేందుకు ఫిషర్ కొన్ని పరీక్షలను సూచించారు. అవి :

(ఎ) కాల పరివర్తక లేదా విపర్యాయ పరీక్ష(Time Reversal Test), (బి) అంశాల పరివర్తక లేదా విపర్యాయ పరీక్ష (Factor Reversal Test), (సి) చక్రీయ పరీక్ష (Circular Test). పై పరీక్షలన్నింటిని సంతృప్తి పరచే పద్ధతినుపయోగించి నిర్మించిన సూచీసంఖ్య అత్యంత సమర్ధవంతమైనదిగానూ, ఆదర్శవంతమైనదిగానూ భావించవచ్చు.

(ఎ) కాల పరివర్తక లేదా విపర్యయ పరీక్ష : సూచీసంఖ్యలను నిర్మించే పద్ధతి కాలాల పరివర్తకత్వము (time reversability) కలిగి వున్నదా? లేదా? నిర్ణయించే పరీక్ష యిది. ఒక సూచీ సంఖ్య నిర్మించే సూత్రం ఏ విధంగా వుండాలంటే, రెండు కాలాల మధ్య నిర్మించిన సూచీ సంఖ్య అది పోల్చే కాలానికి మరొక కాలానికి మధ్య సమాన నిష్పత్తి కలిగి వుండాలి. రెండు కాలాలలో ఏ కాలాన్నైనా ఆధారంగా తీసుకొన్న ఫరవాలేదు. అనగా రెండు కాలాల మధ్య ఆధార కాలాన్ని విపర్యయం (Reverse) చేసి నిర్మించిన సూచీసంఖ్యలు ఒకదానినొకటి వ్యుత్క్రమాలు (Reciprocals) కావాలి. అనగా లాస్పియర్ పద్ధతి కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదు.

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

పాషే పద్ధతి :

ధరల సూచీ సంఖ్య $P_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}$,

కాలాలను విపర్యయం చేయగా

$$P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}$$

ఇక్కడ P_{01}, P_{10} ల లబ్దం, $P_{01} \times P_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \neq 1$

కావున పాషే పద్ధతి కూడా కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదు.

ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతి : ఈ పద్ధతిలో ధరల సూచీసంఖ్య

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

వర్తమాన సంవత్సరాన్ని ఆధార సం॥గాను, ఆధార సంవత్సరాన్ని వర్తమాన సంవత్సరంగా మారిస్తే ధరల సూచీ సంఖ్య

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}}$$

వీటి లబ్ధం $P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = 1$ అవుతుంది.

వాటి లబ్ధము ఒకటికి సమానం కావాలి. అప్పుడు ఆ సూచీసంఖ్యల నిర్మాణానికి ఉపయోగించిన పద్ధతి లేక సూత్రం కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరిచినట్లవుతుంది. సాంకేతికంగా దానిని ఈ క్రింది విధంగా వివరించవచ్చు.

$P_{01} =$ ఆధార సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా నిర్మించిన సూచీసంఖ్య

$P_{10} =$ వర్తమాన సంవత్సరాన్ని ఆధారంగా తీసుకొని నిర్మించిన సూచీసంఖ్య అయినట్లయితే

$P_{01} \times P_{10} = 1$ కావలెను.

ఈ పరీక్షను, ఫిషర్, బౌలీ, మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్ మరియు కెల్లీ పద్ధతుల ద్వారా నిర్మించిన సూచీసంఖ్యలు సంతృప్తి పరుస్తాయి. కాని లాస్పియర్ మరియు పాషే పద్ధతులను ఉపయోగించి నిర్మించిన సూచీసంఖ్యలు సంతృప్తి పరచలేవు. క్రింద వివరణను చూడండి.

లాస్పియర్ పద్ధతి : ధరల సూచీసంఖ్య $P = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0}$ (100 తీసుకోవల్సి అవసరం లేదు)

వర్తమాన సంవత్సరాన్ని ఆధారంగాను, ఆధార సంవత్సరాన్ని వర్తమాన సంవత్సరంగా తీసుకొని నిర్మించిన

ధరల సూచీసంఖ్య $P_{10} = \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}$

ఇప్పుడు $P_{01} \times P_{10} = \frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \neq 1$

పై లబ్ధం '1'కి సమానం కాదు. అయితే ఫిషర్ సూచీని గమనిస్తే

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1} \times \frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0}} = \sqrt{1} = 1$$

$P_{01} \times P_{10} = 1$ సమానం కాబట్టి. ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతి కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుంది. ఇదే విధంగా బౌలీ, మార్షల్ - ఎడ్జ్‌వర్త్, కెల్లీ మరియు వాల్ష్ పద్ధతులు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తాయి.

(బి) అంశాల (కారకాల) విపర్యయ పరీక్ష (Factor Reversal Test) : ఈ పరీక్ష ప్రకారం రెండు కాలాల మధ్య నిర్మించిన ధరల సూచీసంఖ్య మరియు పరిమాణాల సూచీసంఖ్యల లబ్ధం, విలువల సూచీసంఖ్యకు సమానం కావలెను. అనగా ధరలలోని మార్పును

పరిమాణాల మార్పుచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దం విలువలలోని మార్పుకు సమానం కావలెను. సంకేతాలలో

$P_{01}=$ వర్తమాన సం॥రానికి ధరల సూచీసంఖ్య, $Q_{01}=$ వర్తమాన సం॥రానికి పరిమాణ సూచీసంఖ్య

ఈ పరీక్ష ప్రకారం

$$P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}=V_{01}$$ కావలెను.

ఈ పరీక్షను ఒక ఫిషర్ ఆదర్శ సూచీ మాత్రమే సంతృప్తి పరస్తుంది. మరి ఏ ఇతర పద్ధతి సంతృప్తి పరచదు.

ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతి : ధరల సూచీసంఖ్య = $P_{01}^{\boxed{F}}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}}$

పరిమాణ సూచీసంఖ్య $Q_{01}^{\boxed{F}}=\sqrt{\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\times\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$

$$\therefore P_{01}^{\boxed{F}}\times Q_{01}^{\boxed{F}}=\sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}\times\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\times\frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}\right)^2}=\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

కావున ఫిషర్ ఆదర్శసూచీ సంఖ్య కారణాంక విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుంది.

ఏ యితర పద్ధతులు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేవని తెలుసుకోవచ్చు. ఉదాహరణకు లాస్పియర్ పద్ధతిలో

ధరల సూచీసంఖ్య = $P_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$

పరిమాణాల సూచీసంఖ్య $Q_{01}=\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}$

$$\therefore P_{01}\times Q_{01}=\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}\times\frac{\Sigma q_1p_0}{\Sigma q_0p_0}\neq\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$$

పై లబ్దం $\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0}$ కు సమానం కాదు. కావున లాస్పియర్ పద్ధతి కారణాంక విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేదు. యిదే విధంగా మిగిలిన పద్ధతులలో కూడా ఋజువు చేయవచ్చు.

(సి) చక్రీయ పరీక్ష (Circular Test) : ఈ పరీక్షను కాలవిపర్యయ పరీక్షకు పొడిగింపుగా పరిగణించవచ్చు. ఈ పరీక్ష యొక్క ఉద్దేశం ఒక పద్ధతినుపయోగించిన సూచీ సంఖ్య రెండు కాలాల మధ్య మార్పునేగాక, కొన్ని కాలాల మధ్య మార్పును కొలిచేదై వుండాలి. ఈ పరీక్ష ప్రకారం మూడు సం॥లలో అనగా '0' అంటే ఆధార సం॥ము '1' వర్తమాన సం॥ము, '2' మూడవ సం॥ములకు సంబంధించి చెప్పటం జరుగుతుంది.

P_{01} = ఆధార సంవత్సరం ప్రాతిపదికగా వర్తమాన సంవత్సరమునకు రూపొందించిన ధర సూచీ సంఖ్య.

P_{12} = వర్తమాన సంవత్సరముపై ఆధారపడి మూడవ సంవత్సరమునకు రూపొందించిన ధర సూచీ.

P_{20} = మూడవ సంవత్సరం ఆధారంగా ఆధార సంవత్సరమునకు రూపొందించిన సూచీ సంఖ్య.

$P_{01} \times P_{12} \times P_{20} = 1$ అనేది చక్రీయ పరీక్ష

ఇట్లు ఆధారాన్ని మార్పిపత్వము (shiftability) లేదా మార్పిడి చేసే పరీక్షను చక్రీయ పరీక్ష అంటారు. సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో ఉపయోగించిన అత్యధిక పద్ధతులు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరచలేవు. ఫిషర్ ఆదర్శపద్ధతి కూడా ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుచుటలో విఫలం అవుతుంది. కానీ సామాన్య సమిష్టి పద్ధతి మరియు స్థిర భార సమిష్టి పద్ధతిననుసరించి రూపొందించి సూచీసంఖ్యల సూత్రాలు ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తాయి. సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిలో '0' ఆధార సం॥రంగా '1' వర్తమాన సం॥రంగా ధరల సూచీసంఖ్య $P_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0}$. అట్లే '1' ఆధార సం॥గా '2' వర్తమాన సం॥రంగా ధరల సూచీసంఖ్య $P_{12} = \frac{\Sigma p_2}{\Sigma p_1}$.

'2' ఆధార సం॥రంగా '0'గా వర్తమాన సం॥ంగా ధరల సూచీసంఖ్య $P_{20} = \frac{\Sigma p_0}{\Sigma p_2}$

చక్రీయ పరీక్ష ప్రకారం $P_{01} \times P_{12} \times P_{20}$ల లబ్ధం ఒకటే కావాలి. ఈ సూత్రం ప్రకారం $\frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times \frac{\Sigma p_2}{\Sigma p_1} \times \frac{\Sigma p_0}{\Sigma p_2} = 1$ అవుతుంది. కావున ఈ పద్ధతి చక్రీయ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుంది. అట్లే స్థిర భారాలు ఉపయోగించే భారతి సమిష్టి పద్ధతి కూడా ఈ పరీక్షను సంతృప్తి పరుస్తుందని గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశానికి ఫిషర్స్ ఆదర్శపద్ధతిని ధరల సూచీసంఖ్యను నిర్మించి అది కాల మరియు కారణాలకు విపర్యయ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుందని నిరూపించండి.

	ఆధార సం॥		వర్తమాన సం॥లో	
వస్తు సముదాయం	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
బియ్యం	5	20	8	25
గోధుమలు	4	15	5	10
పంచదార	7	4	10	3
వంట నూనెలు	10	2	12	3

జవాబు : ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య గణన పట్టిక

వస్తు	ఆధార సం॥లో		వర్తమాన సం॥లో					
సముదాయం	ధరలు (p_0)	పరిమాణం (q_0)	ధరలు (p_1)	పరిమాణం (q_1)	p_1q_1	p_1q_0	p_0q_1	p_0q_0
బియ్యం	5	20	8	25	200	160	125	100
గోధుమలు	4	15	5	10	50	75	40	60
పంచదార	7	4	10	3	30	40	21	28
వంట నూనెలు	10	2	12	3	36	24	30	20
				మొత్తం	316 = Σp_1q_1	299 = Σp_1q_0	216 = Σp_0q_1	208 = Σp_0q_0

పై పట్టిక నుండి, $\Sigma p_1q_1 = 316, \Sigma p_1q_0 = 299, \Sigma p_0q_1 = 216, \Sigma p_0q_0 = 208$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతిలో ధరల సూచీసంఖ్య, $P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{299}{208} \times \frac{316}{216}} \times 100 = 145.02$

ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీసంఖ్య కాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచవలెనంటే ఆ పద్ధతిలో లెక్కించిన P_{01} మరియు P_{10} ల లబ్దం '1'కి సమానం కావాలెను. అనగా $P_{01} \times P_{10} = 1$ కావలెను.

ఫిషర్స్ పద్ధతి ప్రకారం,

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1}} = \sqrt{\frac{299}{208} \times \frac{316}{216}}$$

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0q_1}{\Sigma p_1q_1} \times \frac{\Sigma p_0q_0}{\Sigma p_1q_0}} = \sqrt{\frac{216}{316} \times \frac{208}{299}}$$

$$\therefore P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{299}{208} \times \frac{316}{216} \times \frac{216}{316} \times \frac{208}{299}} = 1$$

కాబట్టి కాల విపర్యయ పరీక్ష సంతృప్తి పరచబడినది.

కారకాల విపర్యయ పరీక్ష : ఫిషర్స్ ఆదర్శ సూచీ సంఖ్య కారకాల విపర్యయ పరీక్షను సంతృప్తి పరచవలెనంటే ఆ పద్ధతిలో లెక్కించిన $P_{01} \times Q_{01}$ ల లబ్దం $\frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_0}$ కావలెను.

ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతిలో $P_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}} = \sqrt{\frac{299}{208} \times \frac{316}{216}}$

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma q_1 p_0}{\Sigma q_0 p_0} \times \frac{\Sigma q_1 p_1}{\Sigma q_0 p_1}} = \sqrt{\frac{216}{208} \times \frac{316}{299}}$$

$$\therefore P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\frac{299}{208} \times \frac{316}{216} \times \frac{216}{208} \times \frac{316}{299}}$$

$$= \sqrt{\frac{(316)^2}{(208)^2}} = \frac{316}{208}$$

ఈ విలువ $\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$ విలువకు సమానం అని గమనించవచ్చు. కాబట్టి ఫిషర్స్ ఆదర్శ పద్ధతి కారణాంక విపర్యయ పరీక్షను కూడా సంతృప్తి పరుస్తుంది.

11.10 ప్రత్యేక సూచీ సంఖ్యలు (Special Index Numbers)

వర్తమాన సంవత్సరంలోని పరిస్థితులను ఆధార సంవత్సర పరిస్థితులతో పోల్చిచూడటానికి సూచీ సంఖ్యలు ఉపయోగపడతాయి అని తెలుసుకున్నాం. ఈ విధమైన పోలిక ఒక రంగంలోనే కాదు అనేక రంగాలలో జరుగుతుంది. అందుచేత వివిధ రంగాలలో, వాటికి అనుగుణంగా సూచీసంఖ్యలు నిర్మిస్తారు. ఉదాహరణకు వ్యాపార రంగంలో ధరల స్థాయిల్లో వచ్చిన మార్పును తెలుసుకోవడానికి, వ్యవసాయ రంగంలో మరియు పారిశ్రామిక రంగంలో ఉత్పత్తిలో వచ్చిన మార్పును తెలుసుకోవడానికి, అంతేకాక వినియోగదారుని జీవన వ్యయంలో వచ్చిన మార్పును కొలవటానికి, ఇలా వివిధ రంగాలలో, వివిధ సందర్భాలలో వేర్వేరు ఉద్దేశాలతో సూచీసంఖ్యలను నిర్మిస్తారు. ఇలాంటి కొన్ని ప్రత్యేకమైన సూచీసంఖ్యలు

1. టోకు ధరల సూచీసంఖ్య (whole sale price Idex Number)
2. జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య (Cost of Living Index Number)

1. టోకు ధరల సూచీసంఖ్య : ఒక వస్తు సముదాయంలోని వస్తువుల టోకు ధరలలో ఏర్పడే మార్పును కొలుచుటకు సామాన్యంగా ఈ సూచీసంఖ్యను వినియోగిస్తారు. ఈ టోకు ధరల సూచీని ఒక దేశం దృష్ట్యాగాని, ఒక రాష్ట్రం లేదా ఒక పెద్ద పట్టణం దృష్ట్యా నిర్మిస్తారు. ఒక వ్యవస్థలో వినియోగదారుడు ఉపయోగించే వస్తువుల టోకు ధరలలో ఎటువంటి మార్పు వస్తుంది, దీని ప్రభావం ఆర్థిక వ్యవస్థపై ఏ విధంగా వుంటుంది మొదలగునవి తెలుసుకోడానికి ఈ సూచీసంఖ్యను ఉపయోగిస్తారు. భారతదేశంలో ఈ సూచీసంఖ్యలు ప్రభుత్వ ఆర్థిక సలహాదారుడు వాణిజ్య మరియు పరిశ్రమల మంత్రిత్వశాఖ ఆధ్వర్యంలో నిర్మించబడతాయి. ప్రతి రాష్ట్రంలో ఈ తరహా సూచీ సంఖ్యలను ఆర్థిక గణాంక శాఖ వారు నిర్మిస్తారు.

2. జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య (Cost of Living Index Number) : టోకు ధరల సూచీ, వస్తువుల టోకు ధరలలో వచ్చే మార్పును కొలుస్తుంది. వస్తువుల ధరలలో ఏర్పడే హెచ్చుతగ్గులు ఒక ప్రత్యేక తరగతికి చెందిన వినియోగదారునిపై ఎటువంటి ప్రభావం చూపుతుందో ఈ సూచీ తెలియజేయలేదు. వినియోగదారులందరికీ ఒకే విధమైన ఆదాయం వుండదు. వారు వినియోగించే వస్తువుల

సముదాయంగాని, పరిమాణం గాని ఒకే విధంగా వుండదు. ఒకే వస్తువును ప్రజలు లేక వినియోగదారులు వేర్వేరు ప్రయోజనాల కోసం, వేర్వేరు పరిమాణాలలో వినియోగించవచ్చు. కాబట్టి ఒక వస్తువు ధరలో వచ్చిన హెచ్చుతగ్గుల ప్రభావం విభిన్న వ్యక్తుల మీద విభిన్న రీతుల్లో వుంటుంది. ఈ విధంగా వినియోగదారుడు ఉపయోగించే వస్తు సముదాయంలోని వస్తువుల మరియు సేవల ధరలలో ఏర్పడే మార్పులు అతని కొనుగోలు శక్తిపై ఏ విధమైన ప్రభావాన్ని చూపిస్తాయో తెలుసుకోవాల్సిన అవసరం వుంది. ఈ ప్రయోజనార్ధమై నిర్మించే సూచీ సంఖ్యనే జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య అంటారు. దీనినే వినియోగదారుల ధరల సూచీసంఖ్య (Consumer Price Index Number) అనికూడా పిలుస్తారు.

11.11 జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యలు

ప్రజల జీవన వ్యయాల్లో వచ్చే మార్పులను తెలుసుకునేందుకు ఉపయోగించే సూచీలను జీవన వ్యయ సూచీలంటాము. ప్రభుత్వం ఆర్థిక విధానాలు రూపొందించటంలో వీటి పాత్ర ప్రాముఖ్యమైనదనే విషయం గతంలో తెలుసుకున్నాం. ప్రస్తుతం జీవన వ్యయ సూచీల ఉపయోగాలు, నిర్మాణ విధాన్ని తెలుసుకుందాం.

జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య ఉపయోగాలు : జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్యల వలన అనేక ప్రయోజనాలు కలవు. అవి :

(1) వేతన సవరణలలో మరియు వేతన కాంట్రాక్ట్‌లకు సంబంధించిన నిర్ణయాలు తీసుకునేటప్పుడు ఈ సూచీని పరిగణనలోకి తీసుకుంటారు.

(2) అనేక దేశాలలో ఉద్యోగుల వేతనాలలో భాగమైన కరువు భత్యం యొక్క సవరణలన్నీ ఈ సూచీసంఖ్యపై ఆధారపడి వుంటాయి.

(3) ప్రభుత్వ స్థాయిలో, వేతన విధానం (wage policy), ధరల విధానం (Price policy), అద్దె నియంత్రణ (Rent Control), పన్నులు (Taxation) మరియు యితరములైన ఆర్థిక విధానాలు (Economic Policy)లు ఏర్పరచటానికి ఈ సూచీసంఖ్య ఎంతో ఉపయోగపడుతుంది.

(4) వాస్తవ ఆదాయం (Real Income) మరియు ద్రవ్య కొనుగోలు శక్తి (Purchasing power of the currency)లోని మార్పులను కొలుచుటకు కూడా ఈ సూచీసంఖ్యలను వినియోగిస్తారు.

(5) కొన్ని ప్రత్యేక విధమైన వస్తువుల మరియు సేవల మార్కెట్లను విశ్లేషించడానికి ఈ సూచీసంఖ్యను ఉపయోగిస్తారు.

జీవన వ్యయ సూచీ నిర్మాణం (Construction of Cost of Living Index) : వాస్తవికతను ప్రతిబింబించే విధంగా జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించటానికి ఈ క్రింది జాగ్రత్తలు పాటించాలి.

1. ముందుగా ఈ సూచీసంఖ్య ఏ ప్రాంతంలో, ఏ వర్గ ప్రజలు అనగా, తక్కువ ఆదాయ వర్గం ప్రజలా? అధిక ఆదాయ వర్గం ప్రజలా? కార్మిక వర్గమా? శ్రామిక వర్గమా? వ్యవసాయ కూలి వర్గమా? అనేది నిర్ణయించుకోవాలి. అంతేకాక ఆ వర్గానికి చెందిన ప్రజలందరికి ఒకే విధమైన ఆహార మరియు వ్యయ అలవాట్లు కలిగివుండాలి.

2. ఏ విధమైన వైపరీత్యాలు, ఒడుదుడుకులు లేని సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరంగా ఎంపిక చేసుకోవాలి.

3. కుటుంబ బడ్జెట్ విచారణ సమయంలో కుటుంబాలను యాదృచ్ఛిక ప్రతిచయన పద్ధతి ద్వారానే ఎన్నుకోవాలి. ఆ కుటుంబాలలో ఎక్కువగా ఉపయోగించే వస్తువులనే సూచీసంఖ్యల నిర్మాణంలో పరిగణనలోనికి తీసుకోవాలి. ఒక కుటుంబం, ఆహార పదార్థాలు, వస్త్రాలు, దీపాలు మరియు ఇంధనం, ఇంటి అద్దె, ఇతరములు మొదలైన వాటిపై ఎంతెంత ఖర్చు చేస్తున్నది తెలిపే విధంగా ప్రశ్నావళి వుండాలి.

4. సూచీసంఖ్య ఏ ప్రాంతానికి సంబంధించి నిర్మించబడుతుందో ఆ ప్రాంతంలోని స్థానిక సూపర్ మార్కెట్, సహకార మార్కెట్లు మరియు డిపార్టుమెంటల్ స్టోరుల నుండి, వారానికి ఒక్కసారి వివిధ వస్తువుల చిల్లర ధరలను సేకరించాలి. సాధారణంగా ఈ సూచీసంఖ్యలను వారానికి నిర్మిస్తారు. వారాల సూచీసంఖ్యల సగటును మాస సూచీ సంఖ్యగానూ, మాసాల సూచీ సంఖ్యల సగటును సంవత్సరానికి సూచీసంఖ్యగా పరిగణిస్తారు.

జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య నిర్మాణ పద్ధతులు : జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్యను రెండు విధాలుగా నిర్మిస్తారు. ఎ. సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి లేక సమిష్టి పద్ధతి(Aggregate Expenditure Method or Aggregate Method), బి. కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి (లేక) భారిత సాపేక్షకాల పద్ధతి (Family Budget Method or Weighted Relatives Method)

ఎ. **సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి (Aggregate Expenditure Method) :** ఈ పద్ధతిలో జీవన వ్యయ సూచీ ఏ వర్గ ప్రజలకు ఉద్దేశించబడిందో ఆ ప్రజలు ఆధార సం॥లో వినియోగించిన వస్తువుల పరిమాణాలను భారాలుగా పరిగణిస్తారు. మొదట ప్రజల వర్తమాన సంవత్సరంలోని వ్యయాన్ని అంటే వర్తమాన సంవత్సరంలోని ధరలను, ఆధార సంవత్సరంలోని పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాలన్నింటిని కూడి కనుక్కుంటారు $(\Sigma p_1 q_0)$. అదే విధంగా ఆధార సంవత్సరంలోని వ్యయాన్ని ఆధార సంవత్సరంలోని ధరలను, ఆదార సంవత్సరంలో పరిమాణాలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాలన్నింటిని కూడి కనుక్కుంటారు $(\Sigma p_0 q_0)$. తరువాత వర్తమాన సంవత్సరంలోని మొత్తం (లేక) సమిష్టి వ్యయాన్ని అంటే ఆధార సంవత్సరంలోని మొత్తం (లేక) సమిష్టి వ్యయంతో భాగించి వచ్చిన దానిని 100చే గుణించి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య నిర్మిస్తారు. అదే సంకేతాలలో

$$\text{జీవన వ్యయ సూచీ} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

పై సూత్రం, లాస్పియర్ పద్ధతిలో ధరల సూచీసంఖ్య సూత్రాన్ని పోలి వున్నదని గమనించవచ్చు.

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశం నుండి 2000 సంవత్సరం ఆధార సంవత్సరంగా పరిగణించి, 2005 సంవత్సరానికి జీవన వ్యయసూచీ సంఖ్యను, సమిష్టి వ్యయ పద్ధతి ఉపయోగించి లెక్కించండి.

	2000 సంవత్సరములో		
వస్తు సముదాయం	**ధరలు**	**పరిమాణం**	**2005 సం॥లో ధరలు**
ఆహార పదార్థాలు	20	40	35
దుస్తులు	35	7	40
యింధనం	10	3	15
ఇంటి అద్దె	12	1	20
ఇతరములు	25	4	25

జవాబు : సమిష్టి వ్యయ పద్ధతిలో జీవన వ్యయసూచీ నిర్మాణ పట్టిక

వస్తు	ఆధార సంవత్సరంలో (2000) ధరలు p_0	పరిమాణం q_0	వర్తమాన(2005) సం॥లో p_1	p_1q_0	p_0q_0
ఆహార పదార్థాలు	20	40	35	1400	800
దుస్తులు	35	7	40	280	245
యింధనం	10	3	15	45	30
ఇంటి అద్దె	12	1	20	20	12
ఇతరములు	25	4	25	100	100
			మొత్తం	$\sum p_1q_0 = 1845$	$\sum p_0q_0 = 1187$

పై పట్టిక నుండి $\Sigma p_1q_0 = 1845$, $\Sigma p_0q_0 = 1187$

$$\text{జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య} = \frac{\Sigma p_1q_0}{\Sigma p_0q_0} \times 100 = \frac{1845}{1187} \times 100 = 155.43$$

(బి) కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి (Family Budget Method) : ఈ పద్ధతి ఉపయోగించే జీవన వ్యయసూచి సంఖ్య నిర్మించేటప్పుడు, సూచీ సంఖ్య ఏ ప్రజలనుద్దేశించి నిర్మించబడుతుందో, ఆ ప్రజల కుటుంబాలలో ఎక్కువ కుటుంబాల నుండి కుటుంబ బడ్జెట్‌లను జాగ్రత్తగా అధ్యయనం చేసి, వివిధ అంశాల మీద ఒక సగటు కుటుంబం చేసే ఖర్చును అంచనా వేయాలి. వాటిని భారాలుగా పరిగణిస్తారు. ఆ భారాల విలువలను ధరలను పరిమాణాలచే గుణించి కనుక్కుంటారు. ప్రతి ఒక్క వస్తువు యొక్క ధరల సాపేక్షకాలను వాటి భారాల విలువలచే గుణించగా వచ్చిన లబ్దాల మొత్తాన్ని, భారాల విలువల మొత్తంచే భాగించి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను నిర్మిస్తారు. సంకేతాలలో :

భారాల విలువల మొత్తం = Σp_0q_0, దీనిని ΣV తో సూచిస్తే, ధరల సాపేక్షకాన్ని $\frac{p_1}{p_0} \times 100$ ని P తో సూచించిన యెడల

$$\text{జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య} = \frac{\Sigma PV}{\Sigma V}$$

ఉదాహరణ : ఈ క్రింది దత్తాంశానికి 2000 సం॥ ఆధార సం॥లో కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిని జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తువులు	2000 సంవత్సరంలో ధరలు	పరిమాణం	2005 సం॥లో ధరలు
ఆహార పదార్థాలు	20	50	35
దుస్తులు	35	15	50

యింధనం	10	4	20
యింటి అద్దె	15	2	23
ఇతరములు	30	5	36

జవాబు : జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణం - కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతి

వస్తువులు	2000 సం॥ర ఆధార సం॥ము ధరలు p_0	పరిమాణం q_0	2005 సం॥లో ధరలు p_1	భారాల విలువలు $V = p_0q_0$	వర్తమాన సం॥లో ధరల సాపేక్షకాలు $P = \frac{p_1}{p_0} \times 100$	PV
ఆహార పదార్థాలు	20	50	35	1000	$\frac{35}{20} \times 100 = 175$	175000
దుస్తులు	35	15	50	525	$\frac{50}{35} \times 100 = 142.9$	75022.5
యింధనం	10	4	20	40	$\frac{20}{10} \times 100 « 200$	8000.0
ఇంటి అద్దె	15	2	23	30	$\frac{23}{15} \times 100 = 153.3$	4599.0
ఇతరములు	30	5	36	150	$\frac{36}{30} \times 100 = 120$	5400.0
			మొత్తం :	$1745 = \Sigma V$		$268021.5 = \Sigma PV$

పై పట్టికలో నుండి

ఆధార సంవత్సరంలో విలువలు మొత్తం $\Sigma V = 1745.$

వర్తమాన సం॥లోని ధరల సాపేక్షికాలు మరియు విలువల లబ్దాల మొత్తం = $\Sigma PV = 268021.5$

$$\therefore \text{ జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య } = \frac{\Sigma PV}{\Sigma V} = \frac{268021.5}{1745} = 153.59$$

జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను ఉపయోగించేటప్పుడు తీసుకోవాల్సిన జాగ్రత్తలు : తరచుగా జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను తప్పుగా అన్వయించడం జరుగుతూ ఉంటుంది. అందుచేత ఈ సూచీని ఉపయోగించేటప్పుడు ఈ క్రింది విషయాలు ఎల్లప్పుడూ గుర్తుంచుకోవాలి.

1. జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్య వస్తువుల చిల్లర ధరలలో వచ్చిన మార్పును, ఆధార సం॥తో పోల్చిచూడటానికి మాత్రమే ఉపయోగపడుతుంది అంతేకాని, విభిన్న ప్రాంతాలలోని ప్రజల జీవన స్థాయిలో వచ్చే మార్పును గూర్చి చెప్పజాలదు. ఉదాహరణకు ముంబాయిలో జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య 220 మరియు చెన్నైలో 180 అయితే ముంబాయిలోని ప్రజల జీవన వ్యయం ఖచ్చితంగా చెన్నైలోని ప్రజల జీవన వ్యయం కన్నా ఎక్కువని చెప్పలేము.

2. ఈ సూచీ సంఖ్య నిర్మాణంలో వస్తుసముదాయంలో వస్తువులు స్థిరంగా వుంటాయని ఊహించడమైనది. కాని ఇది అన్ని సందర్భాలలో సాధ్యం కాదు. అదే విధంగా వస్తువుల నాణ్యతను కూడా స్థిరంగా వుంటుందనే ఊహపైన ఈ సూచీ సంఖ్య నిర్మించబడుతుంది.

3. సూచీ సంఖ్యలన్నింటిలాగానే ఈ సూచీ కూడా ప్రతిచయన దత్తాంశం మీద ఆధారపడి నిర్మించబడుతుంది. వస్తువులు ఎన్నుకోవడంలోను, ధరల కొటేషన్స్‌ను ఎన్నుకోవడంలోను, బడ్జెట్‌లను ఎన్నుకోవడంలో ప్రతిచయన పద్ధతి అవలంభించబడుతుంది. కాబట్టి ప్రతిచయన పద్ధతిలోని లోపాల ప్రభావం తప్పక ఈ సూచీపై పడుతుంది.

11.12 సారాంశం

సూచీ సంఖ్య ఒకరకమైన ప్రత్యేకమైన సగటు. కాలగమనంలో వస్తువుల ధరలలోగానీ, పరిమాణంలోగానీ లేక విలువల్లోగాని సంభవించే మార్పులను తులనాత్మకంగా పోల్చిచూడడానికి వాడే ఒక రకమైన సాధనం. వర్తమాన సంవత్సరంలోని ధరలు, పరిమాణాలను ఏ సంవత్సరంలో ధరలు లేదా పరిమాణాలతో పోల్చిచూడాలో ఆ సంవత్సరాన్ని ఆధార సంవత్సరం లేక ఆధార సమయం అంటారు. వర్తమాన సంవత్సరంలోని ధరలను (p_1) ఆధార సంవత్సరంలోని ధర (p_0)చే భాగించి వచ్చిన దానిని వందచే గుణించి ధరల సాపేక్షకాన్ని కనుగొంటారు.

ఒకే ఒక వస్తువుకు సంబంధించిన దత్తాంశ ఆధారంగా నిర్మించే సూచీ సంఖ్యను 'సరళ' సూచీ సంఖ్య అని, పలు వస్తువుల సముదాయంకు సంబంధించిన దత్తాంశంనుపయోగించి నిర్మించే సూచీ సంఖ్యను 'సంయుక్త' సూచీసంఖ్యయని అంటారు.

సరళ లేదా వ్యక్తిగత అంశాల సూచీలను స్థిర, ఆధార, లింక్, గొలుసు పద్ధతుల్లో కనుగొనవచ్చు. సమిష్టి సూచీలను రెండు రకాలుగా అనగా భారాలు లేని, భారిత సూచీలుగా నిర్మించటం జరుగుతుంది. భారిత సూచీలను నిర్మించేందుకు వివిధ శాస్త్రవేత్తలు వివిధ సూచీలను రూపొందించారు. అవి : లాస్పెయర్, పాషే, బౌలీ, మార్షల్, ఎడ్జ్‌వర్త్, ఫిషర్, కెల్లీ, వాల్ష్. ధరల్లో మార్పులను కనుగొనే సూచీలను ధర సూచీలని, పరిమాణాల్లో మార్పులను కనుగొనే సూచీలను పరిమాణ సూచీలని అంటారు.

సూచీ సంఖ్యల స్థిరత్వం నిర్ధారించుటకు మూడు పరీక్షలు కలవు. అవి 1. కాల పరివర్తక లేదా విపర్యయ పరీక్ష, 2. అంశాల (లేక) కారకాల పరివర్తక విపర్యయ పరీక్ష (3) చక్రీయ పరీక్ష. ఫిషర్ పద్ధతిలో నిర్మించిన సూచీసంఖ్య కాల విపర్యయ మరియు అంశాల విపర్యయ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుంది. అందువలన దానిని ఆదర్శ సూచీసంఖ్య అని ఫిషర్ పద్ధతిని ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతి అని అంటారు.

వస్తు సముదాయంలోని వస్తువుల టోకు ధరలలో వచ్చే మార్పులను కొలుచుటకు టోకు ధరల సూచీని ఉపయోగిస్తారు. ఒక ప్రాంతం లేక ఒక కాలానికి సంబంధించిన ప్రజల జీవన వ్యయంలో ఏర్పడే మార్పును ఆధార సం॥తో పోల్చి చూడటానికి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను ఉపయోగిస్తారు. వేతన సవరణలలోనూ, కరువు భత్యం నిర్ణయించుటకు, ప్రభుత్వ స్థాయిలో వేతన, ధరల మరియు పన్నులు మొదలగు వాటికి సంబంధించి నిర్ణయాలు తీసుకోవడానికి జీవన వ్యయ సూచీని ఉపయోగిస్తారు.

11.13 కఠిన పదాలు

1. **ఆర్థిక భారమితులు :** వాతావరణంలో మార్పులను కొలిచేందుకు భారమితిని ఉపయోగిస్తాము. ఆర్థిక కార్యకలాపాల్లో మార్పులను కొలిచేందుకు సూచీ సంఖ్యలను ఉపయోగిస్తాము. అందుకే వీటిని ఆర్థిక భారమితులు అంటాము.

2. **ధర సూచీలు :** పరిమాణాలను భారాలుగా తీసుకొని ధరలలో మార్పులను కొలిచే సూచీ సంఖ్యలను ధర సూచీ సంఖ్యలు అంటాము.

3. **పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు :** ధరలను భారాలుగా తీసుకొని పరిమాణాలలో మార్పులను కొలిచేందుకు రూపొందించే సూచీ సంఖ్యలను పరిమాణ సూచీ సంఖ్యలు అంటారు.

11.14 నమూనా ప్రశ్నలు

1. సూచీ సంఖ్య అనగానేమి? వాటిలోని రకాలు, వాటి ఉపయోగాలు వివరించండి.
2. సూచీ సంఖ్యల నిర్మాణంలో ఎదురయ్యే సమస్యలను వివరిస్తూ, వాటి నివారణకై తీసుకోవాల్సిన జాగ్రత్తలు తెలపండి.
3. సూచీసంఖ్యలను 'ఆర్థిక భారమితులు' (Economic Barometers) అంటారు. ఎందుకని?
4. సూచీ సంఖ్యల స్థిరత్వం నిర్ధారించే పరీక్షలు ఏవీ ? వాటిని విశదీకరించండి.
5. జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్య వలన ఉపయోగాలు, దాని నిర్మాణంలో తీసుకోవాల్సిన జాగ్రత్తలు వివరించండి.
6. క్రింది దత్తాంశానికి 1995 సం॥ ఆధార సం॥గా సామాన్య సమిష్టి పద్ధతిలో ధరల సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

వస్తు సముదాయం	1995 సం॥లో ధరలు	2000 సం॥లో ధరలు
A	150	165
B	210	200
C	230	150
D	110	160

7. దిగువ దత్తాంశానికి 1997వ సం॥ ఆధార సం॥గా సాపేక్షకాల సగటు పద్ధతినుపయోగించి ధరల సూచీ సంఖ్య కనుగొనుము.

వస్తు సముదాయం	1999 సం॥లో ధరలు	2002 సం॥లో ధరలు
బియ్యం	400	600
గోధుమలు	250	200
పప్పుదినుసులు	280	310
కూరగాయలు	100	120
పంచదార	500	670

8. క్రింది దత్తాంశానికి 2000 సం॥ ఆధార సం॥గా లాస్పియర్, పాషే, ఫిషర్ ఆదర్శ మరియు బౌలీ పద్ధతులను ఉపయోగించి ధరల సూచీ సంఖ్యలను కనుగొనండి.

	ఆధార సంవత్సరంలో		వర్తమాన సంవత్సరంలో	
వస్తు సముదాయం	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
A	5	25	10	70
B	4	16	6	35
C	2	40	5	85
D	6	10	9	24

9. దిగువ సమాచారం నుండి ఫిషర్ ఆదర్శ పద్ధతిలో ధరల సూచీ నిర్మించి అది కాల మరియు అంశాల విపర్యయ పరీక్షలను సంతృప్తి పరుస్తుందని చూపండి.

	ఆధార సంవత్సరంలో		వర్తమాన సంవత్సరంలో	
వస్తు సముదాయం	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు	పరిమాణం
A	20	12	24	8
B	8	15	16	10
C	2	30	6	39
D	5	20	7	30
E	14	10	10	25

10. ఈ క్రింది దత్తాంశానికి సమిష్టి వ్యయ పద్ధతినుపయోగించి జీవన వ్యయ సూచీ సంఖ్యను నిర్మించండి.

	ఆధార సంవత్సరంలో		వర్తమాన సంవత్సరంలో
వస్తు సముదాయం	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు
ఆహార పదార్థాలు	25	35	35
వస్త్రాలు	15	22	25
ఇంధనం	5	8	25
ఇంటి అద్దె	10	17	12
యితరములు	30	45	25

11. దిగువ నివ్వబడిన దత్తాంశానికి కుటుంబ బడ్జెట్ పద్ధతిని ఉపయోగించి జీవన వ్యయ సూచీసంఖ్యను కనుగొనండి.

	ఆధార సంవత్సరంలో		వర్తమాన సంవత్సరంలో
వస్తు సముదాయం	ధరలు	పరిమాణం	ధరలు
ఆహార పదార్థాలు	40	60	55
వస్త్రాలు	65	15	80
ఇంధనం	20	8	35
ఇంటి అద్దె	35	4	40
యితరములు	70	10	95

11.15 చదువవలసిన గ్రంథాలు

1. S.P. Gupta : Statistical Methods
2. C.B. Gupta : An Introduction to Statistical
3. S.C. Gupta & V.K. Kapoor : Fundamentals of Applied Statistics
4. D.C. Sanchethi & V.K. Kapoor : Statistics Theory, Methods and Applications

పాఠం - 12

కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ

పాఠ్యాంశ నిర్మాణక్రమం

12.0 లక్ష్యాలు

ఈపాఠం పూర్తయ్యేసరికి మీరు కింది విషయాలు అవగాహన చేసుకుంటారు.

* కాలశ్రేణులు అంటే ఏమిటీ ? కాలశ్రేణులలోని భాగాలు, కాలశ్రేణుల వల్ల ప్రయోజనాలు.
* ప్రవృత్తి అనగానేమి? ప్రవృత్తిని కనుగొనే పద్ధతులు
* సరసవక్రరేఖా పద్ధతి, అర్థమాధన మాధ్యమాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలను కనుగొనడం - ఈ పద్ధతుల గుణ దోషాలు.
* చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి, కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి విలువలను కనుగొనడం - గుణదోషాలు

12.1 విషయపరిచయం

కాలానుగుణంగా అమర్చిన దత్తాంశాన్ని కాలశ్రేణులు అంటారు. కాలానుగుణంగా అమర్చిన దత్తాంశ ప్రాతిపదికగా భవిష్యత్‌ను అంచనా వేయడం, తదనుగుణంగా నియంత్రణ చర్యలను చేపట్టేందుకు ఆర్థికవేత్తలు, వ్యాపారవేత్తలు ప్రయత్నిస్తున్నారు. కాలానుగుణంగా అమర్చిన చలరాశులు గమనిస్తే అవి ఎల్లప్పుడు నిలకడగా వుండవు. కాలానుగుణంగా మార్పులకు లేదా ఒడుదుడుకులకు గురవుతూ వుంటాయి. ఈ మార్పులకు అనేక అంశాలు కారణము. ఈ విధంగా వున్న కాలశ్రేణుల పరిశీలనా విధానాన్నే కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ అంటారు. కాలశ్రేణుల్లో మార్పులకు కారణమైన అంశాలు (1) దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (2) ఋతుసంబంధమైన హెచ్చుతగ్గులు (3) చక్రీయ హెచ్చుతగ్గులు (4) నియమరహిత హెచ్చుతగ్గులు.

దీర్ఘకాలంలో కాలశ్రేణులలోని చలరాశులు చలించే దిశను ప్రవృత్తి అంటారు. చలరాశుల విలువలు క్రమక్రమంగా పెరిగితే ఊర్ధ్వ ప్రవృత్తి అని, తగ్గుతూ వుంటే అథోప్రవృత్తి అంటాము. ఈ పాఠంలో మనం కాలశ్రేణులు ఆధారపడి వున్న అంశాల ప్రవృత్తి రేఖను కనుగొనడం, ప్రవృత్తి విలువలు కనుగొనడం, భవిష్యత్‌ను అంచనా వేయడం మున్నగు విషయాలను తెలుసుకుంటాం.

12.2 కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ

కాలానుగుణంగా అమర్చిన దత్తాంశాన్ని 'కాలశ్రేణులు' అని అంటారు. కాలానుగుణంగా వున్న చలరాశులలో సహజంగా మార్పులు సంభవిస్తుంటాయి. ఈ విధమైన మార్పులు పరిశీలన ఆవశ్యకత ఆర్థిక, వాణిజ్య రంగాల్లో చాలా ఎక్కువగా వుంటుంది. కాలానుగుణంగా వున్న చలరాశులలోని మార్పులను కనుగొని, భవిష్యత్తులో చలరాశులను అంచనా వేయడం అనేది నేడు ఆర్థిక వేత్తలు, వ్యాపార వేత్తలు చేపట్టే ముఖ్య విధి. ఈ అంచనాలపై వ్యాపార కార్యకలాపాలు ఆధారపడి వుంటాయి.

కాలశ్రేణులకు సంబంధించిన చలరాశులను పరిశీలించే విధానాన్ని 'కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ' అంటారు. కాలానికి సంబంధించిన చలరాశి విలువలలోని మార్పులనకు అనేక కారణాలు ఉండవచ్చు. ఈ మార్పుకు కారణాలుగా ప్రజల అభిరుచులు, అలవాట్లలో మార్పులు, జనాభాలో మార్పు మొదలనవి చెప్పవచ్చు. వీటి అన్నిటి వల్ల లేదా వీటి పరస్పర చర్య వల్ల చలరాశులలో మార్పు సంభవించవచ్చు. కాలశ్రేణులలో మార్పులకు కారణమైన వివిధ అంశాలను స్థూలంగా నాలుగు భాగాలుగా చెప్పవచ్చు.

12.2.1 కాలశ్రేణుల్లోని భాగాలు : కాలశ్రేణుల్లో మార్పులకు కారణభూతమైన అంశాలను నాలుగు రకాలుగా వర్గీకరించడం సాంప్రదాయం. ఈ నాలుగు అంశాలను సాధారణంగా కాలశ్రేణుల్లో భాగాలని, కాలశ్రేణుల్లోని అంశాలు అని పిలుస్తారు.

అవి :

1. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (Secular Trend or T)
2. రుతువుల వల్ల వచ్చే హెచ్చుతగ్గులు (Seasonal Variations or S)
3. చక్రీయ హెచ్చు, తగ్గులు (Cyclical Variations or C)
4. నియమరహిత హెచ్చుతగ్గులు (Irregular Variations or I)

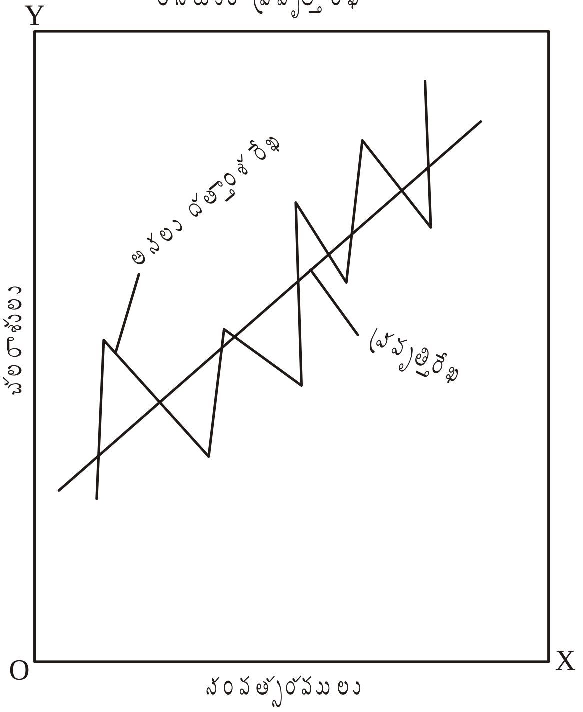
ఏ విధమైన కాలశ్రేణుల్లోనైనా ఈ నాలుగు అంశాలు వుండి దత్తాంశాన్ని ప్రభావితం చేస్తూ వుంటాయి. ఈ నాలుగు భాగాలను గురించి ప్రస్తుతం తెలుసుకుందాం.

12.2.1.1 దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (T) : కాలశ్రేణుల దత్తాంశంలో దీర్ఘకాలంలో పెరిగే లేదా తగ్గే లేదా స్థిరంగా కొనసాగే స్వభావాన్ని తెలియజేసే స్వభావాన్ని దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి లేదా సాధారణ ప్రవృత్తి అంటారు. 'ప్రవృత్తి' అనే పదం నేటి కాలంలో అతి తరచుగా వాడే పదం. ప్రవృత్తి అనే పదంలో దీర్ఘకాలిక మార్పులు తప్ప స్వల్పకాలిక ఒడుదుడుకులు వుండవు. దీర్ఘకాలంలో కాలశ్రేణుల చలరాశులు పయనించే దిశనే ప్రవృత్తిగా చెప్పవచ్చు.

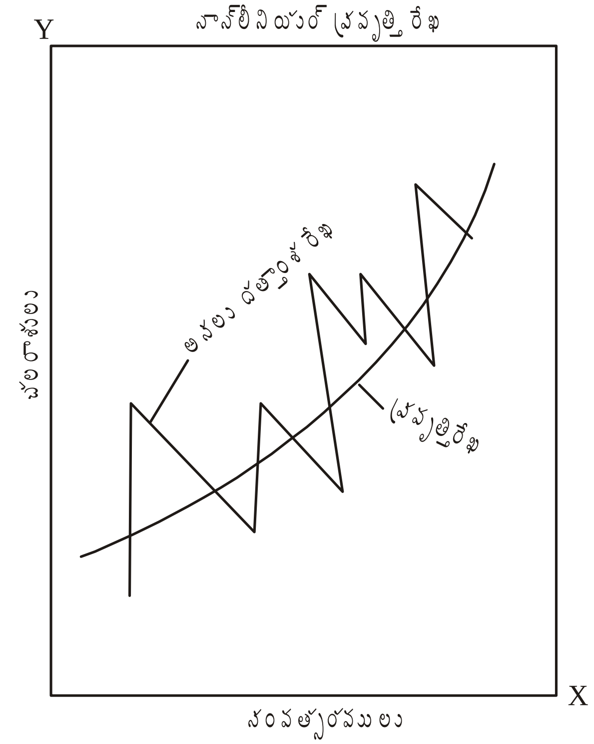
దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి మార్పులకు కారణాల్లో ముఖ్యమైనవిగా జనాభా మార్పు, సాంకేతిక పరిజ్ఞానంలో మార్పు, వినియోగదారుల అలవాట్లు, అభిరుచుల్లో మార్పులను చెప్పటం జరుగుతుంది. జనాభాలో పెరుగుదల వస్తే వారు ఉపయోగించే వస్తువులన్నింటి వినియోగంలో ఉదాహరణకు ఆహారం, వస్త్రం, మార్పులు సంభవిస్తాయి. అదే విధంగా సాంకేతిక మార్పులు, అలవాట్లలో మార్పుల వల్ల వాటికి సంబంధించిన వస్తువులన్నింటిలో మార్పు సంభవించడం జరుగుతుంది. దీర్ఘకాలంలో ప్రవృత్తి కొన్ని సందర్భాల్లో పెరగడం, కొన్ని సందర్భాల్లో తగ్గడం, కొన్ని సందర్భాల్లో స్థిరంగా వుండడం జరుగుతుంది. ఈ ప్రవృత్తిలోని మార్పుల ధోరణి కూడా వివిధ రేట్లలో ఉండవచ్చు. కొన్ని సందర్భాల్లో ప్రవృత్తి మార్పు ధోరణ సరళరేఖాత్మకంగా వుంటే, మరికొన్ని సందర్భాల్లో వక్రరేఖాత్మకంగా ఉండవచ్చు. సరళరేఖాత్మకంగా వుంటే లీనియర్ ప్రవృత్తి అని, వక్రరేఖాత్మక లేదా నాన్ లీనియర్ ప్రవృత్తి అంటాము. క్రింది 13.1 పటాల్లో 'ఏ' పటం లీనియర్ ప్రవృత్తిని, 'బి' పటం నాన్ లీనియర్ ప్రవృత్తిని సూచిస్తాయి.

రేఖాపటం 13.1

'ఏ' పటం
లీనియర్ ప్రవృత్తి రేఖ



'బి' పటం
నాన్‌లీనియర్ ప్రవృత్తి రేఖ



పై పటాల్లో రెండు ప్రవృత్తి రేఖలు పెరుగుచున్నవి కావున ఊర్ధ్వ ప్రవృత్తి రేఖలుగా కూడా చెప్పవచ్చు. ఒక వేళ తగ్గుచున్నట్లయితే అదో ప్రవృత్తిగా చెప్పవచ్చు.

12.2.1.2 రుతువుల వల్ల వచ్చే హెచ్చుతగ్గులు : స్వల్పకాలంలో వచ్చు మార్పులకు రుతువుల వల్ల వచ్చే హెచ్చుతగ్గులు మరియు చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులు కారణాలుగా చెప్పవచ్చు. ఈ రెంటిలో రుతు సంబంధమైన హెచ్చుతగ్గులను గూర్చి తెలుసుకుందాం. ప్రతి సంవత్సరం క్రమం తప్పకుండా ఒక నియత కాలంలో లేదా నిర్ణీత కాల వ్యవధిలో రుతువుల వల్ల వచ్చే హెచ్చుతగ్గులు ఏర్పడతాయి. ఈ విధమైన మార్పులు ప్రతి సంవత్సరానికొకసారి పునరావృతం అవుతుంటాయి. దాదాపు అన్ని ఆర్థిక కార్యకలాపాలు రుతుసంబంధమైన మార్పులకు ప్రభావితం అవుతాయి. ఉదాహరణకు పంట కాలంలో ధర తగ్గటం, కాలానుగుణంగా డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్స్‌లో అమ్మకాలలో మార్పులు, వివిధ కాలాల్లో బ్యాంకు డిపాజిట్లు, బ్యాంకు క్లియరెన్సు మొదలైనవి. ఈ ఋతు సంబంధమైన హెచ్చు తగ్గులకు కారణాలుగా క్రింది అంశాలను చెప్పవచ్చు.

(ఎ) వాతావరణం ప్రభావం : ప్రకృతి శక్తుల ప్రభావం వల్ల వాతావరణ పరిస్థితుల్లో మార్పులు సంభవిస్తాయి. వర్షపాతం, గాలిలో తేమ, ఉష్ణం మొదలైన ప్రకృతి శక్తులలోని మార్పుల ఫలితంగా ఉత్పత్తులు ప్రభావితం అవుతాయి. చలికాలంలో ఉన్ని దుస్తుల ఉత్పత్తి పెరిగితే, వర్షాకాలంలో గొడుగులు, రెయిన్ కోటుల ఉత్పత్తి పెరుగుతుంది. వాతావరణం వల్ల వ్యవసాయం కూడా ప్రభావితం అవుతుంది. ఈ విధంగా వాతావరణంలో మార్పులు ఋతు సంబంధమైన మార్పులకు కారణమౌతాయి.

(బి) ఆచారాలు, సాంప్రదాయాలు, అభిరుచులు, అలవాట్లు : ప్రకృతి కారణాలతో పాటు మానవులు ఏర్పరుచుకున్న ఆచారాలు, సాంప్రదాయాలు, అభిరుచులు, అలవాట్లు కూడా ఋతుగత హెచ్చు తగ్గులకు కారణమౌతాయి. ఉదా॥కు

దీపావళి, దసరా, క్రిస్మస్ సందర్భాల్లో విభిన్న వస్తువుల డిమాండ్లలో మార్పులు కన్పిస్తాయి. జూన్ నెలలో స్కూళ్ళను తెరుస్తారు కావున యూనిఫారం, పుస్తకాలు మొదలైన వాటి డిమాండులో మార్పులు ఏర్పడతాయి.

12.2.1.3 చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులు (C): చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులు వ్యాపార చక్రాల ఫలితంగా ఏర్పడతాయి. ఇవి క్రమబద్ధంగా పునరావృతమౌతూ, ఒక సం॥ము లేదా ఆ పై బడిన కాల వ్యవధిని కలిగి ఉంటాయి. ఆర్థిక, వ్యాపార రంగములో క్రమబద్ధంగా వచ్చే హెచ్చు తగ్గులను వ్యాపార చక్రాలు అంటారు. ఇవి నాలుగు ముఖ్య దశలను అనగా సౌభాగ్యము, తిరోగమనం, ఆర్థిక మాంధ్యం, పురోగమనం అనే నాలుగు దశలను కలిగి ఉంటాయి. ప్రతి దశలోను వివిధ ఆర్థిక కార్యకలాపాలు వివిధ రకాలుగా ఉంటాయి. పురోగమనం, సౌభాగ్యంలో ఆర్థిక కార్యక్రమాలు పెరుగుతూ, తిరోగమనం, ఆర్థిక మాంధ్యంలో తగ్గటం జరుగుతూ ఉంటాయి.

12.2.1.4 నియమ రహిత హెచ్చు తగ్గులు (I) : పైన తెలిపిన కారణాలతో పాటు కాలశ్రేణులను ప్రభావితం చేసే మరో అంశము నియమ రహిత హెచ్చు తగ్గులు. వీటినే ప్రతిచయన హెచ్చు తగ్గులు అంటారు. ఇవి హఠాత్తుగా సంభవించే మార్పులు. ఇవి నిర్ణీత కాల వ్యవధిలో పునరావృతం అవుతాయని చెప్పలేము. ప్రమాదాలు, సమ్మెలు, లాకౌట్లు, వరదలు, భూకంపాలు, యుద్ధాలు మొదలైనవి ఈ కోవలోకి వస్తాయి.

12.2.2 కాల శ్రేణులలో ఉపయోగించే విశ్లేషణ నమూనాలు : కాల శ్రేణులు పైన తెలిపిన నాలుగు అంశాలు పై అనగా దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (T), ఋతు సంబంధమైన హెచ్చు తగ్గులు (S), చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులు (C) మరియు నియమ రహిత హెచ్చు తగ్గులు (I) పై ప్రభావితమై మారుతూ ఉంటాయి. వీటిని విశ్లేషించటానికి రెండు నమూనాలు ఉన్నాయి.

1. కూడిక నమూనా
2. గుణించే నమూనా

12.2.2.1 కూడిక నమూనా :- ఈ నమూనా ప్రకారం కాల శ్రేణులను క్రింది విధంగా తెలుపవచ్చు.

$$Y = T + S + C + I$$

ఈ కూడిక నమూనా ప్రకారం పైన తెలిపిన నాలుగు అంశాలు స్వతంత్రంగా పని చేస్తాయని, ఏ అంశం కూడా మిగిలిన మూడు అంశాల పై ప్రభావాన్ని కలుగజేయవని ఊహిస్తుంది. కాని వాస్తవానికి ఒక దాని ప్రభావం మరో దానిపై ఉంటుంది. అందుచేతనే గుణించే నమూనాను తెలుసుకోబోతున్నాము.

12.2.2.2 గుణించే నమూనా : ఆర్థిక వ్యవస్థలోని దాదాపు అన్ని కాలశ్రేణులు కింది గుణించే నమూనాను పోలి ఉంటాయి.

$$Y = T \times S \times C \times I$$

ఈ నమూనా ప్రకారం పైన తెలిపిన నాలుగు అంశాలు విధిగా స్వతంత్రత కలిగి ఉండాలని కాకుండా ఒక అంశం మిగిలిన అంశాలను ప్రభావితం చేయవచ్చు అని రూపొందించుట జరిగింది.

12.2.3 కాల శ్రేణుల దత్తాంశాన్ని ఎడిట్ చేయటం : సేకరించిన కాలశ్రేణుల దత్తాంశం పోల్చుటకు, ఫలితాలను వెలిబుచ్చుటకు అనుగుణంగా ఉండవచ్చు లేదా కొన్ని సర్దుబాట్లు అవసరమవ్వవచ్చు. ఫలితాలను వెలిబుచ్చేందుకు, పోల్చేందుకు అనుగుణంగా కాలశ్రేణుల దత్తాంశాన్ని సరి చేయటాన్నే ఎడిటింగ్ అంటాము. ఎడిటింగ్‌లో అనవసరమైనది పరిహరించి, అవసరమైన సర్దుబాట్లు చేయటం జరుగుతుంది. దత్తాంశంలో సవరణ విషయంలో వివేకంతో, విచక్షణా జ్ఞానంతో ప్రవర్తించవలె. (1) కాలెండరు మార్పులు, (2) ధరల మార్పులు, (3) జనాభా మార్పులు, (4) తదితరాలైన మార్పులు - వీటిలో సవరణ అవసరము కావచ్చు.

12.2.3.1 కాలెండరు మార్పులు : అన్ని నెలలలో ఉండే రోజులు ఒక్క విధంగా ఉండవు. కాబట్టి ఒక నెలలోని అమ్మకాలను ఇంకో నెలలో అమ్మకాలతో పోల్చిచూడటానికి వీలు ఉండదు. ఈ ఇబ్బందిని ఎదుర్కోవడానికి ఒక నెలలోని రోజుల సంఖ్యతో అదే నెలలోని అమ్మకాలను విభాగించవలె. కొన్ని సందర్భాలలో నెలసరి దత్తాంశాలను (Monthly Data) ఒక కాలండరు రోజు ప్రకారం

సరి చూసినట్లయితే బాగా ఉండవచ్చు. ఉదా॥ ఒక సినిమా హాలులో వచ్చే ఆదాయము కొన్ని సందార్భలలో పని రోజు (Working Day) ప్రకారం సరిచూస్తే బాగుంటుంది.

12.2.3.2 ధరలలో మార్పులు : ఒక్కొక్క యూనిట్ ధరలో యూనిట్ల మొత్తాన్ని హెచ్చరించినట్లయితే, అమ్మకపు విలువ లభ్యమవుతుంది. అమ్మిన సరుకు మొత్తాలు, ధరలు కూడా ఒక కాలంలో ఉన్నట్లు, ఇంకో కాలంలో ఉండవు. మారుతున్న ధరల యొక్క అలజడి కలిగించే ప్రభావాన్ని (disturbing influence) పరిశీలించితే గాని ఒక కాలంలోని అమ్మకాలను ఇంకో కాలంలోని అమ్మకాలతో మనము పోల్చి చూడలేము. ఒక కాల వ్యవధిలోని అమ్మకాల సంఖ్యను, ఆ కాల వ్యవధి యొక్క ధరలతో భాగించినట్లయితే, మనం దానిని పోగొట్టగలము.

అమ్మకాల విలువ = సరుకుల మొత్తము × ధర

12.2.3.3 జనాభాలో మార్పులు : మన దేశంలో 1951లో వినియోగించిన ధాన్యాన్ని పోల్చిచూడడానికి వీలులేదు. ఎందుకంటే ఈ నలభై సంవత్సరాలలో జనాభా మిక్కుటంగా పెరిగింది. కాని ఒక సంవత్సరంలో వినియోగమైన ధాన్యపు మొత్తాన్ని, ఆ సంవత్సరంలో జనాభా మొత్తంతో భాగిస్తే మనము తలసరి వినియోగాన్ని (per capital consumption) తెలుసుకోవచ్చు. అమ్మకపు దత్తాంశంలో మొదలైన వాటిని తలసరి లెక్కను చూపవలె.

12.2.3.4 తదితరాలైన మార్పులు : కాల గమనంలో కొన్ని ఇతర మార్పులు రావచ్చు. ఇది వరకు తూకాన్ని టన్నులలో లెక్క వేసేవారు. ఇప్పుడు మెట్రిక్ టన్నులలో లెక్క చూస్తున్నారు. ఇట్లాంటి మార్పులను గమనిస్తూ ఉండవలె. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ భావ పూరితంగా ఉండవలెనంటే పరిశీలనలు గల సంపూర్ణకాలానికి దత్తాంశం సరిపోల్చేటట్లు ఉండవలె. కాని అది అంత సాధ్యమైనది కాదు.

12.2.4 కాల శ్రేణుల వల్ల ప్రయోజనాలు : కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ వ్యాపార వేత్తలకు, ఆర్థిక వేత్తలకు అత్యంత ప్రయోజనకరమైనవి. వీరితోపాటు సామాజిక, భౌతిక, సామాన్య మొదలైన శాస్త్రాల్లో పనిచేసే శాస్త్రవేత్తలకు కూడా ఎంతో సహాయపడతాయి. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణకు సంబంధించిన ప్రయోజనాలలో కొన్నింటిని గురించి తెలుసుకుందాం.

(ఎ) కాల శ్రేణుల వల్ల దత్తాంశము యొక్క మార్పు స్వభావాన్ని అనగా దత్తాంశములోని మార్పుల (Variations) స్వభావాన్ని తెలుసుకోవచ్చు.

(బి) వ్యాపార సంబంధమైన, ప్రణాళికల రూపకల్పన అమలుకు సంబంధించిన నిర్ణయాలు తీసుకోవటానికి ఉపకరిస్తుంది.

(సి) వర్తమాన గణాంకాలకు, అంచనా వేసిన గణాంకాలకు మధ్య వ్యత్యాసాలను తెలియజేసి వ్యత్యాలకు సంబంధించిన కారణాల విశ్లేషణకు ఉపకరిస్తుంది.

(డి) భవిష్యత్తుకు సంబంధించి జోస్యాన్ని తెలియజేయటం లేదా అంచనాలను వెయ్యటానికి కాల శ్రేణులు ఎంతో ఉపయోగపడతాయి.

(ఇ) వివిధ ప్రదేశాలలో, వివిధ కాలాల్లో చలరాశుల విలువల యొక్క మార్పులను పోల్చేందుకు సహకరిస్తాయి.

12.2.5 కాల శ్రేణుల విశ్లేషణలో ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులు :- కాల శ్రేణుల విశ్లేషణలో ప్రవృత్తిని లేదా ప్రవృత్తి విలువలను కింది పద్ధతుల ద్వారా కొలవడం జరుగుతుంది. అవి -

ఎ) సరస వక్రరేఖా పద్ధతి (Free-Hand Curve)

బి) అర్థ మాధ్యమాల పద్ధతి (Semi-Avarage Method)

సి) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి (Least Squares Method)

డి) చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి (Method of Moving Avarages)

ఈ వివిధ పద్ధతులను గురించి వివరంగా తెలుసుకుందాం.

సరస వక్రరేఖా పద్ధతి : ఈ పద్ధతిని రేఖా పద్ధతి లేదా పరిశీలన ద్వారా వక్రరేఖ సంధాన పద్ధతి అంటారు. ఈ పద్ధతి చాలా సులువైనది. ఈ పద్ధతిలో మొదట రేఖాపటములో అసలు దత్తాంశమును (Original Data) బిందువులతో గుర్తించి వాటిని స్కేలుతో కలపడం జరుగుతుంది. ఈ రేఖను అసలు దత్తాంశరేఖ అంటారు. ఆ తరువాత ఈ అసలు దత్తాంశరేఖ గమనాన్ని బట్టి హెచ్చుతగ్గులులేని ఒక వక్రరేఖను పరిశీలన ద్వారా గీయటం జరుగుతుంది. అంటే ఈ విధంగా గీసిన ప్రవృత్తిరేఖ ద్వారా రుతు సంబంధమైన, చక్రీయ, నియమరహిత హెచ్చుతగ్గులు పరిహరించబడతాయి. అయితే ప్రవృత్తి రేఖను గీచేటప్పుడు తగు జాగ్రత్తలు తీసుకోవలసి వుంటుంది.

సుగుణాలు :

1. ఈ పద్ధతి అతి సులువైనది.
2. గణన తక్కువ సమయంలో, ఏ విధమైన గణిత పద్ధతి అవసరం లేకుండా చేయవచ్చు.
3. ఈ పద్ధతి సరళమైనది. దీని ద్వారా సరళ లేదా వక్రరేఖా ప్రవృత్తిని సంధానం చేయవచ్చు.

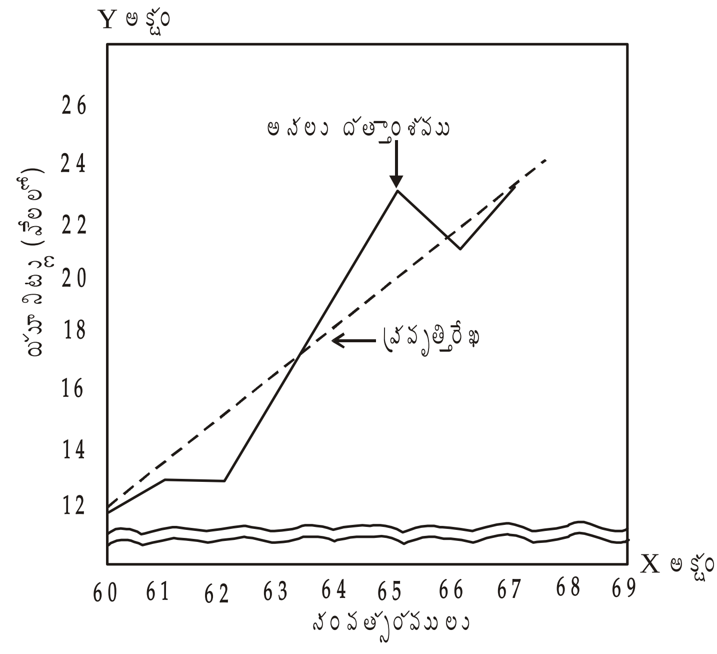
లోపాలు :

1. ఈ పద్ధతిలోని అతి ముఖ్యమైన లోపం గణకుని పాక్షికతకు అవకాశం ఎక్కువ. గణకుడు నైపుణ్యతలేని వాడైనట్లయితే ఈ పద్ధతి వల్ల దుష్ఫలితాలే ఎక్కువ.
2. ప్రవృత్తిని కొలవటానికి ఈ పద్ధతి ఉపయోగపడదు.
3. గణకుడి వ్యక్తిగత ఆలోచన, నైపుణ్యాల పై ఆధారపడి ఉంటుంది. కావున దీని ద్వారా చేసిన అంచనాలు ప్రమాదభరితంగా కూడా మారతాయి.

ప్రశ్న - ఈ కింది సమాచారానికి సరస వక్ర రేఖా పద్ధతిలో ప్రవృత్తిరేఖను గీయండి.

సంవత్సరము :	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967
వేలలో యూనిట్లు :	12	13	13	16	19	23	21	23

రేఖా పటం - 13.2



(బి) పాక్షిక సగటుల పద్ధతి :- ఈ పద్ధతిని అర్థ మాధ్యమాల పద్ధతి అని కూడా అంటారు. పై పద్ధతి కన్నా ఈ పద్ధతి మెరుగైనది. ఈ పద్ధతిలో కాల శ్రేణుల దత్తాంశ విలువలను రెండు సమ భాగాలుగా చేయాలి. ఉదాహరణకు 1955 నుంచి 1964కు గల కాల శ్రేణుల విలువలను 1955 నుంచి 1959 వరకు, 1960 నుంచి 1964కు రెండు భాగాలు చేయాలి. ఈ రెండు భాగాలకు సంబంధించి సగటులను గణన చేసి, వచ్చిన సగటును ఆ భాగానికి సంబంధించిన మధ్య సంవత్సరానికి ఇవ్వాలి. ఈ విలువలను రేఖా పటంలో గుర్తించి ఆ రెండు విలువలను గుర్తించిన బంధువులను స్కేలుతో కలిపితే వచ్చే రేఖనే ప్రవృత్తి రేఖ అంటాము. ఈ రేఖకు కిందకు లేదా మీదకు పొడిగించి మధ్యస్థ విలువలు పొందవచ్చు లేదా భవిష్యద్విలు వలను సూచించవచ్చు.

మనకు ఇచ్చిన దత్తాంశం సరి సంఖ్యలో ఉంటే సులువుగా రెండు భాగాలు చేయవచ్చు. ఒక వేళ బేసి సంఖ్యలే ఉంటే మధ్య సంవత్సరాన్ని మినహాయించి రెండు భాగాలుగా చేసుకోవాలి. అంటే ఇచ్చిన దత్తాంశం 10 సం।లు కలిగి ఉంటే మొదటి 5 సం॥లు, రెండో ఐదు సం॥లుగా చేయాలి. ఒకవేళ 11 సం॥లు ఉంటే మధ్య సం॥ను (అంటే ఆరో సం॥ను) వదలి, మొదటి ఐదు సం॥ములను, చివరి ఐదు సం॥లను కలిపి సగటు గణించి, రేఖా పటంలో గుర్తించి ప్రవృత్తి రేఖను రూపొందించాల్సి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ -1 (బేసి సంఖ్యలో సం॥లు ఇచ్చినపుడు) : కింది సమాచారానికి పాక్షిక సగటుల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖను చూపండి.

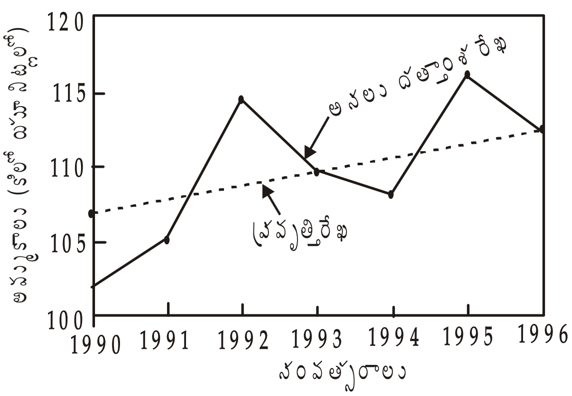
సం॥ము	**A సంస్థ అమ్మకాలు లేక యూనిట్లు**	**సం॥ము**	**A సంస్థ అమ్మకాలు వేల యూనిట్లలో**
1990	102	1994	108
1991	105	1995	116
1992	114	1996	112
1993	110		

సమాధానం :- పైన ఇచ్చిన ఉదాహరణలో 7 సం॥లు ఇవ్వటం జరిగింది. ఈ ఏడు సం॥లలో మధ్య సం॥ము అంటే 1993ను వదలివేసి మొదటి మూడు సం॥ల చివరి మూడు సం॥ల పాక్షిక సగటులను కనుగొని మధ్య సం॥లకు కింద చూపిన విధంగా ఇవ్వాలి. ఆ తరువాత ఆ విలువలను రేఖా పటంలో గుర్తించి వాటిని కలిపితే ప్రవృత్తి రేఖ వస్తుంది.

సం॥ము	**A సంస్థ అమ్మకాలు (వేల యూనిట్లలో)**	**పాక్షిక సగటులు**
1990	102	
1991	105	$\frac{102+105+114}{3}=107$
1992	114	
1993	110	
1994	108	
1995	116	$\frac{108+116+112}{3}=112$
1996	112	

పాక్షిక సగటుల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను రూపొందించటం

రేఖా పటం - 13.3



ఉదాహరణ - 2 : (సరి సంఖ్యలో సం॥లు ఇచ్చినప్పుడు) : పాక్షిక సగటు పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను కనుగొని, 1970 సం॥నకు ప్రవృత్తి విలువను అంచనా వెయ్యండి.

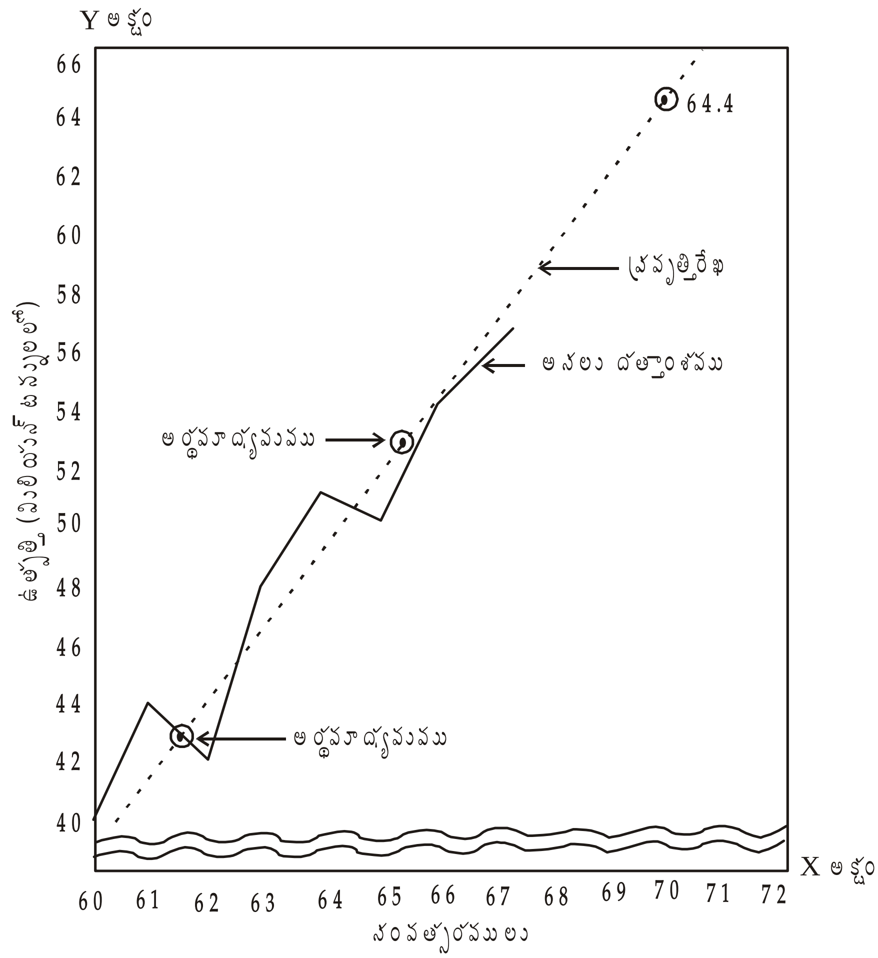
సంవత్సరాలు	**ఉత్పత్తి (మిలియను టన్నులలో)**	**సంవత్సరాలు**	**ఉత్పత్తి (మిలియను టన్నులలో)**
1960	40	1964	51
1961	44	1965	50
1962	42	1966	54
1963	48	1967	56

జవాబు : మొదటి నాలుగు సంవత్సరాల సగటు $=\frac{174}{4}=43.5$. చివరి నాలుగు సంవత్సరాల సగటు $=\frac{211}{4}=52.75$. ఈ రెండు సగటు విలువలను మొదటి, చివరి భాగాల మధ్య బిందువులలో తీసుకోవలె. అంటే మొదటి భాగం మధ్య బిందువు 1961 సంవత్సరం జూలై 1వ తేదీగాను, చివరి భాగం మధ్య బిందువు 1965 జూలై 1 గాను తీసికొని రెండు బిందువులు గుర్తించవలె.

సంవత్సరాలు	**ఉత్పత్తి (మిలియను టన్నులలో)**	**అర్ధమాధ్యమాలు**
1960	40	
1961	44	
		$\frac{40+44+42+48}{4}=43.5$
1962	42	
1963	48	
1964	51	
1965	50	
		$\frac{51+50+54+56}{4}=52.75$
1966	54	
1967	56	

రేఖా పటములో చూపటం

రేఖాపటం - 13.4



పై పటంలో అర్థ మాధ్యమాల పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన ప్రవృత్తి రేఖను పొడిగించి **1970**వ సం॥మునకు అంచనా కట్టిన విలువ **64.4** మిలియన్ టన్నులు.

ఉదాహరణ - 3 : దిగువ దత్తాంశం నుంచి అర్థ మాధ్యమాల పద్ధతిలో ప్రవృత్తి రేఖను చూపండి.

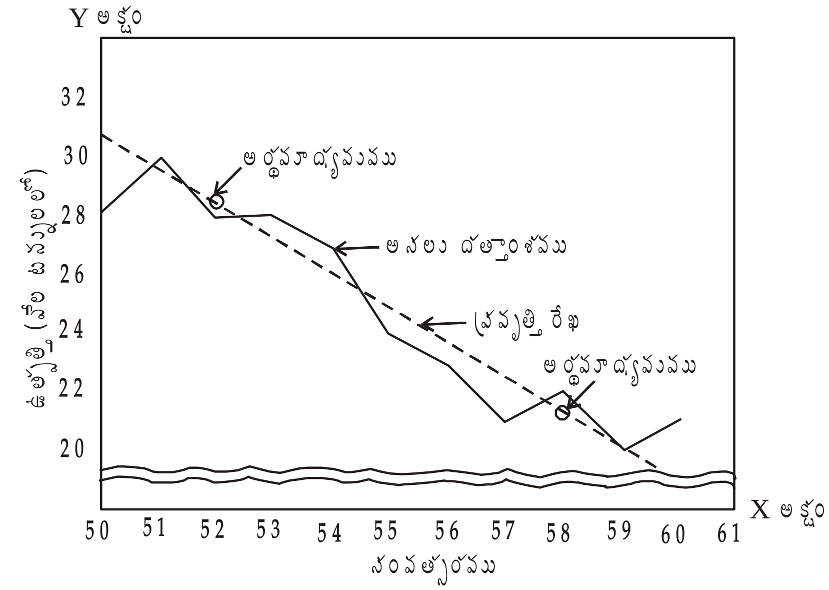
సంవత్సరము	ఉత్పత్తి (వేల టన్నులలో)	సంవత్సరము	ఉత్పత్తి (వేల టన్నులలో)
1950	28	1956	23
1951	30	1957	21
1952	28	1958	22
1953	28	1959	20
1954	27	1960	21
1955	24		

జవాబు : పై దత్తాంశంలో 11 సంవత్సరములు ఇచ్చినందున, మధ్య సంవత్సరమును విడిచి మొదటి సంవత్సరాల సగటు, చివరి అయిదు సంవత్సరాల సగటు తీసుకోవలె,

మొదటి 5 సం॥ సగటు $=\frac{141}{5}=28.2$, చివరి 5 సం॥ సగటు $=\frac{107}{5}=21.4$

మొదటి 5 సం॥ మధ్య బిందువుగా 28.2 ను 1952వ సంవత్సరము వద్దను, చివరి 5 సం॥ మధ్య బిందువుగా 21.4 ను 1958 వ సం॥ వద్దను గుర్తించి, ఆ రెండు బిందువులను కలిపిన మనకు కావలసిన ప్రవృత్తి రేఖ వస్తుంది.

రేఖా పటం 13.5



పాక్షిక సగటుల పద్ధతి - ప్రయోజనాలు :

1. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి లేక కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతితో పోల్చితే ఈ పద్ధతి సులువైనది.
2. వ్యక్తిగత పాక్షికతకు తావులేదు. కావున ప్రవృత్తిని కొలిచినట్లయితే వచ్చే విలువలు ఒకే విధంగా ఉంటాయి.
3. ఈ పద్ధతి ద్వారా భూత, భవిష్యత్ విలువలను అంచనా వెయ్యవచ్చు.

లోపాలు :

1. ఈ పద్ధతి సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని మాత్రమే ఇవ్వగలదు. ఒక వేళ వక్రరేఖా సంబంధం కనిపించిననూ మనం సరళ రేఖను మాత్రమే రూపొందించగలం.
2. ఈ పద్ధతిలో ఉపయోగించిన సగటు (పాక్షిక సగటుల కోసం) అంకమధ్యమం. అయితే అంక మధ్యమానికి కూడా కొన్ని పరిమితులు ఉన్నాయి. ఆ పరిమితులు ఈ పద్ధతికి వర్తిస్తాయి.
3. ఈ పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన ప్రవృత్తి విలువలు నమ్మదగినవి కాదు. ఎందుకంటే ఈ పద్ధతిలో రూపొందించిన ప్రవృత్తి రేఖ గణిత పద్ధతిలో రూపొందించింది కాదు.

చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి : ప్రవృత్తిని కొలిచే పద్ధతులైన సరస వక్రరేఖా పద్ధతి, పాక్షిక సగటులలోని లోపాల దృష్ట్యా రూపొందించిన మరో పద్ధతే ఈ పద్ధతి. ప్రవృత్తిని కనుగొనేందుకు ఈ పద్ధతి చాలా సులువైనది, సరళమైనది. ఈ పద్ధతిలో ముందుగా ఎన్ని సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనాలో నిర్ణయించుకోవాలి. అంటే వరుసగా ఏయే అంశాల సరాసరిని కనుగొనాలో నిర్ణయించుకోవలే.

ఈ సరాసరి లేదా అంకమధ్యమం 2, 3, 4, 5, 6 సం॥లు లేదా అంశాలు కావచ్చు. ఉదాహరణకు 5 సం॥ల చలిత మాధ్యమాన్ని కనుగొనవలసి వస్తే మొదటి 5 సం॥ల చలరాశుల సరాసరి కనుగొని ఆ ఐదు సంవత్సరాలలో మధ్య సం॥మునకు లేదా 3వ సం॥నకు ఎదురుగా ఇవ్వాలి. ఆ తరువాత మొదటి సం॥మును వదలి ఆరో సం॥మును కలుపుకుంటూ చలిత మాధ్యమాలను కనుగొంటూ మధ్య సంవత్సరానికి ఇస్తూ పోవాలి.

చలిత మాధ్యమాన్ని కాలాన్ని నిర్ణయించటంలో నేర్పరితనం అవసరం. దత్తాంశంలోని చక్ర భ్రమణ కాల వ్యవధికి అనుగుణంగా చలిత మాధ్యమ కాలాన్ని ఎంపిక చేసుకోవలసి ఉంటుంది. చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనే పద్ధతులను బేసి సంఖ్యలు ఉన్నప్పుడు, సరి సంఖ్యలు ఉన్నప్పుడు అని రెండు విధాలుగా చూపటం జరిగింది.

1. బేసి సంఖ్యలు అయితే : చలిత మాధ్యమాల కాలం బేసి సంఖ్య అని భావిస్తే అంటే 3 సం॥లు, 5 సం॥లు, 7 సం॥లు వగైరా అయితే చలిత మాధ్యమాలను కనుగొని మధ్య సం॥మునకు ఇస్తూ కొనసాగించాలి. ఉదా॥కు 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమమైతే మొదటి 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు కనుగొని మధ్య సం॥మునకు అంటే 2వ సం॥నకు ఇవ్వాలి. ఆ తరువాత మొదటి సం॥ర విలువను మినహాయించి 4వ సం॥ విలువను జత చేసి సగటును మళ్ళీ మధ్య సం॥నకు ఇవ్వాలి. ఈ విధంగా కొనసాగించాలి. బేసి సంఖ్య చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనే విధానాన్ని చూద్దాం.

ఉదాహరణ - 1 : కింది సమాచారానికి 3 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కనుక్కోండి.

సం॥ ము	**ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నుల్లో)**	**సం॥ ము**	**ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నుల్లో)**
1983	15	1991	63
1984	21	1992	70
1985	30	1993	74
1986	36	1994	82
1987	42	1995	90
1988	46	1996	95
1989	50	1997	102
1990	56		

3 సం॥ల చలిత మాధ్యమాల గణన

సం॥ ము	**ఉత్పత్తి (మెట్రిక్ టన్నుల్లో)**	**3 సం॥ల చలిత మొత్తాలు**	**3 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు**
1983	15	---	---
1984	21	66	22.00
1985	30	87	29.00
1986	36	108	36.00
1987	42	124	41.33
1988	46	138	46.00
1989	50	152	50.67

1990	56	169	56.33
1991	63	189	63.00
1992	70	207	69.00
1993	74	226	75.33
1994	82	246	82.00
1995	90	267	89.00
1996	95	287	95.67
1997	102	---	---

ఉదాహరణ - 2 : కింది సమాచారానికి 5 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కనుక్కోండి.

సం॥లు	విద్యార్థుల సంఖ్య	సం॥ ము	విద్యార్థుల సంఖ్య
1988	332	1993	405
1989	317	1994	410
1990	357	1995	417
1991	392	1996	405
1992	402	1997	431

సమాధానం - 5 సం॥ల చలిత మాధ్యమాల గణన

సం॥లు	విద్యార్థుల సంఖ్య	5 సం॥ల చలిత మొత్తాలు	5 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు
1988	332	---	---
1989	317	---	---
1990	357	1800	360.0
1991	392	1873	374.6
1992	402	1966	393.2
1993	405	2036	407.2
1994	410	2049	409.8
1995	417	2078	415.6
1996	405	---	---
1997	431	---	---

ఉదాహరణ - 3 : కింది సమాచారానికి 5 సం॥ల 7 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కనుక్కోండి. రేఖా పటంలో చూపండి.

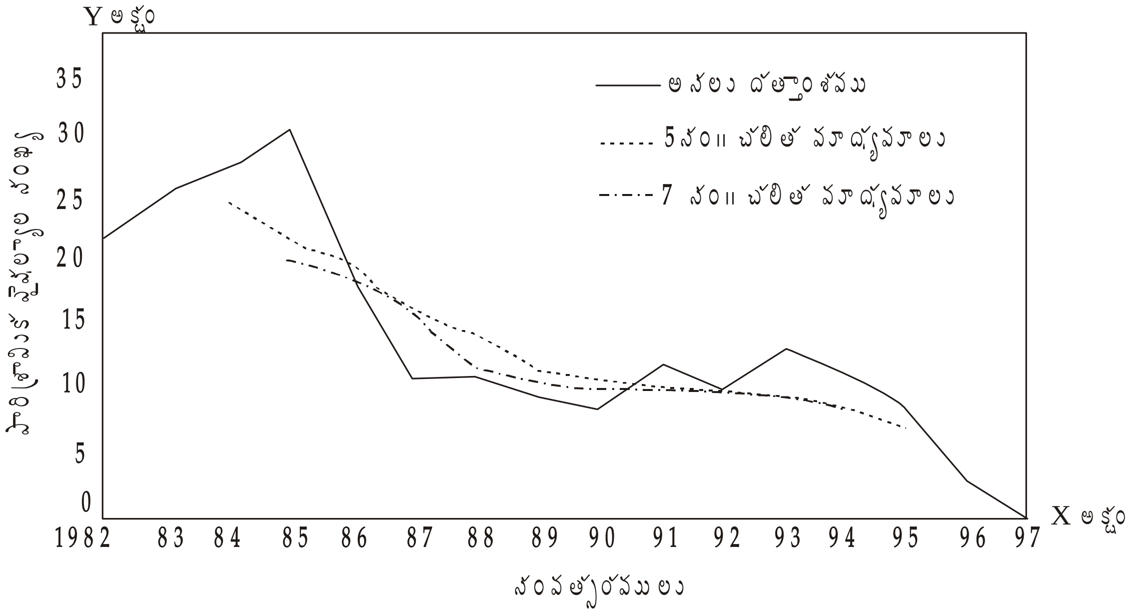
సం॥లు	పారిశ్రామిక వైఫల్యాల సంఖ్య	సం॥ము	పారిశ్రామిక వైఫల్యాల సంఖ్య
1982	23	1990	9
1983	26	1991	13
1984	28	1992	11
1985	32	1993	14
1986	20	1994	12
1987	12	1995	9
1988	12	1996	3
1989	10	1997	1

సమాధానం - 5 సం॥ల, 7 సం॥ల చలిత మాధ్యమాల గణన

సం॥ము	పారిశ్రామిక వైఫల్యాల సంఖ్య	5 సం॥ల చలిత మొత్తము	5 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు	7 సం॥ల చలిత మొత్తము	7 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు
1982	23	---	---	---	---
1983	26	---	---	---	---
1984	28	129	25.8	---	---
1985	32	118	23.6	153	21.9
1986	20	104	20.8	140	20.0
1987	12	86	17.2	123	17.6
1988	12	63	12.6	108	15.4
1989	10	56	11.2	87	12.4
1990	9	55	11.0	81	11.6
1991	13	57	11.4	81	11.6
1992	11	59	11.8	78	11.1
1993	14	59	11.8	71	10.1
1994	12	69	9.8	63	5.0
1995	9	39	7.9	---	---
1996	3	---	---	---	---
1997	1	---	---	---	---

రేఖాపటం 13.6

5 సం॥ల, 7 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను రేఖాపటంలో చూపుట



2. సరి సంఖ్య అయినట్లయితే : చలిత మధ్యమాన్ని కనుగొనే సగటు సరి సంఖ్యకు సంబంధించి అంటే 2, 4, 6, 8 సం॥లు అయితే చలిత మధ్యమాలు రెండు సం॥ల మధ్య కాలానికి వస్తాయి. ఆ తరువాత మరల రెండు సం॥ల సగటును రూపొందించి కేంద్రీకృతం చేస్తే విలువలు సంవత్సరాల కనుబంధంగా వస్తాయి. ఈ విధానాన్నే కేంద్రీకృతం చేయటం అంటారు. సరి సంఖ్యలో చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనే విధానాన్ని ప్రస్తుతం ఉదాహరణల ద్వారా తెలుసుకుందాం.

ఉదాహరణ 1 : కింది సమాచారానికి 4 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనండి.

సం॥ము	చలరాశులు	సం॥ము	చలరాశులు
1984	12	1991	100
1985	25	1992	82
1986	39	1993	65
1987	54	1994	49
1988	70	1995	34
1989	87	1996	20
1990	105	1997	7

సం॥ము	చలరాశులు		4 సం॥ల చలిత మొత్తము	4 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలు		4 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కేంద్రీకృతం చేయగా
1984	12		---	---		---
1985	25		---	---		
		←	130	32.5		
1986	39				←	39.75
		←	188	47.0		
1987	54				←	54.75
		←	250	62.5		
1988	70				←	70.75
		←	316	79.0		
1989	87				←	84.75
		←	362	90.5		
1990	105				←	92.00
		←	374	93.5		
1991	100				←	90.75
		←	352	88.0		
1992	82				←	81.00
		←	296	74.0		
1993	65				←	65.75
		←	230	57.5		
1994	49				←	49.75
		←	168	42.0		
1995	34				←	34.75
		←	110	27.5		
1996	20		---	---		---
1997	7		---	---		---

పైన సూచించినట్లుగానే 2 సం॥ల, 6 సం॥ల, 8 సం॥ల చలిత మాధ్యమాలను కూడా కనుగొని రేఖా పటంలో కూడా చూపవచ్చు. బేసి సంఖ్యల చలిత మాధ్యమాలతో పోల్చితే సరి సంఖ్యలో చలిత మాధ్యమాలను కనుగొనేటప్పుడు అదనంగా కేంద్రీకృతం చేయవలసి ఉంటుంది.

చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి వల్ల ప్రయోజనాలు

1. కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతితో పోల్చితే ఈ పద్ధతి సులువు.

2. ఉన్న చలరాశులకు కొత్తగా చలరాసులు వచ్చిచేరినా, తగ్గించవలసి వచ్చినా ప్రవృత్తి విలువలలో పెద్దగా మార్పులు సంభవించవు. అదనంగా కొన్ని వచ్చి చేరతాయి తప్ప ఉన్నవి మారవు.

3. వ్యాపార చక్రాల కాలం, చలిత మాధ్యమాల కాలం ఒకటే అయితే చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులను ఈ పద్ధతిలో వాటికవే పరిహరించబడతాయి.

4. దత్తాంశ స్వభావాన్ని బట్టి అనుగుణమైన విధంగా చర్యలను తీసుకోవటానికి గణకుడికి అవకాశం ఉంటుంది.

5. శ్రేణుల ప్రవృత్తి స్వభావం నియమ రహితంగా (Irregular Trend) ఉంటే ఈ పద్ధతి చాల ఉత్తమమైనది.

పరిమితులు

1. ఈ పద్ధతిలో అన్ని సం॥లకు ప్రవృత్తి విలువలు కనుగొనలేము. కనుగొనే చలిత మాధ్యమాల సం॥ల సంఖ్యనుబట్టి ప్రారంభి, చివరి సంవత్సరాలకు ప్రవృత్తి విలువలు ఉండవు.

2. చలిత మాధ్యమ సంవత్సరం ఎంపిక (2 సం॥, 3 సం॥లు, 4 సం॥లు, 5 సం॥లు) విషయంలో తగు జాగ్రత్తల గణకుడే వహించాలి. ఎందుకంటే ఈ ఎంపికకు ఏ విధమైన సూత్రాలు లేవు.

3. భూత, భవిష్యత్ విలువలను గణిత పద్ధతిలో వలె అంచనా వేయటం కాని, ప్రవృత్తి రేఖను పొడిగించటం ద్వారా కనుగొనడం సాధ్యం కాదు.

4. సిద్ధాంత ప్రకారం చలిత మాధ్యయము చక్రీయ ఒడుదుడుకులను పరిహరిస్తుందని చెప్పడం జరుగుతుంది. కాని వాస్తవానికి ఇది సాధ్యం కాదు.

డి) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి : ప్రవృత్తి విలువలను కనుగొనే పద్ధతుల్లో ఉత్తమమైన పద్ధతి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి. ఈ పద్ధతి బహుళ ప్రచారంలో ఉన్న పద్ధతి. ఈ పద్ధతిలో కనుగొన్న ప్రవృత్తి రేఖను సుష్టితమ రేఖ లేదా ది లైన్ ఆఫ్ బెస్ట్ ఫిట్ (The line of Best Fit) అని అంటారు. ఈ పద్ధతి ద్వారా సరళ రేఖ లేదా వక్రరేఖను సంధానం చెయ్యవచ్చు. ప్రస్తుతం మనం సరళ రేఖా సంధానాన్ని గురించి తెలుసుకుందాం.

ఈ పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన ప్రవృత్తి సమీకరణములో దత్తాంశాన్ని పొందుపరచినట్లయితే వచ్చు విలువలు కింది రెండు నిబంధనలను తృప్తి పరుస్తాయి.

1. $\sum(Y-Y_C)=0$ లేదా కాలశ్రేణుల్లోని అసలు విలువల నుంచి (Y) ప్రవృత్తి విలువలను (Y_C) తీసివేయగా వచ్చు విచలనాలు మొత్తం సున్నాకు సమానం.

2. $\sum(Y-Y_C)^2$ విలువలు కనిష్టం లేదా కాలశ్రేణుల అసలు విలువలకు, ప్రవృత్తి విలువలకు గల విచలనాల వర్గాల మొత్తం కనిష్టంగా ఉంటాయి.

ఈ నిబంధనలను తృప్తి పరచటం వల్లనే దీనిని 'Line of Best Fit' రేఖ అంటారు. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సరళ రేఖా ప్రవృత్తిని తెలిపే సమీకరణను కింది విధంగా చూపవచ్చు.

$$Y_C = a + bX$$

పై సమీకరణములో Y_C = ప్రవృత్తి విలువలు లేదా అంచనా వేసిన విలువలు లేదా అస్వాంతంత్ర చలరాశి,

a = ఇంటర్ సెప్ట్ (Intercept) లేదా X విలువ 'O' అయినప్పుడు ఉండే Y విలువలను సూచిస్తుంది.

b = ప్రవృత్తి రేఖ వాలు లేదా X లో వచ్చిన మార్పు వల్ల Y లో వచ్చే మార్పును సూచిస్తుంది.

పై సమీకరణములోని a, b అనే విలువలను కనుగొనేందుకు కింది సాధారణ సమీకరణములను సాధించవలసి ఉంటుంది.

$\sum Y = Na + b\sum X$ ....(i)

$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$.......................(ii)

పై సమీకరణములో N అంటే దత్తాంశములోని సంవత్సరాల (నెలలు లేదా ఇచ్చిన ఇతర కాలం) సంఖ్య. శ్రేణుల్లోని కాలాన్ని ఏదోఒక సంవత్సరం కేంద్ర బిందువుగా చేసుకొని క్రమ సంఖ్యను 'X' గా చూపటం జరుగుతుంది. ఇచ్చిన సంవత్సరాల్లో మధ్య సంవత్సరాన్ని కేంద్ర బిందువుగా చేసుకొని క్రమ సంఖ్య రూపొందిస్తే ధనాత్మక విలువల మొత్తం, ఋణాత్మక విలువల మొత్తానికి సమానంగా ఉంటుంది. కావున $\sum X = 0$ అవుతుంది. మరో విధంగా చెప్పాలంటే సగటు కాలం నుంచి తీసుకున్న విచలనాలు 'O' కి సమానంగా ఉండటం వల్ల పై సాధారణ సమీకరణాలు కింది విధంగా మారతాయి.

$\sum Y = Na$ ....(iii)

$\sum XY = b\sum X^2$ ....(iv)

ప్రస్తుతం a, b విలువలను కింది విధంగా సులువుగా గణించవచ్చు.

$\sum Y = Na$ కావున $a = \frac{\sum X}{N}$ or $\overline{Y}$

$\sum XY = b\sum X^2$ కావున $b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$

పై వివరణను బట్టి 'a' అంటే Y విలువల అంకమధ్యమం, 'b' అంటే మార్పు రేటు. ఇచ్చిన శ్రేణులలోని సంవత్సరముల సంఖ్య బేసిలో ఉన్నట్లయితే మధ్య సం॥మును కేంద్ర బిందువుగా చేసుకోవాలి. ఒకవేళ సరి సంఖ్యలో ఉంటే మధ్య గల రెండు సం॥ల అంకమధ్యమాన్ని కేంద్ర బిందువుగా తీసుకోవాలి. ఉదాహరణకు **1975, 1976, 1977, 1978, 1979** అనే అయిదు సం॥లు ఉంటే కేంద్ర బిందువు **1977** అవుతుంది. ఒక వేళ సరి సంఖ్యలో అంటే **1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980** అయినట్లయితే $\frac{1977+1978}{2} = 1977.5$ వ సం॥ము కేంద్ర బిందువుగా తీసుకోవాలి.

కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా సమీకరణ సాధన - రేఖా పటంలో గుర్తింపు.

ఉదాహరణ - 1 : కింది సమాచారం వివిధ సం॥లలో పంచదార పరిశ్రమలోని ఉత్పత్తిని వేల క్వింటాళ్ళలో తెలుపుతుంది.

సంవత్సరం	**1980**	**1981**	**1982**	**1983**	**1984**	**1985**	**1986**
ఉత్పత్తి **(వేల క్వింటాళ్ళలో)**	**80**	**90**	**92**	**83**	**94**	**99**	**92**

(1) పై సమాచారానికి సరళరేఖా సమీకరణమును సాధించండి.

(2) దత్తాంశాన్ని, ప్రవృత్తి రేఖను రేఖాపటంలో చూపండి.

సమాధానం : (1) సరళ రేఖా సమీకరణములను సాధించటం.

సంవత్సరాలు	**ఉత్పత్తి (వేల క్వింటాళ్ళు)** Y	X	XY	X^2	**ప్రవృత్తి విలువలు**
1980	80	- 3	- 240	9	84

1981	90	- 2	- 180	4	86
1982	92	- 1	- 92	1	88
1983	83	0	0	0	90
1984	94	+ 1	+ 94	1	92
1985	99	+ 2	+ 198	4	94
1986	92	+ 3	+ 226	9	96
$N=7$	$\sum Y = 630$	$\sum X = 0$	$\sum XY = 56$	$\sum X^2 = 28$	$\sum Y_C = 630$

సరళ రేఖా సమీకరణము $Y_C = a + bX$

$\sum X = 0$; $a = \frac{\sum Y}{N}$, $b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$ కావున

$\sum Y = 630,\ N = 7,\ \sum XY = 56,\ \sum X^2 = 28$

$\therefore \quad a = \frac{630}{7} = 90$ and $b = \frac{56}{28} = 2$

కావున పై దత్తాంశానికి సరళ రేఖా సమీకరణము $Y = 90 + 2X$

ప్రవృత్తి విలువల గణన :

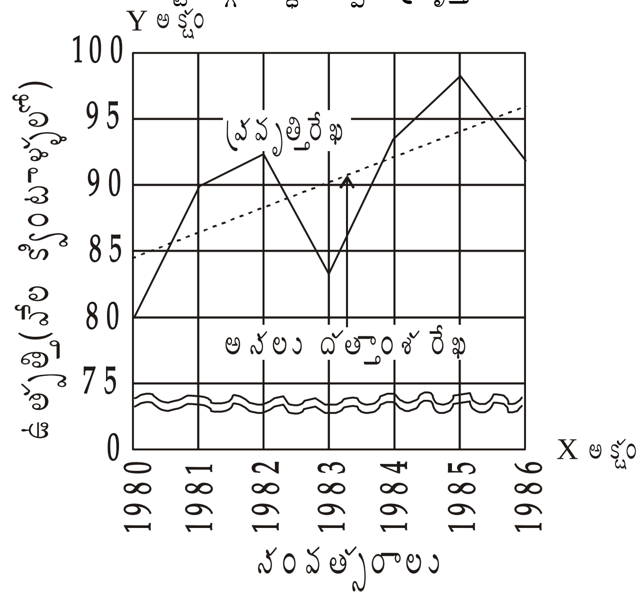
1980వ సంవత్సరంలో X విలువ **- 3** అయితే ప్రవృత్తి విలువ $Y_c = 90 + 2(-3) = 84$

1981వ సంవత్సరంలో X విలువ **- 2** అయితే ప్రవృత్తి విలువ $Y_c = 90 + 2(-2) = 86$

ఈ విధంగానే $X = -1, 0, 1, 2, 3$ లను ప్రతిక్షేపిస్తూ పోతే ఇతర ప్రవృత్తి విలువలు కూడా లభ్యమవుతాయి.

(2) పై సమాచారాన్నే రేఖా పటం ద్వారా చూపే విధానాన్ని కింది రేఖా పటం తెలుపుతుంది.

కనిష్ఠ వర్గాల పద్ధతి ద్వారా ప్రవృత్తి రేఖ



పైన కనుగొన్న సమీకరణంలో కేంద్ర బిందువుగా మధ్య సం॥ము 1983ను తీసుకోవటం జరిగింది. ప్రస్తుతం ప్రారంభ సం॥మును కేంద్ర బిందువుగా తీసుకొని సమీకరణను సాదిద్దాం.

సంవత్సరాలు	**ఉత్పత్తి (క్వింటాళ్ళు)** Y	X	XY	X^2	**ప్రవృత్తి విలువలు**
1980	80	0	0	0	84
1981	90	1	90	1	86
1982	92	2	184	4	88
1983	83	3	249	9	90
1984	94	4	376	16	92
1985	99	5	495	25	94
1986	92	6	552	36	96
N = 7	$\sum Y = 630$	$\sum X = 21$	$\sum XY = 1{,}946$	$\sum X^2 = 91$	$\sum Y_c = 630$

$Y = a + bX$ అనే సమీకరణ సాధించాలి. ఇందులో a, b లను కనుగొనేందుకు 1) $\sum Y = Na + b\sum X$; 2) $\sum XY = a\sum X + b\sum X^2$ లను సాధించాలి.

ఈ విలువలు ప్రతిక్షేపిస్తే

$$630 = 7a + 21b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(i)$$
$$1946 = 21a + 91b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(ii)$$

(i)వ సమీకరణను 3తో గుణించి, (ii)ను 1తో గుణిస్తే కింది (iii), (iv) సమీకరణాలు వస్తాయి.

$$1890 = 21a + 63b \quad -----(iii)$$
$$1946 = 21a + 91b \quad -----(iv)$$ ((iii)లో నుంచి (iv)ను తీసివేస్తే)
$$-56 = -28b$$

$$-28b = -56 \quad \text{or} \quad b = \frac{56}{28} = 2,$$

(1)వ సమీకరణంలో b విలువ 2ను ప్రతిక్షేపిస్తే

$$630 = 7a + 21(2)$$

$$7a = 630 - 42 = 588 \quad \text{or} \quad a = \frac{588}{7} = 84$$

అందుచేత సమీకరణము $Y_C = 84 + 2X$

1980 X విలువ '0' కావున ఈ విలువను సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే 84+2×0 = 84 అనేది 1980 యొక్క ప్రవృత్తి విలువ. ఈ విధంగా మిగిలిన సంవత్సరాలకు కూడా ప్రవృత్తి విలువలు గణించాలి.

గమనిక : పై రెండు విధాలుగా గణించిన సమీకరణములోని వ్యత్యాసాలకుకారణము కేంద్రంగా తీసుకున్న సంవత్సరం. మొదట 1983 కేంద్రంగా, తరువాత 1980 కేంద్రంగా తీసుకున్నను ప్రవృత్తి విలువలు మాత్రం మారవు.

ఉదాహరణ - 2 :- కింది సమాచారానికి సరళరేఖా సమీకరణను సాధించి 1997వ సం॥మునకు ప్రవృత్తి విలువను కనుక్కోండి.

సంవత్సరము	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
స్టీలు ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)	60	72	75	65	80	85	95

సమాధానం :- సరళ రేఖ సమీకరణను నిర్మించటం

సం॥ము	**స్టీలు ఉత్పత్తి (మి॥ టన్నుల్లో)**	**1993 కేంద్రంగా**		
	Y	X	XY	X^2
1990	60	-3	-180	9
1991	72	-2	-144	4
1992	75	-1	-75	1
1993	65	0	0	0
1994	80	+1	+80	1
1995	85	+2	+170	4
1996	95	+3	+285	9
N = 7	$\sum Y = 532$	$\sum X = 0$	$\sum XY = 136$	$\sum X^2 = 28$

సరళ రేఖా సమీకరణము $Y = a + bX$

$\sum X = 0$ అయినది కావున $a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{532}{7} = 76$

$b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{136}{28} = 4.857$ కావున

సమీకరణం, $Y = 76 + 4.857\ X$

1997వ సం॥మునకు X విలువ $+4$ కావున

$Y_{1997} = 76 + 4.857(4) = 95.428$

కావున 1997నకు ఉండగల అమ్మకాలు రూ॥ 109.999 లక్షలు.

ఉదాహరణ - 3 :- కింది దత్తాంశానికి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా సమీకరణమును సాధించి, 1998వ సం॥నకు విలువను అంచనా వెయ్యండి.

సంవత్సరము	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
సంపాదనలు (లక్షల రూ॥ల్లో)	38	40	65	72	69	60	87	95

సమాధానం :- కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా సరళరేఖా సమీకరణమును సాధించటం

సం॥ము	సంపాదనలు (లక్షల రూ॥ల్లో)	1992.5 సం॥ ఆధారంగా విచలనాలు	విచలనాలను 2తో గుణించగా		
Y		X		XY	X^2
1989	38	-3.5	-7	-266	49
1990	40	-2.5	-5	-200	25
1991	65	-1.5	-3	-195	9
1992	72	-0.5	-1	-72	1
1993	69	+0.5	+1	+69	1
1994	60	+1.5	+3	+180	9
1995	87	+2.5	+5	+435	25
1996	95	+3.5	+7	+665	49
N = 8	$\sum Y = 526$	$\sum X = 0$		$\sum XY = 616$	$\sum X^2 = 168$

సరళ రేఖా సమీకరణము $Y_C = a + bX$, $\Sigma X = 0$ అయ్యింది కావున

$$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{526}{8} = 65.75$$

$$b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{616}{168} = 3.667;$$ a, b విలువలను సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$Y = 65.75 + 3.667X$$

1998 కి X విలువ **11** అవుతుంది.

$X = 11$ అయితే Y విలువ $Y = 65.75 + 3.667(11) = 65.75 + 40.337 = 106.087$

పై విలువనే **2** తో గుణించకుండా కూడా రాబట్టవచ్చు. కాని కొంత కష్టముతో కూడి ఉంది. **2**తో గుణించకుండా సరళ రేఖా సమీకరణమును సాధించటాన్ని కింద చూపటం జరిగింది.

సంవత్సరం	సంపాదనలు (లక్షల రూ॥ల్లో)	**1992-5** సం॥ర ఆధారంగా విచలనాలు		
	(Y)	(X)	XY	X^2
1989	38	-3.5	-133.00	12.25
1990	40	-2.5	-100.00	6.25
1991	65	-1.5	-97.50	2.25
1992	72	-0.5	-36.00	0.25
1993	69	+0.5	+34.50	0.25
1994	60	+1.5	+90.00	2.25
1995	87	+2.5	+217.50	6.25
1996	95	+3.5	+332.50	12.25
N = 8	$\Sigma Y = 526$	$\Sigma X = 0$	$\Sigma XY = 308$	$\Sigma X^2 = 42.00$

సరళరేఖా సమీకరణ $Y = a + bX$, ΣX విలువ '0' అయ్యింది కావున

$$a = \frac{\sum Y}{N} = \frac{526}{8} = 65.75 \quad ; \quad b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{308}{42} = 7.333$$

a, b విలువలను ప్రతిక్షేపిస్తే సమీకరణ $Y = 65.75 + 7.333X$

2తో గుణించి కనుగొన్నట్లయితే b విలువ **3.667** కాగా గుణించకపోతే b విలువ **7.333**గా ఉంది. అయితే ఏ పద్ధతి ద్వారా అయినా ప్రవృత్తి విలువలు ఒకే విధంగా ఉంటాయి.

ఉదాహరణ - 4 :- కింది దత్తాంశం పంచదార ఉత్పత్తులను (వేల క్వింటాళ్ళలో) చూపుతుంది.

సం॥ము	**ఉత్పత్తి (వేల క్వింటాళ్ళలో)**	**సం॥ము**	**ఉత్పత్తి (వేల క్వింటాళ్ళలో)**
1975	77	1980	91
1977	88	1981	98
1978	94	1984	90
1979	85		

(1) కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళరేఖా సమీకరణమును సాధించండి.

(2) ప్రవృత్తి విలువలు కనుక్కోండి

(3) పంచదార నెలసరి పెరుగుదలను తెలుపండి.

సమాధానం : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిలో సరళ రేఖా సమీకరణము $Y_C = a + bX$

$\sum X$ విలువలు '0' కానందున 'a', 'b'లను కనుగొనేందుకు కింది సమీకరణాలు సాధించటం జరుగుతుంది.

$$\sum Y = Na + b\sum X ....(i)$$

$$\sum XY = a\sum X + b\sum X^2 ....(ii)$$

సం॥ము	**ఉత్పత్తి** (Y) **(వేల టన్నుల్లో)**	**1979వ సం॥ము కేంద్రంగా విచలనాలు** (X)	XY	X^2	**ప్రవృత్తి విలువలు** (Y_C)	$(Y - Y_C)$
1975	77	-4	-308	16	83.283	-6.283
1977	88	-2	-176	4	86.043	+1.957
1978	94	-1	-94	1	87.423	+6.577
1979	85	0	0	0	88.803	-3.803
1980	91	+1	+91	1	90.183	+0.817
1981	98	+2	+196	4	91.563	+6.437
1984	90	+5	+450	25	95.703	-5.703
N = 7	$\Sigma Y = 623$	$\Sigma X = 1$	$\Sigma XY = 159$	$\Sigma X^2 = 51$	$\Sigma Y_C = 623$	$\Sigma(Y-Y_C) = 0$

$$623 = 7a + b \text{ ------- (i)}$$

$$159 = a + 51b \text{ ------- (ii)}$$

రెండో సమీకరణమును 7తో గుణిస్తే $1113 = 7a + 357b$ -------- (iii)గా మారుతుంది. ప్రస్తుతం

(i) నుంచి (iii) తీసివేస్తే లేదా $623 = 7a + b - (113 = 7a + 357b)$ చేస్తే

$$-490 = -356\,b \text{ or } b = \frac{490}{356} = 1.38$$

b విలువను (i)వ సమీకరణములో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$623 = 7a + 1.38$$
$$7a = 623 - 1.38 = 621.62 \text{ or } a = 88.803$$

కావున సరళ రేఖా సమీకరణలో a, b విలువలు ప్రతిక్షేపిస్తే సమీకరణము $Y = 88.803 + 1.38X$

X విలువలను సమీకరణలో ప్రతిక్షేపిస్తే

$$X = -4,\ Y = 88.803 + 1.38(-4) = 88.803 - .52 = 83.283$$
$$X = -2,\ Y = 88.803 + 1.38(-2) = 88.803 - 2.76 = 86.043$$
$$X = -1,\ Y\ \ 88.803\ 1.38 = 87.423$$
$$X = 0,\ Y = 88.803$$
$$X = +1,\ Y\ \ 88.803 + 1.38 = 90.183$$
$$X = +2,\ Y = 88.803\ (1.38 \times 2) = 91.563$$
$$X = +5,\ Y = 88.803\ (1.38 \times 5) = 95.703$$

కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి వల్ల ప్రయోజనాలు

ప్రవృత్తి రేఖా సంధానంలో ప్రసిద్ధి పొందిన పద్ధతి కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి. ఈ పద్ధతి వల్ల అనేక విధాలైన ప్రయోజనాలు ఉన్నాయి.

1. ఈ పద్ధతి గణిత పద్ధతి కావటం వల్ల గణకుడి పాక్షికతకు తావులేదు.
2. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతికి భిన్నంగా అన్ని సంవత్సరాలకు ఈ పద్ధతిలో ప్రవృత్తి విలువలను అంచనా వెయ్యవచ్చు.
3. ఈ పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన సమీకరణము ద్వారా భూత, భవిష్యత్ కాలాలకు ప్రవృత్తి విలువను అంచనా వేయవచ్చు. మరియు అంచనా వేసిన విలువలు కూడా నమ్మకమైనవి.
4. ఈ పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన $a + bX$ అనే సమీకరణములో 'b' అనేది వృద్ధి రేటు. కావున కాల శ్రేణులలో సాంవత్సరిక వృద్ధి రేటును కనుగొనుట సాధ్యమవుతుంది.

లోపాలు

1. ఈ పద్ధతిలోని ముఖ్య లోపం ఇచ్చిన శ్రేణులకు ఏ విధమైన ప్రవృత్తి రేఖను (సరళ రేఖా లేదా వక్ర రేఖా?) సంధానం చేయాలి. దీన్ని నిర్ణయించుకోవటమే మొదటి లోపం.
2. ఈ పద్ధతి గణిత పద్ధతి. కావున సరళ రేఖా సమీకరణ సాధన, రేఖను రూపొందించటం అనేవి గణితంలో అవగాహన లేని వారికి చాలా కష్టంతో కూడుకున్న పని.

3. ఈ పద్ధతిలో సమీకరణమును సాధించిన తరువాత ఏ కారణం చేతనైనా ఏదో ఒక చలరాశిని కలపవలసి లేదా తగ్గించవలసి వస్తే సర్దుబాటుకు అవకాశం లేదు. మళ్ళీ మొదటి నుంచి ప్రారంభించవలసి ఉంటుంది.
4. ఈ పద్ధతిలో అంచనా వేసిన ప్రవృత్తి విలువలు దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి విలువలు. అంటే చక్రీయ, ఋతుగతమైన, నియమరహిత హెచ్చు తగ్గులను పరిగణనలోకి తీసుకోకుండా రూపొందించినవి.

12.3 సారాంశం

కాలానుగుణంగా అమర్చిన దత్తాంసాన్ని కాలశ్రేణులు అంటారు. కాలానుగుణంగా ఉన్న చలరాశులను పరిశీలించే విధానమే కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ. కాలశ్రేణుల్లో సంభవించే మార్పులు 1. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి, 2 ఋతువుల వల్ల వచ్చే మార్పులు, 3. చక్రీయ హెచ్చు తగ్గులు, 4. నియమ రహిత హెచ్చు, తగ్గులు అనే నాలుగు అంశాల పై ఆధారపడి ఉంటాయి. దీర్ఘకాలంలో కాల శ్రేణుల చలరాశులు చలించే దిశను ప్రవృత్తి అంటారు.

కాలశ్రేణుల ప్రవృత్తిని కనుగొనేందుకు నాలుగు పద్ధతులు ఉన్నాయి. అవి 1. సరస వక్రరేఖా పద్ధతి, 2. పాక్షిక సగటుల పద్ధతి, 3. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి, 4. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి. ఈ పద్ధతులన్నింటిలోనూ ఉత్తమమైన పద్ధతిగా కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిని చెప్పటం జరుగుతుంది. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి గణిత పద్ధతి అయితే గణన కష్టం. ఈ పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన ప్రవృత్తి రేఖను సుష్టితమ రేఖ (Line of Best Fit) అంటారు. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ వల్ల వివిధ రంగాలకు మరి ముఖ్యంగా ఆర్థిక, వ్యాపార రంగాలకు అనేక ప్రయోజనాలున్నాయి. దేశ ప్రణాళిక రూపొందించేందుకు, ఆర్థిక, వ్యాపార సంబంధమైన నిర్ణయాలు తీసుకోవటంతో పాటు అనేక రంగాల్లో ఈ కాల శ్రేణుల విశ్లేషణ ఎంతో ప్రయోజనకరంగా ఉంది. అందుచేతనే ఈ విశ్లేషణ బహుళ ప్రచారంలో ఉంది.

12.4 ముఖ్య పదాలు

1. కాలశ్రేణులు : కాలానుగుణంగా అమర్చిన చలరాశులు
2. ప్రవృత్తి : కాలానుగుణంగా చలరాశుల గమనాన్ని తెలియజేసే దిశ
3. వ్యాపార చక్రాలు : ఆర్థిక వ్యవస్థలోని సమిష్టి ఆర్థిక కార్యకలాపాల్లో లయబద్ధంగా వచ్చు హెచ్చు తగ్గులనే వ్యాపార చక్రాలు అంటారు.
4. సుష్టితమ రేఖ (The Line of Best Fit) : కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి ద్వారా రూపొందించిన ప్రవృత్తి రేఖను సష్టితమ రేఖ అంటారు.
5. ప్రవృత్తి విలువలు : కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ పద్ధతుల ద్వారా వివిధ సం॥లకు లేదా కాల యూనిట్లకు అంచనా వేసిన విలువలు

12.5 నమూనా ప్రశ్నలు

I. వ్యాసరూప ప్రశ్నలు

1. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ అనగాఏవి? దాని వల్ల గల ఉపయోగాలేవి?
2. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి (secular trend), ఋతుగతమైన హెచ్చుతగ్గులు (seasonal fluctuations), చక్రీయమైన హెచ్చుతగ్గుల మధ్య వున్న తేడాలను గురించి వివరించండి.
3. కాలశ్రేణుల విశ్లేషణ పద్ధతులను తెలుపుము. చలితమాధ్యమాల పద్ధతిని ఉదాహరణతో వివరించి, గుణదోషాలను వ్రాయుము.

4. కనిష్టవర్గ ప్రవృత్తి విలువలను ఏ విధంగా కనుక్కోవలె? ఉదాహరణతో వివరించి గుణదోషాలను వ్రాయుము.

5. చలితమాధ్యమాల పద్ధతిలో 3 సంII ల, 5 సంII ల చలిత మాధ్యమాలు కనుక్కోండి.

సంIIలు	చలరాశులు	సంIIలు	చలరాశులు
1911	506	1922	818
1912	620	1923	745
1913	1036	1924	845
1914	673	1925	1272
1915	588	1926	899
1916	696	1927	814
1917	1116	1928	929
1918	738	1929	1360
1919	663	1930	961
1920	777	1931	926
1921	1189		

6. ఇంగ్లాండులో వుండే శిశుమృతిరేటు దిగువ ఇవ్వడమైంది. (1000 సజీవ జననాలకు 1 సంవత్సరంలోపు వయస్సుగల శిశువుల మృతి)

సంIIము	శిశుమృతిరేటు	సంIIము	శిశుమృతిరేటు
1912	76	1924	62
1913	68	1925	57
1914	76	1926	60
1915	76	1927	59
1916	69	1928	52
1917	69	1929	49
1918	67	1930	60
1919	73	1931	60
1920	66	1932	62
1921	67	1933	49
1922	64	1934	45
1923	62	1935	46
		1936	43

ఈ శ్రేణులకు తేలికైన 5 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాన్ని ఒక దానిని కూర్చండి. ఇచ్చిన ఫలితానికి సులభమైన ఇంకో 5 సంవత్సరాల చలిత మాధ్యమాన్ని కూర్చండి.

7. కింది పట్టికలో 1909-1930 సంవత్సరాలకు, బొంబాయిలోని బాంకు క్లియరింగ్స్ (మిలియన్ల రూపాయలలో), దానికి సంబంధించిన ప్రవృత్తిని కనుక్కోండి.

సం॥ములు	బ్యాంకు క్లియరెన్స్	సం॥ములు	బ్యాంకు క్లియరెన్స్
1906	52.7	1919	94.6
1907	79.4	1920	83.0
1908	76.3	1921	110.6
1909	66.0	1922	159.6
1910	68.6	1923	177.4
1911	93.8	1924	178.6
1912	104.7	1925	238.5
1913	87.2	1926	243.2
1914	79.3	1927	194.4
1915	103.6	1928	217.9
1916	97.3	1929	214.0
1917	92.4	1930	256.7
1918	100.7		

8. దిగువ ఇచ్చిన ఉక్కు ఉత్పత్తి యొక్క కాలశ్రేణిలోని ప్రవృత్తి విలువలను చలిత మాధ్యమాల పద్ధతిని ఉపయోగించి నాలుగు సం॥లకు కనుక్కోండి.

సం॥	ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)	సం॥	ఉత్పత్తి (మిలియన్ టన్నులలో)
1901	351	1910	500
1902	366	1911	518
1903	361	1912	455
1904	362	1913	502
1905	400	1914	540
1906	419	1915	557
1907	410	1916	571
1908	420	1917	586
1909	450	1918	612

9. కింద ఇచ్చిన దత్తాంశాలకు కాలశ్రేణి గ్రాఫ్ గీసి, సరస వక్రరేఖా పద్ధతిలో, పాక్షిక సగటుల పద్ధతిలో ప్రవృత్తిని చూపించండి.

సం॥లు	ఉత్పత్తి (క్వింటాళ్ళలో)	సం॥లు	ఉత్పత్తి (క్వింటాళ్ళలో)
1941	165	1953	280
1942	178	1954	351
1943	236	1955	320
1944	213	1956	370
1945	180	1957	366
1946	163	1958	325
1947	180	1959	256
1948	187	1960	304
1949	210	1961	291
1950	237	1962	277
1951	203	1963	274
1952	215	1964	272

10. ఒక జిల్లాలోని గత పది సంవత్సరాల గోధుమ ఉత్పత్తి దిగువ ఇవ్వడం జరిగింది. నాలుగు సంవత్సరాల చలితమాధ్యమాలను ఉపయోగించి, ఆ జిల్లాలోని బియ్యపు ఉత్పత్తికి ప్రవృత్తిని సూచించండి.

సం॥ము	ఉత్పత్తి(టన్నులలో)	సం॥ము	ఉత్పత్తి (టన్నులలో)
1950	11,200	1955	14,500
1951	12,300	1956	11,600
1952	10,600	1957	14,300
1953	13,400	1958	13,600
1954	13,800	1959	15,400

11. గత 8 సంవత్సరాలలో ఒక వ్యాపారసంస్థకు వచ్చిన లాభాలు దిగువశ్రేణిలో సూచించడం జరిగింది. రెండు సం॥ల చలితమాధ్యమాలు కనుక్కోండి.

సం॥ము	లాభము(రూ.)	సం॥ము	లాభము(రూ.)
1956	15,420	1960	26,120
1957	14,470	1961	31,950
1958	15,520	1962	35,370
1959	21,020	1963	35,670

12. మూడు సంవత్సరాల చలితమాధ్యమాలను ఉపయోగించి, గ్రాఫ్ మీద కింది దత్తాంశాలను సూచించవలె. ఆ శ్రేణికి ప్రవృత్తిని కూడా దాని మీద చూపించండి.

సం॥ము	జననాల రేటు	సం॥ము	జననాల రేటు
1917	30.9	1928	26.4
1918	30.2	1929	24.7
1919	29.1	1930	24.1
1920	31.4	1931	23.1
1921	33.4	1932	23.7
1922	30.2	1933	22.6
1923	30.4	1934	23.6
1924	31.0	1935	23.0
1925	29.0	1936	22.0
1926	27.9	1937	22.6
1927	27.7	1938	22.9

13. భారతదేశంలో కొన్ని సంవత్సరాల మీద ఒక్కొక్క యుక్తవయస్కునికి ఉండే తృణధాన్యాల (cereals) సప్లయ్‌లు ఈ క్రింది పట్టికలో చూపడం జరిగింది.

సం॥ము	పౌన్లు(lbs.)	సం॥ము	పౌన్లు(lbs.)
1931-32	427	1938-39	360
1932-33	416	1939-40	382
1933-34	408	1940-41	352
1934-35	408	1941-42	355
1935-36	379	1942-43	358
1936-37	405	1943-44	383
1937-38	309	1944-45	361

ఈ దత్తాంశాలను చూపించే గ్రాఫ్‌ను గీయండి. 3 సం॥ చలితమాధ్యమాన్ని లెక్కవేసి గ్రాఫ్‌మీద కూడా చూపించండి.

14. ఆర్థిక పరిశీలనలో సంఖ్యాగత మార్గాన కాలశ్రేణిని విశ్లేషణం చేసే మార్గాన్ని తెలియజేయండి. కింద ఇచ్చిన పట్టికను గ్రహించి, 3 సంవత్సరాల, 5 సంవత్సరాల చలితమాధ్యమాలను గ్రహించి, సోదాహరణంగా వివరించండి.

సం॥ము	మూల్యము	సం॥ము	మూల్యము
1901	507	1916	581
1902	522	1917	599
1903	524	1918	612

1904	521	1919	597
1905	538	1920	612
1906	541	1921	616
1907	537	1922	608
1908	552	1923	628
1909	556	1924	632
1910	548	1925	626
1911	572	1926	644
1912	569	1927	643
1913	567	1928	642
1914	587	1929	661
1915	583	1930	659

15. ఒక పంచదారమిల్లు యొక్క ఉత్పత్తులు (1000 మణుగులలో) దిగువ ఇవ్వడమైంది.

(ఎ) వీటికి సరళరేఖా ప్రవృత్తి (Straight line trend) యొక్క నిమ్నత లేదా వాలు (slope)ను కనుక్కోండి.

(బి) ఈ సంఖ్యలను గ్రాఫ్ మీద చూపిస్తూ, ప్రవృత్తిని కూడా చూపించండి.

సం॥ము	ఉత్పత్తి (వేల మణుగులలో)	సం॥ము	ఉత్పత్తి (వేల మణుగులలో)
1941	80	1945	94
1942	90	1946	99
1943	93	1947	92
1944	83		

16. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతిని (least squares) రిజర్వుబ్యాంకు ఆస్తులకు ప్రవృత్తిని కనుగొనండి.

సం॥ము	ఆస్తులు (కోట్ల రూపాయలలో)	సం॥ము	ఆస్తులు (కోట్ల రూపాయలలో)
1936-37	83	1939-40	90
1937-38	92	1940-41	169
1938-39	71	1941-42	191

17. భారతదేశంలోని సహకార సంస్థల నిల్వల పెరుగుదలను దిగువ ఇవ్వడం జరిగింది. దానిని సరళరేఖా ప్రవృత్తిని కనిష్ట వర్గ పద్ధతిలో కూర్చండి. ఈ శ్రేణిని ప్రవృత్తి విలువలను గ్రాఫ్ మీద కూడా చూపించండి.

సం॥ము	నిల్వలు (Reserves) (లక్షల రూపాయలు)	సం॥ము	నిల్వలు (లక్షల రూపాయలు)
1927-28	612	1931-32	2001
1928-29	719	1932-33	1106
1929-30	820	1933-34	1231
1930-31	907		

II. సంక్షిప్త ప్రశ్నలు

18. కాలశ్రేణుల్లోని భాగాలు
19. దీర్ఘకాలిక ప్రవృత్తి
20. సరస వక్రరేఖా పద్ధతి
21. పాక్షిక సగటుల పద్ధతి
22. చలిత మాధ్యమాల పద్ధతి
23. కనిష్ట వర్గాల పద్ధతి

12.6 చదువదగిన గ్రంథాలు

B.L. Elhance	:	Fundamental Statistics
S.P. Gupta	:	Statistical Methods
C.B. Gupta	:	An Introduction to Statistical Methods
S.C. Gupta	:	Fundamentals of Statistics
M.C. Shukla & S.S. Gulshan	:	Statistics-Theory and Practice